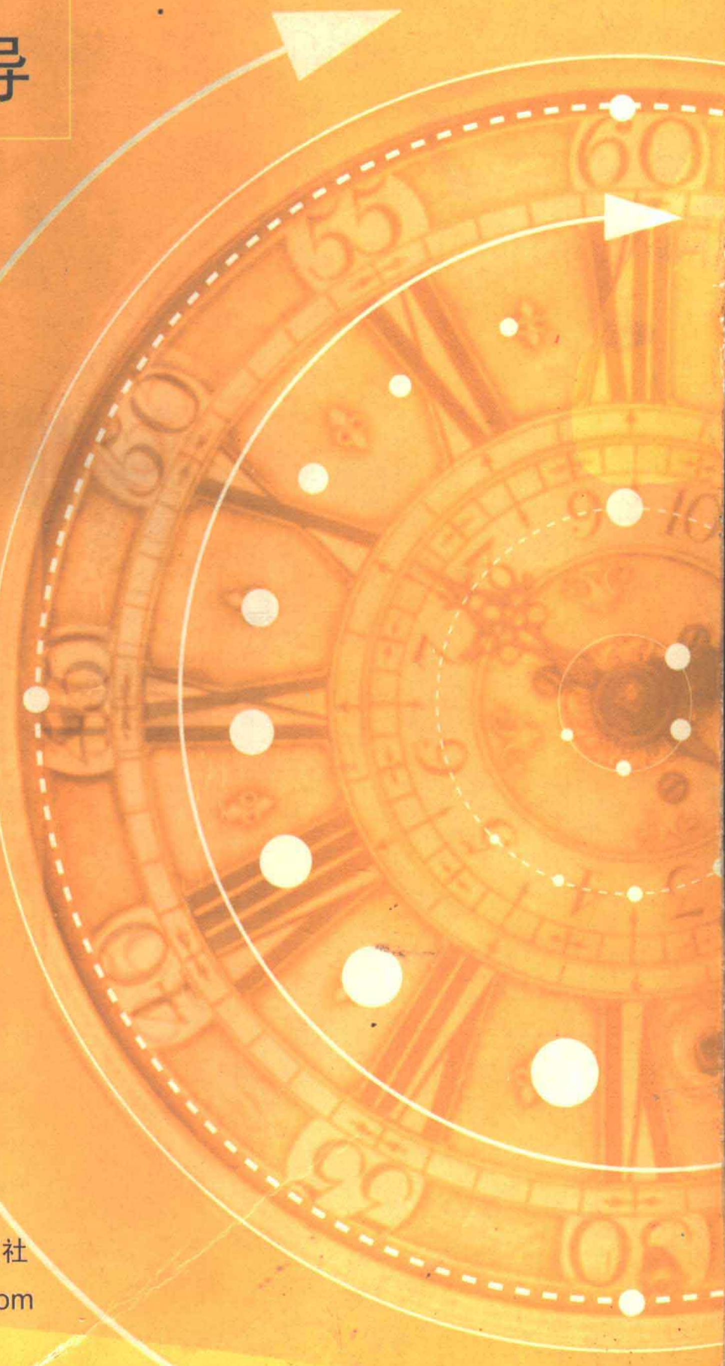
概率论与数理统计

学习指导

◉ 毛用才 编

- 要 点 提 示
- 典 型 例 题
- 习 题 选 解
- 自 测 练 习



西安电子科技大学出版社

http:// www.xduph. com

概率论与数理统计学习指导

西安电子科技大学出版社

2000

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/毛用才编.
—西安：西安电子科技大学出版社，2000.5
ISBN 7-5606-0857-4

Ⅰ.概… Ⅱ.毛… Ⅲ.① 概率论-高等学校-教学参考资料
② 数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 23991 号

