数学

中学生探索学习丛书

数形思辨

主编　苏维宜

TAN SUO XUE XI

江苏科学技术出版社

数 学

数形思辨

TAN SUO XUE XI

中学生探索学习丛书

主编　苏维宜

江苏科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数形思辨／苏维宜主编．—南京：江苏科学技术出版社，2000.9

（中学生探索学习丛书）

ISBN 7-5345-3200-0

Ⅰ．数… Ⅱ．苏… Ⅲ．数学-青少年读物 Ⅳ．01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 46578 号

中学生探索学习丛书·数学

数形思辨

主　　编	苏维宜
责任编辑	许礼光　钱　亮
出版发行	江苏科学技术出版社 （南京市湖南路 47 号，邮编：210009）
经　　销	江苏省新华书店
照　　排	南京展望照排印刷有限公司
印　　刷	南京通达印刷厂
开　　本	850mm×1168mm　1/32
印　　张	7
字　　数	180 000
版　　次	2000 年 9 月第 1 版
印　　次	2000 年 9 月第 1 次印刷
印　　数	1—6 000 册
标准书号	ISBN　7—5345—3200—0/O·136
定　　价	9.50 元

写在前面

“路曼曼其修远兮，吾将上下而求索”，几千年前，我们的先人就发出了如此体现人之生命价值的慨叹。综观人类历史的发展，每一个足迹，都是以探索为前提的。正是因为人有了探索之精神和勇气，人的生命才不同于一般的生命，人才成为万物之灵。探索，使我们在有形的世界里，领略到了无限的风光。

如今的时代，是以人的素质发展为主题的时代，对人的探索精神提出了前所未有的要求。由传统因袭下来的“模式化”教育，已不能适应信息时代对人成长的需要。提高国民的素质，成为当务之急。素质的一个综合性的体现就是科学素养，即探索事物的心理品质。科学可以塑造人类思维和感觉的模式，并使他们的行为受到微妙的影响，而“微妙的影响”就是科学探索的精神。这种精神，应当从人的幼时开始培养。青少年更应当有意识地在探索学习中，塑造创新的个性，投入创新的世界，参与创新的竞争。

《中学生探索学习丛书》抖落“应试”的尘土，带着丝丝沁人心脾的清新，向中学生走来！

本套丛书立足课内知识，用心在课外探索，以中学各年级已开设的主要课程为线索，适应教育部关于中学各学科新教学大纲的思路，以“四新”（新材料、新观点、新视野、新发现）、百家争鸣、热门话题为基本架构，反映各学科研究领域中多元的、辩证的、前沿的观点、思想和方法等，为研究性学习提供了丰富的背景材料，从而引导学生进行知识创新、思想创新、方法创新。

博学资深的院士，才思敏捷的年轻博士，为中学生奉献了他们的学识、才华和智慧，也正因为他们的强强联手，还给本套丛书增加了知识含量和欣赏品味。

拥有《中学生探索学习丛书》，你一定会鼓起探索的勇气，进入课本之外的大千世界、未知天地！

我们期待着！

江苏科学技术出版社
江苏人民出版社
2000 年 9 月

前　言

古往今来多少杰出人物为数学科学写下了精辟的论断和倾心的赞美,"科学之女王""人类智慧王冠上最灿烂的明珠""整理出宇宙秩序的科学"……但最确切的是卡尔·马克思的话:"一门科学,只有当它成功地运用数学时,才能真正臻于完美."

数学,是一切科学的基础,是人类认识世界和改造世界强有力的工具.无论你以后选择什么研究方向,从事什么职业,都不可能不遇到数学,不可能不运用数学.这就意味着,应当抓住所有的机会学好数学!

数学,是一门高度抽象的科学,正是它的高度抽象,为我们提供了智慧与思维的源泉,清新甘甜,涌流不断.傍着源泉,宛若享受,这种享受不仅可以从学习和思考中得到,而且可以从对数学的深入研究中领会,更能从使用数学探索自然奥秘中满足.可以想象,当开普勒面对一大堆行星观测数据,进行各种计算,一个个不眠之夜悄悄地流逝,经过九年的苦战,终于使杂乱无章的数字显出它的和谐性——行星运动三定律,使自己成为"宇宙的立法者",他是何等激动、惊叹!

数学是美丽的,数字是奥妙的,数学思维是精辟的,数学猜想是神奇的……诗人缺乏词句赞叹数学的美丽,画家缺乏绚彩构思数学的奥秘,舞蹈家缺乏妙姿展示数学思维的风采,歌唱家缺乏韵律高吭数学猜想的神奇.只有学习过数学、研究过数学、

应用过数学的人，才能真正体会到数学的博大精深，感受到数学的美之所在，体会到数学中的取之不尽、用之不竭.

