问题导引

互动同步训练

高一数学
（上册）

总　主　编　刘宗寅
本 册 主 编　贾庆祥
本册副主编　杨育红
编　写　者　邵丽云　杨育红
审　订　者　侯秀荣

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

问题导引·互动同步训练．高一数学．上册/贾庆祥主编．—济南：山东科学技术出版社，2003(2004.7重印)
ISBN 7-5331-3500-8

Ⅰ．问...　Ⅱ．贾...　Ⅲ．数学课—高中—习题
Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第055351号

问题导引·互动同步训练

高一数学　上册

总主编　刘宗寅

本册主编　贾庆祥

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531)2098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@jn-public.sd.cninfo.net
发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531)2098071
印刷者：山东旅科印务有限公司
地址：济南市九曲路8号
邮编：250022　电话：(0531)2742156

开本：787mm×1092mm　1/16
印张：8
字数：204千
版次：2004年7月第1版第3次印刷

ISBN 7-5331-3500-8　　N·267
定价：8.80元

目　　录

第一章 集合与简易逻辑

一 集 合

1.1 集 合

问题导引

问题 1 什么是集合?

【例题 1】 考察下列各组对象能否构成一个集合.指出其中的集合是无限集还是有限集:

(1)高中一年级的高个子学生;

(2)不超过 20 的非负数;

(3)高一(2)班 16 岁以下的学生;

(4)直角坐标平面内横坐标与纵坐标相等的点;

(5)方程 $x^2+1=0$ 在实数集内的解.

解:(1)不能构成集合.因为"高个子"的概念是模糊的、不确定的,对于一个学生是否"高个子"无法判断,不符合集合元素的确定性.

(2)可以构成一个集合.因为对于任意给出的一个实数 x,都可以判断是否在集合之内.是无限集.

(3)可以构成一个集合.因为对任何一个对象都可以判定是否在这个集合内.是有限集.

(4)可以构成一个集合.是无限集.

(5)可以构成一个集合.是空集.

1.某些指定的对象集在一起就成为一个集合.集合中的每个对象叫做集合的元素.若 a 是集合 A 中元素,记作 $a\in A$;否则,记作 $a\notin A$.集合的元素具有确定性.

2.按集合中元素的多少,集合分为有限集、无限集、空集.

问题 2 表示集合常用的方法有哪些?

【例题 2】 下列说法是否正确?

(1)方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集为$\{1,1\}$;

(2)$\{a,b,c,d\}$与$\{c,a,b,d\}$是同一集合;

笔 记

(3)不大于 5 的所有自然数组成的集合为 $\{0,1,2,3,4,5\}$.

解:(1)错误.集合中的元素具备互异性.方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相等根 $x_1=x_2=1$,但这两个根只能看做这个方程的解集的一个元素,即方程的解集是 $\{1\}$.

(2)正确.集合中的元素具有无序性.

(3)正确.

1.将集合中的元素在大括号内一一列出,并且用逗号分开,这种表示集合的方法称为列举法.有限集通常用列举法表示.

2.用列举法表示集合时,注意集合元素的无序性、互异性.

【例题 3】 下列各组中的两个集合是相同的集合吗?

(1) $A=\{x\mid x+3>2\}$ 与 $B=\{y\mid y+3>2\}$;

(2) $A=\left\{(x,y)\mid y=\frac{1}{2}x^2+1\right\}$ 与 $B=\left\{y\mid y=\frac{1}{2}x^2+1\right\}$.

解:(1)是.因为 A,B 两个集合都表示由大于 -1 的所有实数组成的集合.

(2)不是.集合 A 是表示由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+1$ 上所有点组成的集合;由于 $y=\frac{1}{2}x^2+1\geqslant 1$,故集合 B 是由大于或等于 1 的所有实数组成的集合.所以,它们不表示同一集合.

1.描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.

2.描述法表示集合时,注意代表元素的形式.有些集合用描述法表示时,也可以不写代表元素.例如,集合{三角形}.

【例题 4】 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

(1) 1 ______ N; (2) -3 ______ N;

(3) 1 ______ Z; (4) 0.5 ______ Z;

(5) 0.5 ______ Q; (6) $\sqrt{2}$ ______ Q;

(7) 1 ______ R; (8) $\sqrt{2}$ ______ R.

解:(1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\in$ (4) $\notin$

(5) $\in$ (6) $\notin$ (7) $\in$ (8) $\in$

有些集合用专用字母表示.例如,R 表示实数集;Q 表示有理数集;Z 表示整数集;N 表示非负整数集即自然数集;N^* 或 N_+ 表示正整数集.

互动同步训练

双 基 在 线

1.方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\ x-y+3=0\end{cases}$ 的解集是( )

A.$\{-1,2\}$. B.$(-1,2)$.

C.$\{(-1,2)\}$. D.$\{(x,y)\mid x=-1,$或 $y=2\}$.