责任编辑 臧延新 夏大平
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话 (029)8227828　　邮编 710071
http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销 新华书店
印　　刷 陕西画报社印刷厂
版　　次 2000 年 5 月第 1 版　2000 年 5 月第 1 次印刷
开　　本 850 毫米×1168 毫米 1/32　印张 11.5
字　　数 279 千字
印　　数 1～6 000 册
定　　价 13.00 元
ISBN 7-5606-0857-4/O·0042

(陕)新登字 010 号

内 容 简 介

本书是高等学校“概率论与数理统计”课程的一本学习辅导教材，可帮助本科生在学习“概率论与数理统计”课程时掌握解题规律和技巧，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为高等院校工科、理科各专业本科生以及自考本科生“概率论与数理统计”课程的辅导教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生的考生和自考本科生考前强化复习训练的指导书。同时，本书也可作为“概率论与数理统计”课教师的教学参考书。

前　言

“概率论和数理统计”是随着科学技术发展和生产实践需要而发展起来的一门重要学科，其在各个数学分支及各生产部门中有着广泛的应用。学习“概率论与数理统计”是当代理工科大学生及工程技术人员迫切而重要的任务。由于“概率论与数理统计”中概念的抽象性，方法的特殊性，计算的复杂性，使初学者甚感“概念难以理解，解题没有把握”；即使学完一遍，仍感迷迷糊糊，缺乏对整体内容的全面系统了解。为了帮助初学者克服上述困难，笔者根据多年来积累的教学实践经验，充分考虑学生的可接受性，以高等工科院校统编教材——浙江大学的《概率论与数理统计(第二版)》为蓝本，并在内容上作了适当的调整、补充、加深而编写成本书。

根据教学大纲所规定的范围，我们把概率论分成五章加以叙述：随机事件与概率，随机变量及其概率分布，二维随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理；把数理统计分成四章加以叙述：数理统计的基本概念，参数的点估计，参数的区间估计，假设检验。各部分的内容是依据“概率论与数理统计教学基本要求”编写的。每章由基本要求、要点提示、典型例题分析、习题选解、自测练习、参考答案和小结等七部分组成。要点提示部分对各章的重点、难点和应掌握的内

容作了全面系统的阐述，突出了重点内容、基本概念和基本方法。典型例题分析部分以发人思考的典型例题为背景，在求解之前作了若干分析，以深入浅出的论述方式，阐明其概念、定理、公式以及它们的应用。通过分析解题思路，阐明解题方法来帮助读者提高解题能力，这是本书的特色。这些例子大部分取材于历年研究生考试试题。在习题选解部分，对浙江大学编写的《概率论与数理统计(第二版)》(高等教育出版社出版)中的习题，选取其中有代表性的进行解答，供学生在解题时参考(题序号与原书相同)。希望通过这些题解的启发，让学生独立完成剩余部分的习题，以提高学生的解题能力。自测练习部分提供给学生自我测试的练习题，学生可通过自测练习检查自己对本章内容掌握的程度，在自测练习中除基本题外，还选编了少量略有提高的题目，供读者参考选用。另外，本书的例题与习题都是从现行的高等院校《概率论与数理统计》教材及历年工学、经济学硕士研究生入学考试试题中精选出来的，具有相当的代表性。

本书是高等学校“概率论与数理统计”课程的一本学习辅导教材，旨在帮助本科生在学习“概率论与数理统计”课程时掌握解题规律和技巧，提高分析问题和解决问题的能力。本书可作为高等院校工科、理科各专业本科生以及自考本科生“概率论与数理统计”课程的辅导教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生的考生和自考本科生考前强化复习训练的指导书。同时，本书也为“概率论与数理统计”课教师提供了一本教学参考书。

笔者力图给予读者在掌握“概率论与数理统计”的基本理论，训练解题技巧，提高解题能力等方面以一定的帮助。目前有不少“概率论与数理统计”的复习资料和模拟试题，但都是为学生提供模拟训练、应付考试的复习资料，是助长应试教育的手段，实不可取。本书则力求突破这一点。

