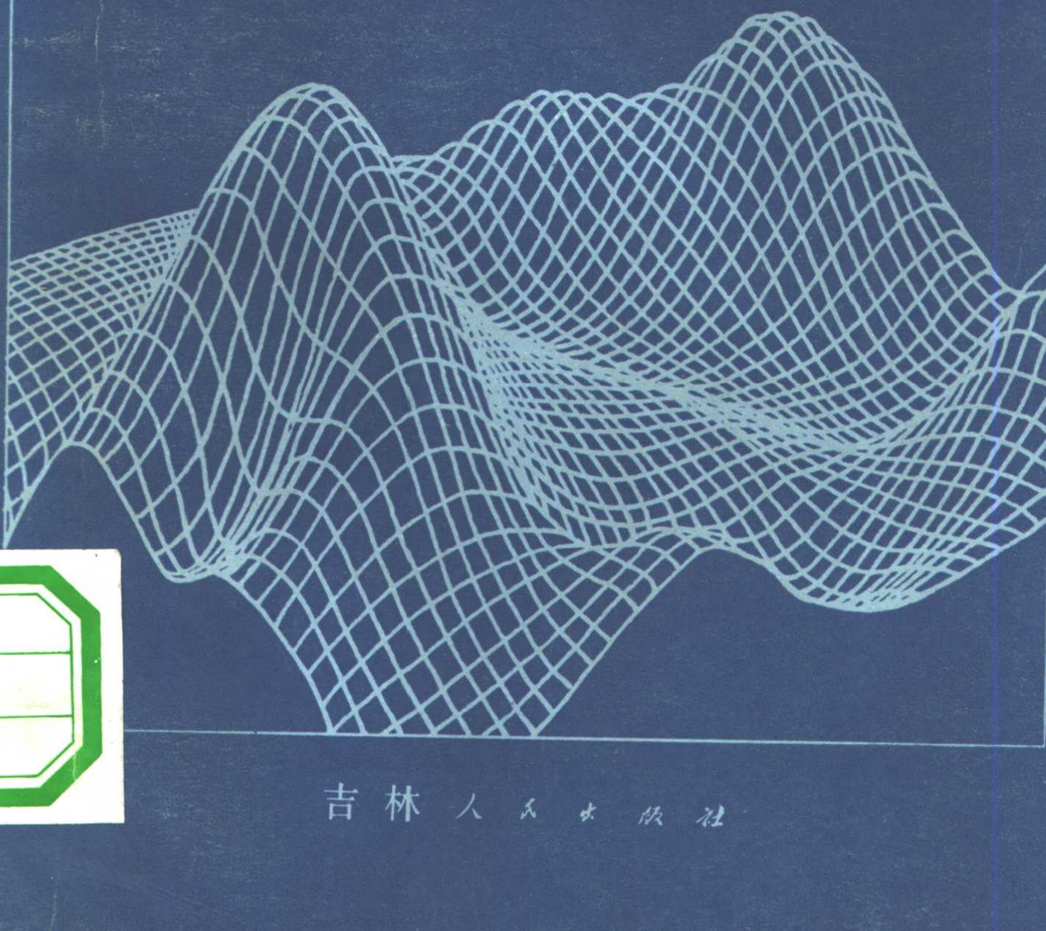
概率论
例题与习题

沈恒范　罗舜英编



吉林人民出版社

概率论例题与习题

沈恒范　罗舜英　编

吉 林 人 民 出 版 社

概率论例题与习题

沈恒范　罗舜英　编

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　11½印张　2插页　254,000字

1981年12月第1版　1981年12月第1次印刷

印数：1—20,830册

统一书号：13091·89　定价：1.04元

内 容 提 要

本书包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、大数定律等概率论的基本知识方面的500多道例题和习题。

前　言

在我国社会主义现代化建设中，随着科技事业的发展，概率论在工农业生产和科学技术中的应用日益广泛．

初学概率论的读者在解答概率论的习题时往往感到一定的困难，这是因为概率论的解题方法比较不容易掌握的缘故．编写本书的目的就在于从解答概率论习题的思路及方法上给予读者以指导和帮助，从而提高读者应用概率论的知识解决各种实际问题的能力．

在本书的每节中，都有概率论的基本内容（如定义、定理、公式等）的简要叙述，较多的例题及解法示范，以及大量的习题．本书选编的习题都附有答案，较难的习题则给以必要的提示甚至解答，但是读者在解题前应尽量不看这些提示或解答，争取自己独立地完成．

本书主要是为高等工科院校的教师和学生编写的教学参考书，也可以作为高等理科及师范院校的师生、工程技术人员、中等学校教师的参考书籍．

编写本书的过程中，曾得到吉林工业大学数学教研室的同志们的支持和帮助，谨致以诚挚的谢意．

限于编者的水平，本书一定存在不少缺点和错误，希望读者批评和指正。

编　者

一九八〇年五月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章 随机事件及其概率

§1 随 机 事 件

基 本 内 容

概率论是研究随机现象的规律性的科学。

随机试验就是一定的综合条件的实现，假定这种综合条件可以任意地重复很多次。

随机试验的结果中所发生的现象叫做事件。

如果在试验的结果中，某事件一定发生，则这事件叫做必然事件，用字母U表示.