学习数学的思维和精辟，享受数学的智慧和美丽，使用数学的方法和定理，探索宇宙的奥秘和规律，乐在其中，其乐无穷！孰不知，学习与享受，使用与探索，所获得的每一点点进步，带来的是更自在、更美妙的感觉，面对的是更深远、更广博的神秘.这难道不是最激动人心的幸事吗？

数学无可置疑的地位和作用与它自身的深度和难度永远是并存的.数学工作者有义务帮助人们学习数学、理解数学、使用数学，把数学的理论和应用、深度和难度揭示出来，这个义务是光荣的、神圣的.在这套包括数学、物理、化学、生物、哲学、经济、法律、历史、地理、文学、心理等学科的系列丛书——《中学生探索学习丛书》中，我们借一席之地，介绍数学科学的几个学科分支和其中的热门课题，以及它们的新思想、新理论、新方法、新技巧，并通过简短的篇幅，极力揭示数学科学的思维亮点、学科特征、未来发展，希望能达到提高读者的数学兴趣、数学素质、数学悟性和数学思维能力的目的，更希望使新千年的建设者对数学科学的内容、意义和发展有一个初步的了解.

本书尽力以中学生的数学知识作为起点，向有一定深度和难度的数学领域过度，并尽力做到深入浅出.只要读者耐心阅读、认真思考、积极探索，定能使自己在知识面和思维能力方面达到一个新的高度.

数学科学，同一切科学一样，循序渐进、永不停息.只有掌握数学科学的理论和方法，才能学以致用；只有了解数学科学研究的思路和成果，才能吸收精华；只有懂得数学科学的发展历程，才能不断创新、永远前进，也只有在中学时代就具有这样素质的年轻人，才能肩负时代赋予的重任.

丛书策划：苏教言
数学分册策划：陈志廉
数学分册科学顾问：李大潜(院士)

目　录

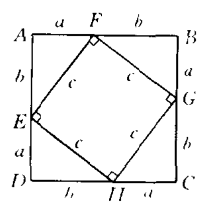
举世闻名的费马大定理

——历时358年的超级难题是谁解决的

数学史上第一个漂亮的定理便是大家熟知的下述结果:

直角三角形两条直角边长度的平方和等于斜边长度的平方.

古代中国人把较短的那个直角边叫勾,较长的直角边叫股,斜边叫弦.因此上述定理叫做勾股弦定理(也简称勾股定理).据《周髀算经》记载,公元前1100年左右商高就意识到了这个定理,中国人也称它为商高定理.古希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras)在公元前6世纪从逻辑上严格证明了这一定理,于是此定理在西方被称为毕达哥拉斯定理.



大家可能一时记不得如何证明这一定理的,下面我们给出一个有趣的证明(由18世纪辛卜逊(Simpson)提出),相信读者看后再也忘不了.

如右图,正方形 $EFGH$ 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积减去4个直角边分别为 a、b 的直角三角形的面积,故

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\times\frac{1}{2}ab = a^2 + b^2.$$

中国人早就知道有勾 3 股 4 弦 5 的直角三角形，$3^2+4^2=5^2$，这表示 3,4,5 是方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解. 能否求出方程 $x^2+y^2=z^2$ 的所有整数解呢？由于

$$(2n)^2=4n^2 \quad 且 \quad (2n+1)^2=4n(n+1)+1,$$

偶数的平方是 4 的倍数，奇数的平方被 8 除余 1(注意 n 与 $n+1$ 中必有一个为偶数). 如果 x,y 均为奇数，则 x^2+y^2 被 8 除余 $1+1=2$，这不可能是个平方数. 因此整数 x,y,z 适合 $x^2+y^2=z^2$ 时，x,y 中必有一个是偶数. 下面我们就假设 y 为偶数进行讨论.

可以证明，方程 $x^2+y^2=z^2$ (y 为偶数)的整数通解为

$$x=k(m^2-n^2),\ y=2kmn,\ z=k(m^2+n^2),$$

这里参数 k,m,n 为整数.

在下表中，通过让 $k=1$ 并取一些特定的 m,n 值，我们列出了相应的 x,y,z.

