线性代数

高等教育自学考试用书

线性代数

王 玲 编著

国防工业出版社

线 性 代 数

王 玲 编著

[illegible]工業出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王玲编著．—北京:国防工业出版社．1996.3
ISBN 7-118-01581-4

Ⅰ．线…　Ⅱ．王…　Ⅲ．线性代数　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 01810 号

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码　100044)
北京怀柔新华印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092　1/16　印张 12¾　290 千字
1996 年 3 月第 1 版　　1996 年 3 月北京第 1 次印刷
印数:1—4000 册　　定价:16.00 元

序

中国管理软件学院，是由中国科协中国管理现代化研究会软件专业委员会创办，于1984年经北京市成人教育局批准，并在国家教委备案，至今已有12年的历史。目前，我院已成为电子专业设置较多、师资力量较强、教学管理严格、教育质量好、社会声誉较高的一所社会力量办学的全日制面授大专院校。1993年经国家教委审定，北京市成人教育局批准，成为首批国家文凭考试试点院校之一（经考试通过者，发给国家承认学历的毕业证书）。1994年又批准为全国计算机技术等级考试培训点之一。

12年的经历与发展，使我院成为多专业、多学科的高等民办院校之一，目前设有计算机应用、程控交换与通信、计算机控制与应用、应用电子技术、公共关系与文秘、国际贸易、财政与金融、财会电算化、外贸英语、涉外日语、旅游与饭店管理、法律等专业，培养了一批又一批人才，他们已投身于我国社会主义经济建设。

12年办学实践使我们深刻认识到：教育质量是民办高校的生命，民办高校一定要以改革求发展，以质量求生存，切实贯彻按需施教、学以致用的原则，这样，教育计划、大纲、教材就显得特别重要。我们在多年教学活动中，对学生注重基本理论训练及基本技能的培养，教学实施中注重针对性、实用性和职业性，强化学生实际技能的培养。

12年办学实践还告诉我们，学校的专业教材建设是提高教学质量的重要方面，它应成为学校的基础建设之一。这次，由我院基础部编写的《线性代数》就是教材基础建设的一次有益尝试，欢迎社会各界同仁及读者多提宝贵意见。

我们也愿与社会同仁合作，编写出更适合我国自考和文凭考试的其他学习及辅导材料，以此作为献给参加自学考试和国家文凭考试的考生和社会自学成才者，为我国民办高等教育作出我们的贡献。

中国管理软件学院院长

刘颖水

1996年春节

前　言

为适应改革开放和科学技术迅速发展的需要，每年都有大批青年参加国家文凭考试和自学考试，而目前尚无一本较适合自学考试及文凭考试的线性代数教材，为此作者按中国管理软件学院的教材建设需要，根据高等教育国家文凭考试和自学考试大纲要求，编写了这本《线性代数》教材。为了验证本教材的可行性、实用性、针对性，曾以讲义的形式在一些国家文凭考试试点院校多次试用。由于本教材紧扣教学大纲，所以经多届考生试用后，效果是好的，通过率是高的。

全书共分六章。第一章是行列式，它是后继各章知识的基础。第二章矩阵是全书的重点，其中包括矩阵概念、矩阵运算、逆矩阵、矩阵的秩、初等变换、初等矩阵。第三章是 n 维向量，其中包括 n 维向量空间、向量间的线性关系、向量间线性关系的性质、向量组的秩及矩阵的秩。第四章是线性方程组。书中以线性方程组求解为线索，逐步阐述线性方程有解的条件和解的结构，从而实现线性方程组的最终求解。第五章是矩阵的特征值。其中包括矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵、约当矩阵。矩阵级数的收敛性及线性方程组的迭代解法，可作为选学内容，读者自行掌握。第六章是二次齐式。其中包括二次齐式的化简、定号、判别准则。把二次齐式放在最后一章，其目的是利用前面学过的知识，全面地讨论二次型化为标准形及规范形的方法和正定二次型的判定。每一章有小结、习题。文中列举的例题，读者要学懂弄清。在学完每一章以后，建议读者根据小结的内容自己再对本章的重要概念、主要定理、基本运算方法加以整理，以便真正理解概念，并掌握解决问题的方法和技巧。总之，本教材对概念的引入尽量从具体、通俗、易懂入手，逐步深入。内容安排上系统性强，重点突出，难点分散。为了对读者解题有所启发，巩固所学知识，书中举有较多的例题。凡容易出错的地方，都作了较详细的解释与分析。为了检查学习效果，每章附有习题及答案，这些习题反映了教学大纲的基本要求。