2.下列各组中,M 与 P 表示同一个集合的是( )

A.$M=\{1,-3\}$, $P=\{(-3,1)\}$.

B. $M=\{\varnothing\}$，$P=\{0\}$.
C. $M=\{y\mid y=x^2+1\}$，$P=\{x\mid y=x^2+1\}$.
D. $M=\{y\mid y=2x\}$，$P=\{t\mid t=x+1\}$.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 不大于 6 的非负整数所组成的集合：________；

(2) 方程 $x^3-x^2-x+1=0$ 的解所组成的集合：________；

(3) $\{y\mid y=x^2-1, |x|\leqslant 2, x\in Z\}$：________；

(4) $\{(x,y)\mid y=x^2-1, |x|\leqslant 2, x\in Z\}$：________.

4. 对于集合 $A=\{2,4,6\}$，若 $a\in A$，则 $6-a\in A$，那么 $a=$________.

拓展训练

5. 已知集合 $M=\{x\mid ax^2+2x+1=0\}$ 只含一个元素，求 a 的值.

6. 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{12}{5-x}\in N^*, x\in Z\right\}$，用列举法表示集合 A.

创新空间

7. 已知集合 $A=\{x\mid x=m^2-n^2, m, n\in Z\}$，求证：

(1) 任何奇数都是 A 的元素；

(2) 偶数 $4k-2\ (k\in Z)$ 不属于 A.

8. 设 a,b,c 是非零实数，$x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}+\frac{|c|}{c}+\frac{abc}{|abc|}$，则 x 的值组成的集合是________.

9. 设集合 $M=\{a, a+d, a+2d\}$，$N=\{a, aq, aq^2\}$，其中 $a\neq 0$，且 $M=N$，求 q 的值.

10. 集合 $A=\{x\mid x=a+b\sqrt{2}, a, b\in Z\}$，设 $x_1\in A$，$x_2\in A$，求证：$x_1x_2\in A$.

1.2 子集、全集、补集

问题导引

问题 1 任何一个对象与集合之间有且只有“属于”和“不属于”两字关系，那么两个集合之间有什么关系呢？

【例题 1】 正确表示下列各组中集合之间的关系：

(1) $A=Q$，　　$B=R$；

(2) $A=\varnothing$，　　$B=\{0\}$；

(3) $A=\{1,3\}$，　　$B=\{3,1\}$.

解：(1) A 中的元素都属于 B，

B 中有些元素不属于 A.

例如，$\sqrt{2}\notin A$，但 $\sqrt{2}\in B$. 所以 $A\subsetneqq B$.

(2) 因为 A 是空集，B 非空，所以 $A\subsetneqq B$.

1. $A\subseteq B\Leftrightarrow A=\varnothing$，或 $x\in A$ 则 $x\in B$.

2. $A\subseteq B\begin{cases}A\subsetneqq B\ (B\text{ 中至少有一个元素不属于 }A),\\ A=B\ (B\text{ 中元素都属于 }A).\end{cases}$

感　悟

(3) A 中元素都属于 B，B 中元素也都属于 A，所以 $A=B$.

问题 2 若 $A\subseteq S$，则 A 的元素都是 S 的元素，但 S 的元素不一定都是 A 的元素，那么 S 中不属于 A 的元素组成的集合叫什么呢？它如何用 A 与 S 来表示？

【例题 2】 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x>1\}$，集合 $B=\{x\mid x\geqslant -3\}$，求：(1) $\complement_U A$；(2) $\complement_U B$；(3) $\complement_U U$；(4) $\complement_U \varnothing$；(5) $\complement_U(\complement_U A)$.

解：因为全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x>1\}$，$B=\{x\mid x\geqslant -3\}$，

所以 (1) $\complement_U A=\{x\mid x\leqslant 1\}$.

(2) $\complement_U B=\{x\mid x<-3\}$.

(3) $\complement_U U=\varnothing$.

(4) $\complement_U \varnothing=U$.

(5) $\complement_U(\complement_U A)=\{x\mid x>1\}=A$.

1. 求补集时注意有无等号.
2. $\complement_U \varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U(\complement_U A)=A$.

问题 3 子集、全集、补集的应用.

【例题 3】 设集合 $A=\{0,1\}$，集合 $B=\{x\mid x\subseteq A\}$，则 A 与 B 的关系如何？

解：因为 $x\subseteq A=\{0,1\}$，所以 x 是 A 的子集，即 B 是由 A 的子集组成的集合，

所以 $B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

所以 $A\in B$.

【例题 4】 已知 $A=\{x\mid x^2+px+q=0\}$，$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$A\subseteq B$，求 p，q 满足的条件.

解：由题知 $B=\{1,2\}$. 因为 $A\subseteq B$，则

(1) 若 $A=\varnothing$，则方程 $x^2+px+q=0$ 无实根，则 $\Delta=p^2-4q<0$，即 $p^2<4q$.