	$m=2$ $n=1$	$m=3$ $n=2$	$m=4$ $n=1$	$m=4$ $n=3$	$m=5$ $n=2$	$m=5$ $n=4$	$m=6$ $n=1$	$m=6$ $n=5$
$x=m^2-n^2$	3	5	15	7	21	9	35	11
$y=2mn$	4	12	8	24	20	40	12	60
$z=m^2+n^2$	5	13	17	25	29	41	37	61

一个正整数的平方可能是两个正整数的平方和. 那么对整数 $n>2$，一个正整数的 n 次方能否表示成两个正整数的 n 次方之和呢？注意

$$3^3+4^3+5^3=6^3,$$

但我们却找不到正整数 x,y,z 使得 $x^3+y^3=z^3$.

数论之父费马(Fermat)的正式职业是律师,他利用业余时间研究数论.1637年费马在研读希腊数学家丢番图(Diophantus)著作《算术》的拉丁译本时,作出下述惊人断言.

费马大定理:对 $n=3,4,5,\cdots$,方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解.

费马在那本书的页边空白处写道:"我有一个对这命题的十分美妙的证明,但此处空白太小,写不下."费马辞世后人们始终未能从他手稿中找出那个"美妙的证明".费马大定理以其简单深刻震惊世界,多次受到重金悬赏征解.

费马在给梅森(Mersenne)的信中,粗略地指出如何用他的无穷递降法证明 $x^4+y^4=z^4$ 无正整数解.由此对正整数 n,方程 $x^{4n}+y^{4n}=z^{4n}$ 没有正整数解.整数 $n>2$ 不是4的倍数时必有奇素因子 p,于是由 $x^p+y^p=z^p$ 无正整数解可推出 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解,因此剩下的便是要证 p 为奇素数时,方程 $x^p+y^p=z^p$ 无正整数解.这里的素数是指:大于1的整数 p,如果它写成两个正整数之积只有一种方式,$p=1\times p$.

x,y,z 均非 p 倍数时,称为第一情形,x,y,z 之一被 p 整除的情形称第二情形.根据欧拉(Euler)的想法,可证费马大定理对指数 $p=3$ 正确.1847年德国数学家库默尔(Kummer)通过引入所谓的分圆域,成功地证明费马大定理对一大批素指数 p 成立,更重要的是这项工作促进了代数数论的诞生.

费马大定理,这个头号数学难题,引来无数英雄竞折腰.18、19世纪几乎所有著名的数学家都尝试过攻克费马大定理,结果一个个败下阵来,没有人能完整地证明这一定理.于是许多人怀疑费马本人给出的大家见不到的证明可能是错的.

到了20世纪,博大精深的代数几何学诞生,并迅速地发展起来.1983年法国数学家法尔廷斯(Faltings)证明了代数几何中

著名的莫德尔(Mordell)猜想,由此可推出 $n \geqslant 4$ 时方程 $x^n + y^n = z^n$ 的正整数解中使得 x, y, z 没有大于 1 公因子的只有有限个!(注意,$x^n + y^n = z^n$ 时,显然 $(kx)^n + (ky)^n = (kz)^n$.)这项突出工作使法尔廷斯获得了有数学界"诺贝尔奖"之称的 1986 年度的菲尔兹(Fields)大奖.

1986 年,符莱(Frey)将方程 $x^p + y^p = z^p$ 的一组整数解 $x = a, y = b, z = c$ 与椭圆曲线

$$y^2 = x(x - a^p)(x + b^p) = x^3 + (b^p - a^p)x^2 - a^p b^p x$$

联系起来. 1990 年里贝特(Ribet)终于实现了符莱的目标,发现关于椭圆曲线的谷山(Shimura)-志村(Taniyama)猜想(有理数域上椭圆曲线可模形式化)蕴涵着费马大定理. 经过长达九年的艰苦努力,1995 年英国数学家瓦尔斯(Wiles)在最高级的数学期刊《数学年刊(Annals of Mathematics)》上发表了一篇长文(这与瓦尔斯和泰勒(Taylor)合写的另一篇相关论文占据了该杂志整整一期),一举证明了某种意义上半稳定的椭圆曲线都可模形式化. 尽管这未完全证实谷山—志村猜想,但结合符莱与里贝特的工作,已足以推得困惑数学界 350 多年的费马大定理. 由于瓦尔斯的证明中用到许多深奥的数学知识,真正读懂全部证明的人寥寥无几.

瓦尔斯的这项成果是 20 世纪最重大的数学成就之一. 他因此当选为美国科学院院士,获得了 1996 年的沃尔夫(Wolf)数学奖以及 1998 年的国际数学家大会特别奖(由于瓦尔斯已超过 40 岁,依规定无法获得菲尔兹奖.). 值得指出,最近谷山-志村猜想又被伯努尔(Breuil)、考锐德(Conrad)、达蒙德(Diamond)与泰勒完整地攻克!