如果在试验的结果中，某事件一定不发生，则这事件叫做不可能事件，用字母V表示。

在试验的结果中，可能发生、也可能不发生的事件叫做随机事件，用字母A，B，C，……表示.

事件之间的关系如下：

（1）如果事件A的发生导致事件B的发生，则称事件B包含事件A，也称事件A包含于事件B，记作 $B\supset A$或$A\subset B$.

（2）如果事件B包含事件A，且事件A包含事件B，即事件A与B中任一事件的发生将导致另一事件的发生，则称事件A与B相等，记作$A=B$。

（3）“二事件A与B中至少有一事件发生”这一事件叫做事件A与B的和，记作$A\cup B$.

“n个事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一事件发生”这一事件叫做事件A_1，A_2，…，A_n的和，记作$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

（4）“二事件A与B都发生”这一事件叫做事件A与B的积，记作$A\cap B$或AB.

“n个事件A_1，A_2，…，A_n都发生”这一事件叫做事件A_1，A_2，…，A_n的积，记作$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$或$A_1A_2\cdots A_n$.

（5）如果在试验的结果中，二事件A与B不可能同时发生，即$AB=V$，则称事件A与B是互不相容的（或互斥的）.

如果在试验的结果中，n个事件A_1，A_2，…，A_n中任何两个事件不能同时发生，即$A_iA_j=V$（$1\leqslant i<j\leqslant n$），则称这$n$个事件是互不相容的（或互斥的）.

n个互不相容的事件A_1，A_2，…，A_n的和，通常记作$A_1+A_2+\cdots+A_n$，简记为$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$。

（6）如果在试验的结果中，n个事件$A_1, A_2, \cdots$，A_n中至少有一个事件发生，即$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=U$，则称这$n$个事件构成完备群。

（7）如果二事件A与B是互不相容的，且构成完备群，即在试验的结果中，二事件A与B有而且仅有一事件发生，即

$$A+B=U,\qquad AB=V.$$

则称事件A与B是对立的或互逆的，也称B是A的逆事件（或A是B的逆事件），记作$B=\bar{A}$，（或$A=\bar{B}$）.

例 题

例 1.1 如果$A\subset B$，则$A\cup B=?$ $AB=?$

解 设事件A表示点随机地落在图 1 的小圆内，事件B表示点随机地落在图 1 的大圆内，则有$A\subset B$，于是

$$A\cup B=B,\quad AB=A.$$

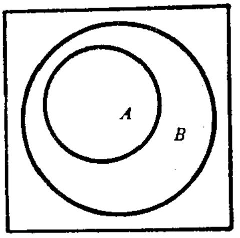


图 1

例 1.2 设试验是让点随机地落在矩形区域内，事件A表示点落在左边的圆内〔图2(a)〕，事件B表示点落在右边的圆内〔图2(b)〕，试作图说明事件$A\cup B$，AB，

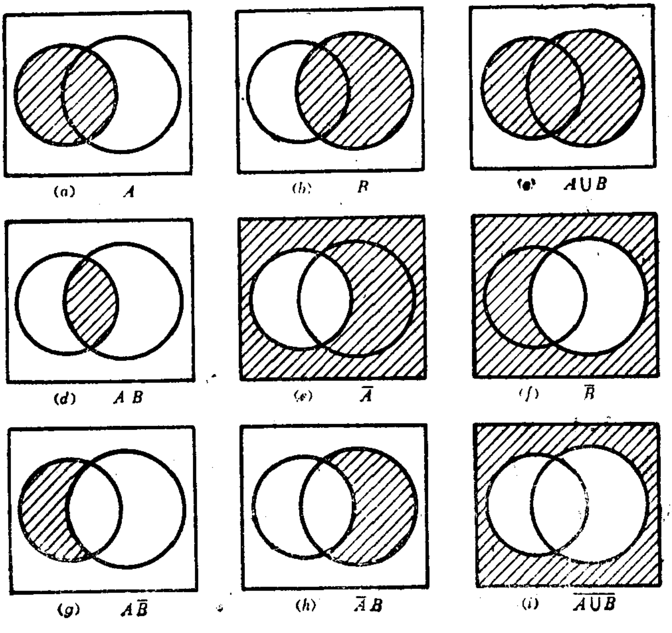


图 2

$\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\overline{B}$，$\overline{A}B$及$\overline{A\cup B}$分别表示什么？