(2) 若 $A=\{1\}$，则方程 $x^2+px+q=0$ 有两个相等的实根 1，由韦达定理得

$$\begin{cases} p=-(1+1)=-2, \\ q=1\times 1=1. \end{cases} \quad 即 \quad p=-2,q=1.$$

(3) 若 $A=\{2\}$，则方程 $x^2+px+q=0$ 有两个相等的实根 2，由韦达定理得

$$\begin{cases} p=-(2+2)=-4, \\ q=2\times 2=4. \end{cases} \quad 即 \quad p=-4,q=4.$$

(4) 若 $A=\{1,2\}$，则方程 $x^2+px+q=0$ 有两个不等的实根 1，2，由韦达定理得

$$\begin{cases} p=-(1+2)=-3, \\ q=1\times 2=2. \end{cases} \quad 即 \quad p=-3,q=2.$$

综上所述，p，q 满足的条件是

$$p^2<4q，或\begin{cases} p=-2, \\ q=1, \end{cases}或\begin{cases} p=-4, \\ q=4, \end{cases}或\begin{cases} p=-3, \\ q=2. \end{cases}$$

【例题 5】 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，满足 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

解：因为 $B\subseteq A$，则

(1) 若 $B=\varnothing$，有 $2m-1<m+1$，

所以 $m<2$.

(2) 若 $B\neq\varnothing$，有 $\begin{cases} m+1\geqslant -2, \\ 2m-1\leqslant 5, \\ m+1\leqslant 2m-1. \end{cases}$

所以 $2\leqslant m\leqslant 3$.

综上可知，$m\leqslant 3$.

若 $A\subseteq B$，则 A 可能是 $\varnothing$，或 $x\in A$ 则 $x\in B$ 两种情况. 其中 $A=\varnothing$ 易被忽略.

【例题 6】 已知全集 $U=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，若 $\complement_U A=\{0\}$，这样的实数 x

是否存在？若存在，求出 x；若不存在，请说明理由．

解：因为 $\complement_U A=\{0\}$，所以 $0\in U$．

所以 $x^3+3x^2+2x=0$，解得 $x=0$，或 $x=-1$，或 $x=-2$．

当 $x=0$ 时，$|2x-1|=1$，A 中已有元素 1，不符合集合元素的互异性；

当 $x=-1$ 时，$|2x-1|=3$，此时 $A=\{1,3\}$ 在 $U=\{1,3,0\}$ 中的补集是 $\{0\}$；

当 $x=-2$ 时，$|2x-1|=5$．但 $5\notin U$，不符合补集的定义．

所以实数 x 存在，它只能是 -1．

互动同步训练

双基在线

1．(1983 年全国高考题)若集合 $M=\{x\,|\,x\leqslant\sqrt{2}\}$，$a=11$，则下面结论中正确的是(　　)

A．$\{a\}\subset M$．　　B．$a\subset M$．　　C．$\{a\}\in M$．　　D．$a\notin M$．

2．(1988 年全国高考题)集合 $\{1,2,3\}$ 的子集总共有(　　)

A．7 个．　　B．8 个．　　C．6 个．　　D．5 个．

3．设集合 $M=\{x\,|\,x=2m,m\in Z\}$，$N=\{x\,|\,x=4n,n\in Z\}$，则 M，N 之间的关系是(　　)

A．$M=N$．　　B．$M\subseteq N$．　　C．$N\subsetneqq M$．　　D．$N\not\subseteq M$．

4．P，M，S 都是非空集合 U 的子集，且 $P=\complement_U M$，$M=\complement_U S$，则下列关系中正确的是(　　)

A．$P=M$．　　B．$P=S$．　　C．$S=M$．　　D．$P\subsetneqq S$．

5．若集合 $A=\{x\,|\,-3<x<5\}$ 与 $B=\{x\,|\,x<a\}$ 满足 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________．

6．(1) 满足 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d\}$ 的集合 A 有________________；

(2) 满足 $\{1,2,3\}\subsetneqq B\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 B 有________________．

拓展训练

7．空集 $\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 之间有什么区别与联系？

8．已知非空集合 P 满足：① $P\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；② 若 $a\in P$，则 $6-a\in P$．求符合上述条件的集合 P．

9．已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$．若 $A=\{b,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 和 b．

创新空间

10．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-5x+4=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2-ax+a-1=0\}$，且 $B\subseteq A$，求 a 的取值．

11．设 $A=\{x,y\}$，$B=\{1,xy\}$．若 $A=B$，求 x，y．

1.3 交集、并集

问题导引

问题 1 什么叫集合 A 与集合 B 的交集？

【例题 1】 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\mid x>2\}$，$C=\{x\mid 0\leqslant x<5\}$．求：(1) $A\cap B$；(2) $A\cap C$；(3) $A\cap\varnothing$；(4) $(\complement_U A)\cap A$．

