工程数学

线性代数

东科学技术出版社

工　程　数　学

线　性　代　数

陈蒙恩　范宪臣　刘冠军

版社

工 程 数 学

线 性 代 数

陈蒙恩　范宪臣　刘冠军

*

山东科学技术出版社出版
山 东 省 新 华 书 店 发 行
山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092毫米32开本　8印张　168千字
1984年3月第1版　1984年3月第1次印刷
印数：1—15,000

书号 13195·112　定价 0.95 元

内 容 简 介

本书是按照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审定的《工程数学教学大纲》的要求编写，作为山东工业大学教材，并经过多次讲授后修改而成的。

本书内容分为六章，包括行列式、矩阵、线性方程组、二次型、特征值与特征向量、线性空间与线性变换。每章后均附有一定数量的习题，书末有习题答案。

编写时力求深入浅出，条理清晰，通俗易懂，便于掌握和自学。本书可作为高等工科院校教材或参考书，也可作为职工大学、业余大学教材及工程技术人员自学用书。

前　　言

本书是按照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审定的《工程数学教学大纲》的要求编写，作为教材并经过多次讲授后修改而成的。它可作为高等工科院校教材或参考书，也可作为职工大学、业余大学教材及工程技术人员自学用书。

编写时力求深入浅出，条理清晰，例题典型，通俗易懂，便于学习和掌握。凡估计读者可能疏忽或容易产生错误之处，都作了必要的详细阐述。同时考虑到本课程教学时数有限，在内容上抓了基本，突出重点，对某些理论问题不作全面论述。

本书前五章教学时数约35学时，第六章可根据各专业教学要求选用。各章配有适量习题，书末附有习题答案。

本书承蒙王济诚教授、黄超群副教授审阅了原稿，并提出了宝贵意见，我们表示衷心感谢。

编　者

1983年10月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式的理论是由研究线性方程组的解法而产生的。本章将从分析二阶行列式和三阶行列式的共同特性出发，引进 n 阶行列式的概念，并介绍 n 阶行列式的基本性质和计算方法，最后利用 n 阶行列式来求 n 元线性方程组的解。

§1　n阶行列式

一、二阶行列式与三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

利用消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组（1）有唯一解：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了便于记忆，引进了二阶行列式。

定义　将代数和$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为二阶行列式。记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

因此，方程组（1）的解，可改写为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \quad \left(\text{其中} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

与引进二阶行列式的概念一样，在讨论三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

的解时，为了使解的公式便于记忆，先定义三阶行列式。

定义 将代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

定义了三阶行列式后，对于方程组（2），当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这就是求解三元线性方程组的克莱姆法则。

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=11 \\ 2x_1-3x_2 \qquad =2 \\ \qquad x_2-4x_3=1 \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}=20\neq 0$$

所以方程组有唯一解，又由

$$D_1=\begin{vmatrix} 11 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=128,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}=72,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=13$$

故 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=6\dfrac{2}{5}$， $x_2=\dfrac{D_2}{D}=3\dfrac{3}{5}$，

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{13}{20}$$

在生产实践与科学实验中遇到的许多实际问题所需要解的方程组，其方程个数往往不是二个、三个，未知数的个数也不止二个、三个，而是几十个、几百个，也就是说，要考虑一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{3}$$

的求解问题。这就很自然引起这样的联想：方程组（3）是否也有二元、三元线性方程组那样类似的求解公式呢？回答是肯定的。为此必须引进 n 阶行列式的概念。

二、排列

定义 由数 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列。

例如，52431是一个 5 级排列；645312是一个 6 级排列。

显然，由 n 个数组成的所有 n 级排列共有

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1=n!$$

个。在 $n!$ 个 n 级排列中，$1\ 2\ 3\cdots n$ 是唯一的一个按自然数顺序排成的 n 级排列，通常称此排列为 n 级标准排列。

例如，由 1，2，3 组成的所有 3 级排列共有 $3!=6$ 个，即

123，132，213，231，312，321

定义 在一个排列中，如果一对数的排列顺序与自然数顺序相反时，则称这一对数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数。逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $N[i_1i_2\cdots i_n]$。

例如，$N[123]=0$，$N[231]=2$，$N[312]=2$，

$N[132]=1$，$N[213]=1$，$N[321]=3$

所以 3 级排列123，231，312为偶排列；132，213，321为奇排列。

对于由较多个数组成的排列，可按下述例题中的方法来确定其逆序数。

例2 确定排列531246的逆序数。

解　在原排列中划去1。因为53①246排在1前面的数有两个，所以对1有2个逆序。

同理　53①②46　　对2有2个逆序，

5③①②46　　对3有1个逆序，

5③①②④6　　对4有1个逆序，

⑤③①②④6　　对5有0个逆序，

⑤③①②④⑥　　对6有0个逆序，

所以　$N[531246]=2+2+1+1+0+0=6$

例3　确定排列$n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$的奇偶性。

解　因为

$$
\begin{aligned}
&N[n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1]\\
&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\
&=\frac{n(n-1)}{2}=\begin{cases}2k(4k-1) & \text{当}n=4k\\ (4k+1)\cdot2k & n=4k+1\\ (2k+1)\cdot(4k+1) & n=4k+2\\ (4k+3)\cdot(2k+1) & n=4k+3\end{cases}\\
&\qquad\qquad(k=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