解 事件$A\cup B$表示随机点落在任一圆内〔图2(c)〕；

事件AB表示随机点落在二圆的公共部分内〔图2(d)〕；

事件$\overline{A}$表示随机点落在左圆之外〔图2(e)〕；

事件$\overline{B}$表示随机点落在右圆之外〔图2(f)〕；

事件$A\overline{B}$表示随机点落在左圆之内，但在右圆之外〔图2(g)〕；

事件$\overline{A}B$表示随机点落在右圆之内，但在左圆之外〔图2(h)〕；

事件$\overline{A\cup B}$表示随机点落在二圆之外的区域内〔图2(i)〕。

例 1.3 证明：（1）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；

（2）$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

证 （1）事件$A\cup B$表示二事件A与B中至少有一事件发生，它的逆事件就是A与B都不发生，即$\overline{A}\cap\overline{B}$。所以

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

（2）设$\overline{A}=C$，$\overline{B}=D$，则$\overline{C}=A$，$\overline{D}=B$. 根据已证明的（1），可知

$$\overline{C\cup D}=\overline{C}\cap\overline{D},$$

即
$$\overline{\overline{C}\cap\overline{D}}=C\cup D,$$

即
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

例 1.4 化简$(A\cup B)(A\cup C)$。

解 $(A\cup B)(A\cup C)=AA\cup AB\cup AC\cup BC$。

因为 $AA=A$，$AB\cup AC\subset A$.

所以 $AA\cup AB\cup AC=A$.

因此 $(A\cup B)(A\cup C)=A\cup BC$。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

习　题

1.1　设A，B，C表示三个随机事件，试将下列事件用A，B，C表示出来：

（1）仅A发生；

（2）A，B，C都发生；

（3）A，B，C都不发生；

（4）A，B，C不都发生；

（5）A，B，C中至少有一事件发生；

（6）A，B，C中恰有一事件发生；

（7）A不发生，而B，C中至少有一事件发生；

（8）A，B，C中至少有二事件发生；

（9）A，B，C中不多于一事件发生.

1.2　用作图的方法说明下列等式的正确性：

（1）$A \cup B = A \cup \overline{A} B$；

（2）$A \cup B \cup C = A \cup \overline{A} B \cup \overline{A}\,\overline{B} C$；

（3）$(A \cup B) C = A C \cup B C$；

（4）$(A \cup C)(B \cup C) = (A B) \cup C$.

1.3　指出下列各题哪些正确？哪些不正确？

（1）$\overline{A B} = \overline{A}\,\overline{B}$；

（2）$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

（3）$(\overline{A \cup B}) C = \overline{A}$；

（4）$(A B)(A \overline{B}) = V$；

（5）若$A \subset B$，则$\overline{B} \subset \overline{A}$；

（6）若$(A C)(B C) = V$，则$A B = V$.

1.4　化简下列各式：

（1）$(A \cup B)(A \cup \overline{B})$；

（2）$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$.

1.5 袋中有十个球，分别编有1至10共十个号码．从其中任取一个球，设事件A表示“取得的球的号码是偶数”，事件B表示“取得的球的号码是奇数”，事件C表示“取得的球的号码小于5”．则

（1）$A\cup B$，（2）AB，（3）$\overline{C}$，（4）$A\cup C$，

（5）AC，（6）$\overline{A}\,\overline{C}$，（7）$\overline{B\cup C}$，（8）$\overline{BC}$，

分别表示什么事件？

1.6 随机点落在区间$[a,b]$上这一事件记作$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$．设$U=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，$A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$，则