“概率论与数理统计”是高等学校工科各专业的一门重要的基础理论课。希望本书能对读者深入学习“概率论与数理统计”课程起到帮助和指导作用。在本书的出版过程中，得到了西安电子科技大学出版社领导和理学院领导的热情支持，编辑夏大平对本书的审读与加工，认真细致，付出了辛勤劳动，在此深表谢意。

限于编者水平，缺点、错误在所难免，恳切希望广大读者对本书提出意见和建议，对不妥之处提出批评指正。

编　者

2000 年 1 月于西安

目　录

第一章

随机事件与概率

随机事件及其概率是概率论中最基本的概念。

一、基本要求

（1）了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算。

（2）正确理解随机事件的概率定义，熟练掌握概率的有关基本性质及概率的运算。

（3）掌握古典概型的三类问题：①抽球问题，②分房问题，③随机取数问题。

（4）掌握条件概率的概念，掌握与条件概率有关的三个公式：概率的乘法公式、全概率公式和 Bayes 公式。

（5）理解随机事件的独立性概念，掌握用事件独立性进行概率计算。

二、要点提示

1. 随机事件与样本空间

1）随机试验

对随机现象的观测或实验称为随机试验。随机试验具有以下

三个特性：

① 在相同条件下可以重复进行；

② 每次试验的可能结果不止一个，但事先能明确试验的所有可能的结果；

③ 进行某一次试验前，不能确定哪个结果会发生。

一般用字母 E，或 E_1，… 表示随机试验。

2）随机事件

在随机试验中可能发生也可能不发生的事情称为随机事件。

3）必然事件与不可能事件

在随机试验中必然会发生的事情称为必然事件；不可能发生的事情称为不可能事件。

4）基本事件与样本空间

随机试验的每一个可能的结果称为基本事件。基本事件是最简单而不可再分的随机事件。随机试验 E 的基本事件的全体所组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S 或 Ω。

注　必然事件是由试验的所有可能的试验结果构成的事件，不可能事件是不包含任何试验结果的事件。因此，以 S 表示必然事件，$\varnothing$表示不可能事件。

2. 事件之间的相互关系

1）包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 含于 B，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。

$A \subset B$ 等价于在 A 中的每一个基本事件必都在 B 中。

2）相等关系

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$。

3）互斥关系

如果 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互斥事件（或互不相容事件）。

4）互逆关系

如果在任一次试验中事件 A 与 B 有且仅有一事件发生，即 $A\cup B=S$，$AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互逆，而 B 称为 A 的逆事件，记为 $\overline{A}$。

注 （1）A、B 互逆$\Rightarrow A$、B 互斥；但反之不真，即 A、B 互斥未必互逆。

（2）A、B 互逆$\Leftrightarrow B=\overline{A}\Leftrightarrow A=\overline{B}$；而 $\overline{A}=$“A 不发生”。

（3）$\overline{(\overline{A})}=A$。

（4）对任一事件 A，有$\varnothing\subset A\subset S$。

3. 事件的运算

1）事件的和

表示事件 A 与 B 中至少有一个发生的事件，称为 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$。

类似地，表示 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生的事件称为 A_1，A_2，…，A_n 的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；表示 A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生的事件，称为 A_1，A_2，…，A_n，…的和事件，记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

2）事件的积

表示事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积事件，记为 AB 或 $A\cap B$。

类似地，表示事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件称为 A_1，

A_2，…，A_n 的积事件，记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap_{n=1}^{n} A_i$；表示 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生的事件称为 A_1，A_2，…，A_n，…的积事件，记为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。

3）事件的差

表示 A 发生而 B 不发生的事件，称为 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$。

4）事件的运算规律

事件的运算法则与集合的相应运算法则完全一致。

① 吸收律：若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$。

② 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$。

③ 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A(BC)=(AB)C$。

④ 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A\cup(BC)$
$$=(A\cup B)(A\cup C)。$$