所以当$n=4k$，$4k+1$时，原排列为偶排列；$n=4k+2$，$4k+3$时，原排列为奇排列。

定义　把排列$i_1i_2\cdots i_n$中某两个数的位置互换，而其余数不动，则称在$i_1i_2\cdots i_n$中经过了一次对换。

例如，排列123经过2，3两个数的位置互换，就得到一个新的排列132。记

$$123\xrightarrow{(2,3)}132$$

再如

$$123\xrightarrow{(2,3)}132\xrightarrow{(1,2)}231\xrightarrow{(3,1)}213\xrightarrow{(2,3)}312\xrightarrow{(1,2)}321$$

由此可见，1，2，3 三个数组成的全部三级排列有$3!=6$个，它们可以编成这样一个次序，由其中任一个排列开始，接下去的每一个排列都是前面一个排列经过一次对换而得到。这一结果对于$n!$个n级排列也是成立的。即$n!$个n级排列中任一个排列都可经过若干次对换，变为另一个指定的n级排列。

定理1 排列经过一次对换，改变其奇偶性。

证明 1° 先证明一种特殊情况：对换排列中相邻的两个数

$$AijB\xrightarrow{(i,j)}AjiB$$

其中A，B为排列的其余部分。显然，A．B的逆序数经过i与j对换并不改变，而i、j两个数的逆序数改变为

如果$i<j$，则

$$N[AijB]=N[AjiB]-1$$

如果$i>j$，则

$$N[AijB]=N[AjiB]+1$$

总之 $$N[AijB]=N[AjiB]\pm 1$$

所以，排列$AijB$与排列$AjiB$有不同的奇偶性。

2° 再证一般情况：对换排列中不相邻的两个数

$$Ail_1\cdots l_mjB\xrightarrow{(i,j)}Ajl_1\cdots l_miB$$

由 $$Ail_1\cdots l_mjB\xrightarrow{(i,l_1)}Al_1il_2\cdots l_mjB\xrightarrow{(i,l_2)}Al_1l_2il_3\cdots l_mjB$$

$$\longrightarrow\cdots\xrightarrow{(i,l_{m-1})}Al_1\cdots l_{m-1}il_mjB\xrightarrow{(i,l_m)}Al_1\cdots l_mijB$$

进行了m次相邻两数的对换。

又由 $Al_1\cdots l_m ijB \xrightarrow{(i,j)} Al_1\cdots l_m jiB \xrightarrow{(l_m,j)}$

$Al_1\cdots l_{m-1} j l_m iB \longrightarrow \cdots \xrightarrow{(l_2,j)} A_1 l_1 j l_2\cdots l_m iB \xrightarrow{(l_1,j)}$

$Ajl_1\cdots l_m iB$进行了$m+1$次相邻两数的对换。所以从排列$Ail_1\cdots l_m jB$到排列$Ajl_1\cdots l_m iB$共进行了$2m+1$次相邻两数的对换，据1°知：排列$Ail_1\cdots l_m jB$与排列$Ajl_1\cdots l_m iB$有不同的奇偶性。

定理2 在$n!$个n级排列中，奇排列与偶排列的个数各占$n!/2$个。

证明 设在$n!$个n级排列中，奇排列的个数为p，偶排列的个数为q。对于这$n!$个排列，将其为首的两个数进行对换，这样，就使原来p个奇排列变为p个偶排列，而原来的q个偶排列变成q个奇排列。据假设，偶排列一共只有q个，所以$p\leqslant q$。同理，奇排列一共只有p个，所以$q\leqslant p$。又因为$p+q=n!$，故

$$p=q=n!/2$$

三、n阶行列式

现在研究二阶行列式和三阶行列式在结构上的规律，以便根据这些规律来定义n阶行列式。

根据前面的讨论，将二阶行列式和三阶行列式在结构上的规律列表如下：

	行列式中含元素的个数	展开式中所含项数	每项中含因子个数	每项中每个因子的位置特征	带“+”号“-”号的项数	带“+”号“-”号各项特征
二阶行列式	$4=2^2$个	$2=2!$ 项	2个	每行每列有一个且只有一个	各占$\frac{2!}{2}$项	每项各个因子的行下标按自然数顺序排列时，其列下标所组成的排列为偶排列时该项带“+”号，为奇排列时，该项带“-”号
三阶行列式	$9=3^2$个	$6=3!$ 项	3个	（同上）	各占$\frac{3!}{2}$项	（同上）

将这些结构上的规律推广，就可以定义 n 阶行列式。

定义　由n^2个数a_{ij}（i，$j=1,2,\cdots,n$）所构成的和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为n阶行列式。其中$j_1j_2\cdots j_n$是自然数1，2，…，n的一个n级排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对$n!$个n级排列求和。记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称a_{ij}(i, $j=1,2,\cdots,n$)为n阶行列式的元素，n阶行列式中横排称为行，竖排称为列。

例 4 计算 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

解 四阶行列式应含有4！=24项，由于行列式中有12个元素为零，因此只要找出不含这些零因子的项就可以了。又因为行列式只有 4 个不等于零的元素，而它们恰好位于不同的行、不同的列，因此行列式除 $5\times6\times7\times8$ 这一项外，其余23项均为零。所以

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^{N[1234]}5\times6\times7\times8=1680$$

作为例 4 的一般形式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（以后，行列式中未写出的元素均为零）。

例 5 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$