解：如图 1－1 所示．

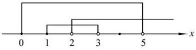


图 1－1

(1) $A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$．

(2) $A\cap C=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$．

(3) $A\cap\varnothing=A$．

(4) 由补集及交集定义知，

$(\complement_U A)\cap A=\varnothing$．

1. $A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$．
2. $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$．
3. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$．
4. $A\cap\varnothing=\varnothing$．
5. $(\complement_U A)\cap A=\varnothing$．

问题 2 什么叫集合 A 与集合 B 的并集？

【例题 2】 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\mid >2\}$，$C=\{x\mid 0\leqslant x<5\}$．求：(1) $A\cup B$；(2) $A\cup C$；(3) $A\cup\varnothing$；(4) $(\complement_U A)\cup A$．

解：如图 1－1 所示．

(1) $A\cup B=\{x\mid x\geqslant 1\}$．

(2) $A\cup C=\{x\mid 0\leqslant x<5\}$．

(3) $A\cup\varnothing=A$．

(4) $(\complement_U A)\cup A=\{x\mid x\geqslant 3$，或 $x<1\}\cup\{x\mid 1\leqslant x<3\}=U$．

1. $A\cup B=\{x\mid x\in A$，或 $x\in B\}$．
2. $A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$．
3. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$．
4. $A\cup\varnothing=A$．
5. $(\complement_U A)\cup A=U$．

问题 3 子集、补集、交集、并集的综合应用．

【例题 3】 已知 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{x\mid x\leqslant 5, x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{y\mid y^2-7y+6=0\}$．求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cap B)$，$\complement_U(A\cup B)$．

解：因为 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,6\}$，

所以 $\complement_U A=\{6\}$，$\complement_U B=\{2,3,4,5\}$，

所以 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\varnothing$，

$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{2,3,4,5,6\}$．

又 $A\cap B=\{1\}$，

1. $A\cap B\subseteq A\cup B$．
2. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$．
3. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$．

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$,

所以　$\complement_U(A\cap B)=\{2,3,4,5,6\}$,

$\complement_U(A\cup B)=\varnothing$.

【例题 4】 已知全集 $U=\{$小于 10 的自然数$\}$,其子集 A,B 满足 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$, $A\cap B=\{2\}$, $(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\}$,求集合 A 和 B.

解:因为 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$,所以 $\complement_U(A\cup B)=\{1,9\}$.

由图 1—2 表示如下:

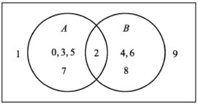


图 1—2

用图示研究有限集合的补集、交集、并集之间的关系,是一种简单、明了的方法.

所以　$A=\{0,2,3,5,7\}$, $B=\{2,4,6,8\}$.

【例题 5】 已知全集 $U=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$,集合 $A=\{-3,a^2,a+1\}$, $B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,其中 $a\in R$,若 $A\cap B=\{-3\}$.求 $\complement_U(A\cup B)$.

解:因为 $A\cap B=\{-3\}$,所以 $-3\in B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,

所以 $a-3=-3$,或 $2a-1=-3$,所以 $a=0$,或 $a=-1$.

当 $a=0$ 时, $A=\{-3,0,1\}$, $B=\{-3,-1,1\}$.

则 $A\cap B=\{-3,1\}$.这与已知 $A\cap B=\{-3\}$矛盾.所以 $a\neq 0$.

当 $a=-1$ 时, $A=\{-3,1,0\}$, $B=\{-4,-3,2\}$,则 $A\cap B=\{-3\}$,适合题意.

此时 $A\cup B=\{-4,-3,0,1,2\}$.

又 $U=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$,所以 $\complement_U(A\cup B)=\{-2,-1,3,4\}$.

互动同步训练

双基在线

1. 若集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=0\}$, $P=\{(x,y)\mid x-y=2\}$,则 $M\cap P$ 是(　　)

A. $(1,-1)$.　　B. $\{x=1\}\cup\{y=-1\}$.

C. $\{1,-1\}$.　　D. $\{(1,-1)\}$.

2. 已知 P,M 是非空集合,且 $P\neq M$,则必定有(　　)

A. $\varnothing\in P\cap M$.　　B. $\varnothing=P\cap M$.　　C. $\varnothing\subseteq P\cap M$.　　D. $\varnothing\subsetneqq P\cap M$.

3. (1986 年全国高考题)已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{3,4,5\}$, $B=\{1,3,6\}$,那么集合$\{2,7,8\}$是(　　)

A. $A\cup B$.　　B. $A\cap B$.　　C. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.　　D. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

4. (1995 年全国高考题)U 为全集,集合 $M\subset U$, $N\subset U$,若 $M\cap N=N$,则(　　)

A. $\complement_U M\supseteq\complement_U N$.　　B. $M\subseteq\complement_U N$.　　C. $\complement_U M\subseteq\complement_U N$.　　D. $M\supseteq\complement_U N$.

5. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$, $B=\{x\mid x<a\}$,且满足 $A\cap B=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是________.

笔　记

拓展训练

6．已知集合 $M=\{2,3,m^2+4m+2\}$，$P=\{0,7,m^2+4m-2,2-m\}$，满足 $M\cap P=\{3,7\}$，求集合 P．

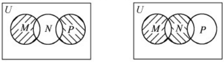
7．若集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{a^2,1\}$，满足 $A\cup B=\{1,3,a\}$，求实数 a 的值．

8．若集合 $A=\{x\mid -2<x<1,或\ x>1\}$，$B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，且满足 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，求 a，b 的值．

9．图中 M，N，P 是 U 的子集，写出阴影部分所表示的集合：

(1)______________；

(2)______________．



(1)　　(2)

第 9 题

10．全班 45 人，会打篮球的有 25 人，会打排球的有 20 人，既会打篮球又会打排球的有 18 人．那么，不会打篮球又不会打排球的有多少人？

创新空间

11．设集合 $A=\{x\mid x^2+px+15=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+q=0\}$，且 $A\cap B=\{3\}$．

求：(1) $p+q$；(2) A，B．

12．已知 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，满足 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 a 的值．

1.4 含绝对值的不等式解法

问题导引

问题 1　你已经知道，若 a 为正实数，方程 $|x|=a$ 的解为 $x=\pm a$，那么如何解 $|x|<a$ 及 $|x|>a$ 形式的不等式？

【例题 1】 解下列不等式：

(1) $|x|<3$；　(2) $|x|>3$．

当 $a\geqslant 0$ 时，

$|x|<a$ 的解集是 $\{x\mid -a<x<a\}$，　　(Ⅰ)

$|x|>a$ 的解集是 $\{x\mid x>a,或\ x<-a\}$，　(Ⅱ)

当 $a\leqslant 0$ 时，上面结论仍然成立．因为当 $a\leqslant 0$ 时，不等式 $|x|<a$ 的解集显然是空集，而此时 $-a<x<a$ 也表示空集，所以结论(Ⅰ)仍然成立；当 $a\leqslant 0$ 时，不等式 $|x|>a$ 的解集显然是实数集，而此时 $x>a$ 或 $x<-a$ 也表示实数集，所以结论(Ⅱ)仍成立．

$a\in R$ 时，

$|x|>a$ 的解集是 $\{x>a,或\ x<-a\}$，

$|x|<a$ 的解集是 $\{x\mid -a<x<a\}$．

解：(1) $|x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$．所以不等式 $|x|<3$ 的解集是 $\{x|-3<x<3\}$．

(2) $|x|>3 \Leftrightarrow x>3$，或 $x<-3$．所以不等式 $|x|>3$ 的解集是 $\{x|x<-3$ 或 $x>3\}$．

问题 2　你已会解 $|x|<a$ 和 $|x|>a$ 形式的不等式，那么如何解 $|ax+b|<c$ 和 $|ax+b|>c$ 形式的不等式？

【例题 2】　解不等式：(1) $|2x-3|<5$；　(2) $|2x-3|\geqslant 5$．

解：(1) 由不等式 $|2x-3|<5$ 可得

$$-5<2x-3<5,$$

整理，得 $-1<x<4$．

所以，原不等式的解集是

$$\{x|-1<x<4\}.$$

(2) 不等式 $|2x-3|\geqslant 5$ 可化为

$2x-3\leqslant -5$，或 $2x-3\geqslant 5$，

整理，得　$x\leqslant -1$，或 $x\geqslant 4$．

所以，原不等式的解集是

$$\{x|x\leqslant -1，或\ x\geqslant 4\}.$$

只需将 $|x|<c$ 和 $|x|>c$ 中的 x 用 $ax+b$ 代替，就可以将 $|ax+b|<c$ 转化为 $-c<ax+b<c$，将 $|ax+b|>c$ 转化成 $ax+b>c$，或 $ax+b<-c$，然后进一步解一元一次不等式，便得原不等式的解集．

问题 3　如何解形如 $c<|x\pm a|<b\ (b>c>0)$ 的不等式？

【例题 3】　解不等式：$1<|x+2|<4$．

解法 1：

$$1<|x+2|<4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2|<4, \\ |x+2|>1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4<x+2<4, \\ x+2>1，或\ x+2<-1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6<x<2, \\ x>-1\ 或\ x<-3. \end{cases} \Leftrightarrow -6<x<-3，或 -1<x<2.$$