⑤ (De Morgan)对偶律：

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\quad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n$$
$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n$$

4. 古典概型

1）定义

设 S 是随机试验 E 的样本空间，如果：

① 有限性——S 只含有有限个基本事件，

② 等可能性——每个基本事件发生的可能性相同，

则称这样的随机试验为古典概型随机试验。

2）古典概型中随机事件的概率计算公式

设古典概型随机试验的样本空间由 n 个基本事件组成，而随机事件 A 包含 k 个基本事件，则有

$$P(A)=\frac{A\text{所含基本事件数}}{S\text{所含基本事件总数}}=\frac{k}{n}$$

由此可见，为了求出古典概型中事件 A 的概率，只需求出基本事件的总数 n 以及事件 A 所含的基本事件个数 k。为此，弄清随机试验的全部基本事件是什么以及所讨论的事件 A 包含了哪些基本事件是非常重要的。

3）古典概型的三类问题

（1）抽球问题，这时关键要弄清是放回抽取还是不放回抽取，以及抽取的结果与抽取的次序有无关系；另外，如果样本空间中的元素考虑了次序，则事件中的元素也要考虑次序。

（2）分房问题，分房问题中的人和房子一般都是有个性的，处理这类问题是将人一个一个地往房间里面分配，处理类似问题时，要分清什么是“人”，什么是“房子”，一般不可颠倒。

（3）随机取数问题。

5. 概率的一般定义与性质

1）定义

随机试验 E 的每一个随机事件 A 发生的可能性大小的度量（数值）称为 A 发生的概率，记为 $P(A)$。它满足以下三条公理：

① 非负性：对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

② 规范性：$P(S)=1$。

③ 可列可加性：对于任一列两两互斥的事件 A_1，A_2，…，A_n，…，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)$$

2）性质

事件的概率具有以下性质：

（1）不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$。

(2) 逆事件概率计算公式 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

(3) 概率的加法公式。

对于任二事件 A、B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，特别地，如果 A、B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$(可加性)；

一般地，对于任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$

$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\quad(\text{多退少补公式})$$

特别地，如果 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\quad(\text{有限可加性})$$

(4) 概率的单调性与减法公式。若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)\quad(\text{减法公式})$$

$$P(A)\leqslant P(B)\quad(\text{单调性})$$

6. 条件概率及与条件概率有关的三大公式

1) 条件概率

设 A、B 为同一随机试验的两个事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B|A)\xlongequal{\text{def}}\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

注 条件概率满足概率的三条公理，具有一般概率的性质。

2) 概率的乘法公式

对任二事件 A、B，若 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$。

一般地，对于任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，若 $P(A_1A_2\cdots$

$A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

注　乘法公式与条件概率公式实际上是一个公式，要求$P(AB)$时，必须利用试验方法求得$P(B|A)$及$P(A)$；反之，要求$P(B|A)$时，必须知道$P(A)$与积事件AB的概率$P(AB)$。在解决实际问题时，不要把求$P(AB)$的问题误认为是求$P(B|A)$的问题。

3) 全概率公式

如果事件组$B_1, B_2, \cdots, B_n$满足：

① $B_1, B_2, \cdots, B_n$两两互斥，且$P(B_k)>0(k=1, 2, \cdots, n)$，

② $\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k=S$，

则对任一事件A，有

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)\quad(\text{全概率公式})$$

运用全概率公式的关键是找出满足①、②两条件的事件组。该事件组称为完备事件组或S的一个划分。当直接计算$P(A)$较为困难，而$P(B_k)$、$P(A|B_k)(k=1, 2, \cdots, n)$的计算较为简单时，可利用全概率公式计算$P(A)$。

4) 贝叶斯(Bayes)公式(逆概公式)

设事件组$B_1, B_2, \cdots, B_n$满足全概率公式的①、②两条，则对任一事件A，当$P(A)>0$时，有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)}$$

$$i=1, 2, \cdots, n(\text{Bayes 公式})$$