至此,困惑人们 358 年的超级难题划上了句号.

孙智伟撰稿

迷人的方程整数解问题

——你知道有个以“中国”命名的定理吗

系统地求方程的整数解始于古希腊数学家丢番图的著作《算术(Arithmetic)》,因此,这类方程也叫丢番图方程.考虑到这类问题中未知数个数一般多于方程个数,丢番图方程(组)也称为不定方程(组).

给定整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 c,我们能把 c 表成 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的整系数线性组合吗?这等价于一次不定方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=c$$

有整数解吗?

可证上述方程有整数解,当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数整除 c(最大公因数记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,若干个 0 的最大公因数视为 0).

对于整数 a 与 b,如何求最大公因数 (a,b) 以及整数 x,y,使得 $(a,b)=ax+by$ 呢?为此古希腊数学家欧几里得(Euclid)发明了历史上第一个重要的算法——辗转相除法.下面我们通过一个实例来阐述这一方法.

例如,我们要求 771 与 426 的最大公因数(771,426),以及方程 $771x+426y=(771,426)$ 的一组整数解.作辗转相除如下:

$$771 = 1 \times 426 + 345, \quad 426 = 1 \times 345 + 81,$$
$$345 = 4 \times 81 + 21, \quad 81 = 3 \times 21 + 18,$$
$$21 = 1 \times 18 + 3, \quad 18 = 6 \times 3 + 0.$$

最后一个非零余数 3 便是 771 与 426 的最大公因数. 方程 $771x + 426y = 3$ 有组整数解 $x = 21, y = -38$, 这是通过倒着使用上述一系列带余除法求得的:

$$\begin{aligned} 3 &= 21 - 18 \\ &= 21 - (81 - 3 \times 21) \\ &= 4 \times 21 - 81 \\ &= 4 \times (345 - 4 \times 81) - 81 \\ &= 4 \times 345 - 17 \times 81 \\ &= 4 \times 345 - 17 \times (426 - 345) \\ &= 21 \times 345 - 17 \times 426 \\ &= 21 \times (771 - 426) - 17 \times 426 \\ &= 21 \times 771 - 38 \times 426. \end{aligned}$$

公元 4 世纪时,我国数学著作《孙子算经》中已包含下述重要结果.

中国剩余定理: 如果正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 两两互素,则对任何整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$,方程组

$$a_1 + m_1x_1 = a_2 + m_2x_2 = \cdots = a_k + m_kx_k \qquad (*)$$

必有整数解. 整数 a 与 b 互素是指: 没有既整除 a 又整除 b 的大于 1 的整数.

中国人习惯上称上述定理为孙子定理. 实际上古代中国人还知道(*)有解时,如何求出它. 不同于勾股定理,中国人的这一光辉成果得到了全世界的一致认可. 中国剩余定理这一名称

就是由西方数学家提出的. 孙子定理对于数论与代数有着基本的重要性,它在密码学中也有广泛的应用.

设 p 为奇素数,已知方程 $x^2+1=py$ 有整数解,当且仅当 p 被4除余1;方程 $x^2-2=py$ 有整数解,当且仅当 p 被8除余1或者7.

下述著名的二次互反定律是欧拉在1783年发现的,1796年才由高斯(Gauss)首次(用数学归纳法)严格地证明.

二次互反律: 设 p,q 为不同的奇素数. 则 p,q 被4除余3时, $x^2+py=q$ 有整数解,当且仅当 $x^2+qy=p$ 没有整数解;此外(即 p,q 中有被4除余1的), $x^2+py=q$ 有整数解,当且仅当 $x^2+qy=p$ 有整数解.

这一定律是初等数论的核心,关于二次互反律迄今已有192个不同的证明,作者认为罗索(Rousseau)在1991年给出的使用中国剩余定理的证明最有特色. 1785年勒让德(Lerangde)曾给出一个有缺陷的证明,它依赖于下述的勒让德定理.

勒让德定理: 设 a,b,c 是没有平方因子的非零整数,且它们两两互素,则齐次方程

$$ax^2+by^2+cz^2=0$$

有使 x,y,z 不全为0的整数解,当且仅当3个方程

$$x^2+ab=cy,\quad x^2+bc=ay,\quad x^2+ac=by$$

都有整数解.

相邻的平方数只有0和1,因此方程 $x^2-a^2y^2=1$ 仅有的整数解适合 $x=\pm1$ 与 $ay=0$. 设正整数 d 不是平方数,那么佩尔(Pell)方程

$$x^2-dy^2=1$$