（1）$A\cup B$，（2）AB，（3）$\overline{A}$，（4）$A\overline{B}$

分别表示什么事件？

1.7 任取一个三位数，设事件A表示“取出的数能被5整除”，事件B表示“取出的数最后一个数字是5”，问$A\overline{B}$表示什么事件？

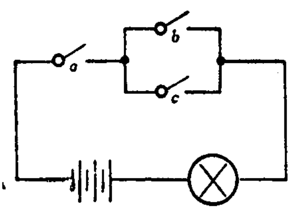


图3

1.8 如图3所示的电路中，设事件A，B，C分别表示继电器接点a，b，c闭合，事件D表示“指示灯亮”，试说明A，B，C，D之间的关系．

1.9 已知一批产品中有3个次品，从这批产品中任取5个产品来检查，设事件A_i表示取出的5个产品中恰有i个次品（$i=0,1,2,3$），问

（1）事件A_0，A_1，A_2，A_3是否互不相容？

（2）事件A_0，A_1，A_2，A_3是否构成完备群？

（3）设事件B表示“取出的5个产品中有次品”，试用

A_0，A_1，A_2，A_3表示B。

1.10　袋中有9个白球和1个红球，每次从其中任取一个球，直至取得红球为止。以A_i表示"第i次取得红球"，问共有哪些事件构成互不相容的完备群？如果

（1）每次取出的球不再放回去；

（2）每次取出的球仍放回去。

§2　随机事件的频率　概率的统计定义

基 本 内 容

设随机事件A在n次试验中发生了m次，则比值$\frac{m}{n}$叫做随机事件A的频率，记作$W(A)$：

$$W(A)=\frac{m}{n}.$$

在不同的试验序列中，当试验次数n充分大时，随机事件的频率常在一个确定的数字附近摆动，这种性质称为随机事件频率的稳定性。

概率的统计定义：刻划随机事件A在试验中发生的可能性大小的、小于1的正数叫做随机事件A的概率，记作$P(A)$。

例　　题

例2.1　在每一个试验序列中，抛掷钱币500次，记录国徽向上（设为事件A）的次数如下：

试验序列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
频数m	251	249	256	253	251	246	244	258	262	247

试计算国徽向上的频率，并估计其概率。

解 在第一个试验序列中，

$$W(A)=\frac{251}{500}=0.502,$$

其余各序列的频率如下表：

试验序列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
频数 m	251	249	256	253	251	246	244	258	262	247
频率 $W(A)$	0.502	0.498	0.512	0.506	0.502	0.492	0.488	0.516	0.524	0.494

可以认为国徽向上的概率 $P(A)=0.5$。

例 2.2 证明任何随机事件的概率介于 0 与 1 之间。

证 设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则

$$0\leqslant m\leqslant n.$$

所以

$$0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1.$$

即

$$0\leqslant W(A)\leqslant 1.$$

所以

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

习 题

2.1 某人掷一颗骰子2000次，结果“1点”出现319次，“2点”出现338次，“3点”出现339次，“4点”出现329次，“5点”出现341次，“6点”出现334次，求各种点数

出现的频率。

2.2　袋中装有 4 个白球和 2 个黑球，从袋中任取一个球，观察其颜色后再放回袋中。如此继续进行，共取 600 次，得数据如下表：

n	100	200	300	400	500	600
m	69	139	205	268	337	401

其中 n 为取球总次数，m 为取得白球的次数，分别计算在 100，200，…，600 次试验中取得白球的频率。

2.3　抽样检查时，在一批产品中任取 2500 件产品检查，发现次品的件数如下表：

批　　号	1	2	3	4	5	6	7	8
次 品 数	157	151	156	143	151	149	160	153

计算各批产品中次品出现的频率。

2.4　某地区某年出生的婴儿的性别统计如下表：

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
男　孩	374	355	402	417	411	394	396	380	371	351	339	376
女　孩	354	341	387	371	378	367	362	360	349	339	316	337
总　数	728	696	789	788	789	761	758	740	720	690	655	713

试求各月份和全年男孩出生的频率。

§ 3 概率的古典定义

基 本 内 容

如果试验时，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中每一事件发生的可能性在客观上是完全相同的，则称这些事件是等可能性的.

如果试验时，若干个随机事件构成互不相容且等可能性的完备群，则这些事件叫做试验的基本事件.

概率的古典定义：设试验的所有可能结果可以表为由N个互不相容且等可能性的事件构成的完备群，而其中M个事件是包含于随机事件A的（即这M个事件中任一事件发生将导致随机事件A的发生），则随机事件A所包含的基本事件数M与基本事件的总数N的比值叫做随机事件A的概率，记作$P(A)$：

$$P(A)=\frac{M}{N}.$$

例 题

例 3.1 随机地取一整数，求它的平方的个位数字是 4 的概率.

解 设随机数$\xi=a+10b+\cdots$，则

$$\xi^2=a^2+20ab+100b^2+\cdots.$$

由此可见，ξ^2的个位数字仅与ξ的个位数字a有关.

因为ξ是随机取的，a可以是 0，1，2，…，9 这十个数字中的任一个数字，并且是等可能的．所以基本事件的总数

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com