所以原不等式的解集是

$\{x|-6<x<-3，或 -1<x<2\}$．

解法 2：根据绝对值的几何意义知，

原不等式等价为

$-4<x+2<-1$，或 $1<x+2<4$，

即 $-6<x<-3$，或 $-1<x<2$．

所以不等式的解集是

$\{x|-6<x<-3，或 -1<x<2\}$．

解形如 $c<|x\pm a|<b$ 的不等式，可以转化成不等式组解，也可以根据绝对值的几何意义解．

问题 4　你已会解含一个绝对值符号的不等式，形如 $|ax+b|+|cx+d|>m$（或 $<m$）的不等式又怎么解呢？

【例题 4】　解不等式：$|2x+6|+|x+1|>3$．

解：令 $2x+6=0$，$x+1=0$，得 $x=-3$，-1．

把实数集分为三部分：$x<-3$，$-3\leqslant x<-1$，$x\geqslant -1$．

所以原不等式等价为

$$\begin{cases} x<-3, \\ -2x-6-x-1>3, \end{cases} 或 \begin{cases} -3\leqslant x<-1, \\ 2x+6-x-1>3, \end{cases} 或 \begin{cases} x\geqslant -1, \\ 2x+6+x+1>3. \end{cases}$$

解得 $x<-\dfrac{10}{3}$，或 $-2<x<-1$，或 $x\geqslant -1$．

所以原不等式的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{10}{3}，或\ x>-2\right\}$．

【例题 5】　解不等式：$|x-1|+|x-3|<5$．

解法 1：令 $x-1=0$，$x-3=0$，得 $x=1$，3．把实数集分为三部分：$x<1$，$1\leqslant x<3$，$x\geqslant 3$．

笔 记

所以原不等式等价为

$\begin{cases} x<1, \\ -x+1-x+3<5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1\leqslant x<3, \\ x-1-x+3<5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x-1+x-3<5. \end{cases}$

解得 $-\frac{1}{2}<x<1$，或 $1\leqslant x<3$，或 $3\leqslant x<\frac{9}{2}$.

所以原不等式的解集是

$\left\{x \mid -\frac{1}{2}<x<1\right\} \cup \{x \mid 1\leqslant x<3\} \cup \left\{x \mid 3\leqslant x<\frac{9}{2}\right\}=\left\{x \mid -\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2}\right\}$.

解法 2：

由绝对值的几何意义知，$|x-1|$，$|x-3|$分别表示数轴上实数 x 与 1，3 对应点之间的距离，如图 1—3，当 $x=-\frac{1}{2}$，$\frac{9}{2}$时，$|x-1|+|x-3|=5$.

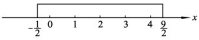


图 1—3

所以原不等式的解集为$\left\{x \mid -\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2}\right\}$.

解形如 $|ax+b|+|cx+d|>m$（或$<m$）的绝对值不等式，一般情况下是根据绝对值的定义去掉绝对值符号，转化为不含绝对值的不等式. 具体步骤如下：

(1) 找零点：令每个绝对值符号里的一次式为零，并求出相应的根；

(2) 分区间：把这些根在数轴上由小到大排序，并把实数集分为若干个区间；

(3) 分段解：在所分区间去掉绝对值符号得到不含绝对值的不等式，解这些不等式，求出解集；

(4) 并起来：取这些不等式解集的并集，就是原不等式的解集.

当 $a=c$时，用绝对值几何意义来解更为方便，如例题 5 中解法 2.

问题 5 如何解形如 $||x|+a|<b$ 的不等式？

解形如 $||x|+a|<b$(或$>b$)的不等式，应由外向内逐层去掉绝对值符号.

【例题 6】 解不等式：$||x|-2|<5$.

解：$||x|-2|<5 \Leftrightarrow -5<|x|-2<5$

$\Leftrightarrow -3<|x|<7$

$\Leftrightarrow |x|<7$

$\Leftrightarrow -7<x<7$.

所以不等式 $||x|-2|<5$ 的解集是 $\{x \mid -7<x<7\}$.

互动同步训练

双基在线

1. 不等式 $|5x-3|>0$ 的解集是(　　)

A. $\varnothing$.　　　　B. $\left\{x \mid x\in R，且 x\neq\frac{3}{5}\right\}$.

感　悟

C．R．　　　　D．$\left\{x \mid x>\frac{3}{5}\right\}$．

2．若不等式 $|4x+3|\leqslant a$ 的解集是空集，则 a 的取值范围是(　　)

A．$a<0$．　　B．$a\leqslant 0$．　　C．$a>0$．　　D．$a\geqslant 0$．

3．不等式 $|2x+7|<3$ 的解集是________．

4．不等式 $1\leqslant|x-2|\leqslant 7$ 的解集是________．

5．不等式 $3-|-2x-1|>0$ 的解集是________．

6．不等式 $||x|-1|<5$ 的解集是________．

7．不等式 $|x+2|-|x-3|<4$ 的解集是________．

8．不等式 $5-x>|x+1|$的解集是________．

拓展训练

9．已知 $A=\{x \mid |2x-1|>3\}$，$B=\left\{x \mid \left|x-\frac{1}{2}\right|<a\right\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的范围．

10．已知 $A=\{x \mid |x-3|<2\}$，$B=\{x \mid |2x-1|>1\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$．

11．已知 $|5x-3|<1$，化简：$|4x-1|+|3x-4|$．

创新空间

12．求 $|x+2|+|x-3|$的最小值．

13．解不等式：$x^2-4|x|-5>0$．(用两种方法．)

1.5 一元二次不等式解法

问题导引

问题1　我们学习过一元二次方程的解法，一元二次函数的图象．如何解一元二次不等式呢？

【例题1】　解下列不等式：

(1) $x^2+2x-48>0$；

(2) $-x^2+2x+3>0$；

(3) $x^2-4x+4<0$；

(4) $x^2-3x+5\geqslant 0$；

(5) $(x-3)(x-4)\geqslant 0$．

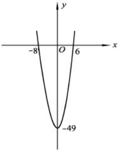


图 1−4

解：(1) 因为 $\Delta=4-4\times(-48)=196>0$，

所以方程 $x^2+2x-48=0$ 有两个不等的实根 $x_1=-8$，$x_2=6$．

所以一元二次函数 $y=x^2+2x-48$ 的图象如图 1−4 所示．

由图象可得不等式的解集是$\{x \mid x<-8$，或 $x>6\}$．

(2) 原不等式整理得 $x^2-2x-3<0$．

因为 $\Delta=(-2)^2-4\times(-3)=16>0$，

所以方程 $x^2-2x-3=0$ 有两个不等的实根 $x_1=3$，　$x_2=-1$．

笔 记

所以一元二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象如图 1—5 所示.

由图象可得不等式的解集是 $\{x\mid -1<x<3\}$.

(3) 因为 $\Delta=(-4)^2-4\times4=0$,

所以方程 $x^2-4x+4=0$ 有两个相等的实根 $x_1=x_2=2$.

所以一元二次函数 $y=x^2-4x+4$ 的图象如图 1—6 所示.

由图象可得不等式的解集是 $\varnothing$.

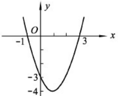


图 1—5

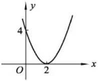


图 1—6

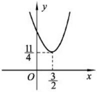


图 1—7

(4) 因为 $\Delta=(-3)^2-4\times1\times5=-11<0$,

所以方程 $x^2-3x+5=0$ 无实根.

所以一元二次函数 $y=x^2-3x+5$ 的图象如图 1—7 所示.

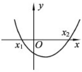
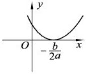
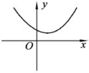
由图象可得不等式的解集是 R.

(5) 原不等式等价于

$\begin{cases} x-3\geqslant0, \\ x-4\geqslant0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-3\leqslant0, \\ x-4\leqslant0. \end{cases}$ 解得 $x\geqslant4$, 或 $x\leqslant3$.

所以不等式的解集为 $\{x\mid x\leqslant3$, 或 $x\geqslant4\}$.

当 $a>0$ 时，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ (或 <0) 与相应的一元二次方程、一元二次函数之间的关系如下表所示：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	有两个不等的实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	有两个相等的实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象			
不等式的解集 $ax^2+bx+c>0$	$\{x\mid x<x_1$, 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\mid x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

感　悟

由上可知,解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或<0)的一般步骤:

(1)化二次项系数为正数;

(2)确定判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号;

(3)若 $\Delta\geqslant0$,则求出该不等式对应的二次方程的根,若 $\Delta<0$,则对应的二次方程无实根;

(4)联系二次函数的图象得出不等式的解;

(5)若不等式是 $(x-x_1)(x-x_2)>0$(或<0)(x_1,x_2 是常数)形式,可直接写出它的解集.

问题 2　前面我们已会解分式方程,分式不等式如何解?

【例题 2】　解下列不等式:

(1) $\dfrac{x+5}{x-8}<0$;　　(2) $\dfrac{x-1}{2x+1}\geqslant0$;　　(3) $\dfrac{1-4x}{2x}>3$.

解:(1)分析:不等式的分子、分母异号.

解法 1:$\dfrac{x+5}{x-8}<0$ 的解集是不等式组 $\begin{cases}x+5>0,\\x-8<0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x+5<0,\\x-8>0\end{cases}$ 的解集的并集.

由 $\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x+5>0\\x-8<0\end{cases}\right\}=\{x\mid-5<x<8\}$,$\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}x+5<0\\x-8>0\end{cases}\right\}=\varnothing$,

得原不等式的解集是 $\{x\mid-5<x<8\}$.

解法 2:由 $\dfrac{x+5}{x-8}<0$ 可得 $(x+5)(x-8)<0$,

所以不等式的解集是 $\{x\mid-5<x<8\}$.

(2)由 $\dfrac{x-1}{2x+1}\geqslant0$ 得

$$\begin{cases}(x-1)(2x+1)\geqslant0,\\2x+1\neq0.\end{cases}$$

所以不等式的解集是

$$\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{1}{2},\text{或 }x\geqslant1\right\}.$$

(3)由 $\dfrac{1-4x}{2x}>3$ 可得

$$\frac{1-4x}{2x}-3>0,$$

变形,得 $(10x-1)x<0$,

所以不等式的解集是

$$\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{1}{10}\right\}.$$

解分子、分母为一元一次式且另一边为零的分式不等式时,根据分子、分母同号或异号,可以把分式不等式转化成整式不等式组[如(1)题的解法 1]或一元二次不等式[如(1)题的解法 2].但要注意:①分母不为零的条件;②当不等式的右边不为零时,要移项通分,转化成一边为零的情况,如(3).

问题 3　我们常遇到不等式中的系数含有字母.解含有字母系数的一元二次不等式时,应如何对字母进行讨论?

【例题 3】　解关于 x 的不等式:$56x^2+ax<a^2$.

解:原不等式可化为 $(7x+a)(8x-a)<0$.

方程 $(7x+a)(8x-a)=0$ 的两根为 $x_1=-\dfrac{a}{7}$,$x_2=\dfrac{a}{8}$.

由于 a 与 0 的大小关系不确定,所以 x_1,x_2 的大小关系也不定,所以要对 a 进行讨论.

当 $a>0$ 时,原不等式解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{a}{7}<x<\dfrac{a}{8}\right\}$;

当 $a=0$ 时,原不等式化为 $56x^2<0$,所以原不等式解集是 $\varnothing$;

当 $a<0$ 时,原不等式解集为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{a}{8}<x<-\dfrac{a}{7}\right\}$.

【例题 4】　关于实数 x 的不等式 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$

笔 记

(其中 $a\in R$)的解集依次为 A 与 B,求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

解:不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 可化为

$$-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2},$$

所以 $\frac{(a+1)^2}{2}-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a+1)^2}{2}$,即 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$.

不等式 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 可化为

$$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0.$$

由于 2 与 $3a+1$ 的大小关系随 a 的取值不同而不同,所以要对 2 与 $3a+1$ 的大小进行讨论.

当 $3a+1\geqslant 2$,即 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,不等式的解集是 $B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$;

当 $3a+1<2$,即 $a<\frac{1}{3}$ 时,不等式的解集是 $B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

又 $A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$,若使 $A\subseteq B$,则有:

当 $A=\varnothing$ 时,$a^2+1<2a$,即 $(a-1)^2<0$,这不可能,所以 $A\neq\varnothing$;

当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,有 $\begin{cases}a^2+1\leqslant 3a+1,\\ 2a\geqslant 2.\end{cases}$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$;

当 $a<\frac{1}{3}$ 时,有 $\begin{cases}a^2+1\leqslant 2,\\ 2a\geqslant 3a+1.\end{cases}$

解得 $a=-1$.

所以实数 a 的取值范围是

$$\{a|1\leqslant a\leqslant 3,\text{或 } a=-1\}.$$

解含有字母系数的不等式时,根据需要对字母参数进行分类讨论.例如解一元二次不等式时,与相应的一元二次方程的两根有关,当两根中含有字母时,要以判断两根大小为目标对字母进行分类讨论.

问题 4 一元二次不等式的应用.

【例题 5】 已知不等式 $ax^2-cx+b>0$ 的解集是 $\{x|-3<x<-2\}$,求不等式 $bx^2-cx+a>0$ 的解集.

解:由不等式 $ax^2-cx+b>0$ 的解集是 $\{x|-3<x<-2\}$ 得

$-2,-3$ 是方程 $ax^2-cx+b=0$ 的两根,且 $a<0$.

由韦达定理,得 $\begin{cases}(-3)+(-2)=\frac{c}{a},\\ (-3)\cdot(-2)=\frac{b}{a},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{c}{a}=-5,\\ \frac{b}{a}=6.\end{cases}$

不等式 $bx^2-cx+a>0$ 变形,得 $\frac{b}{a}x^2-\frac{c}{a}x+1<0$.

把 $\frac{c}{a}=-5,\frac{b}{a}=6$ 代入上式得 $6x^2+5x+1<0$,

解得 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$.

所以所求不等式的解集是 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}\right.\right\}$.

【例题 6】 实数 a 为何值时,代数式 $(a^2-3a+2)x^2+(a-1)x+2$ 的值恒大于零?

解:因为 $a^2-3a+2=0$ 时,$a=1$,或 $a=2$.

当 $a=1$ 时,$(a^2-3a+2)x^2+(a-1)x+2=2>0$ 恒成立;

当 $a=2$ 时,$(a^2-3a+2)x^2+(a-1)x+2=x+2$ 不恒大于零,所以 $a\neq 2$;

当 $a\neq 1$,且 $a\neq 2$ 时,要使 $(a^2-3a+2)x^2+(a-1)x+2>0$ 恒成立,只须