本书也可以作为工科院校教材或参考书，以及工程技术人员自学用书或电大、夜大、函大教材。

全书由王玲编写，王友仁主审。在编写过程中，始终得到中国管理软件学院刘颖水院长、赵鹤君副院长的大力支持和帮助。刘跃威、马春光、孙宪平、杜晓等老师也给予了许多帮助，在此一并表示感谢！

编　者

1995 年 10 月

内 容 简 介

本书是按照高等教育国家文凭考试和自学考试大纲要求编写的。全书共分六章。内容包括:行列式、矩阵(全书重点)、n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值、二次齐式等。为便于自学,书中对概念的引入尽量从具体、通俗、易懂入手,逐步深入。书中并列举较多解题实例,便于读者理解比较抽象的定义和定理。每章均给出小结、习题及答案。

本书适于准备参加国家文凭考试和自学考试的读者学习和使用,也可作为工科院校教材或参考书,以及工程技术人员自学用书,或电大、夜大、函大教材。

目　　录

预 备 知 识

在学线性代数的过程中，常会遇到数域、排列、连加号和连乘号等知识，为了有利于学习，我们先介绍这方面的内容。

一、数域

任何一组有共同属性的事物都可以叫做一个集合，如自然数集合、整数集合、有理数集合、实数集合等。有时也把集合简称为集，如自然数集，有理数集，实数集等。组成这个集合的事物叫做集合的元素，通常以大写字母 A、B 等表示集合；以 a、b 等小写字母表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于 A，记为 $a\in A$，或说 A 包含 a，记为 $A\ni a$。含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集。

> 数域的定义：设 P 是一些(有限或无限多个)数组成的一个集合，而且 P 不只含一个数，如果对于 P 中任意二数 a、b 恒有
>
> $$a+b\in P,a-b\in P,ab\in P,a/b\in P(b\neq 0)$$
>
> 则 P 就叫做一个数域。

例如：所有的有理数所组成的集合就是一个数域，因为对任意两个有理数进行加、减、乘、除的运算，结果还得有理数；同理，所有实数的集合是实数域；所有复数的集合是复数域。

例 1 证所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{2}$ (α、β 表示有理数)实数所组成的集合 P 是一个数域。

证明：在这个集合 P 中任取二数

$$a=\alpha_1+\beta_1\sqrt{2}$$

$$b=\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}$$

对 a、b 进行加、减、乘、除运算，如果运算结果均是 $\alpha+\beta\sqrt{2}$ 的实数，则问题得证。

$$a+b=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{2}$$

$$a-b=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)\sqrt{2}$$

$$ab=(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\sqrt{2}$$

由假设可知 α_1、α_2、β_1、β_2 均为有理数

故 $$(\alpha_1+\alpha_2),(\beta_1+\beta_2),(\alpha_1-\alpha_2),(\beta_1-\beta_2),$$

$$(\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_1\beta_2),(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

均为有理数,所以

$$a+b\in P \qquad a-b\in P \qquad ab\in P$$

还要证当 $b\neq 0$ 时

$$\frac{a}{b}\in P$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{\alpha_1+\beta_1\sqrt{2}}{\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}}\\&=\frac{(\alpha_1+\beta_1\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}{(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}\\&=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\sqrt{2}}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}\\&=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

必须证明 $\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq 0$

由 $b=\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}$ 可知,当 $b\neq 0$ 时,α_2、β_2 至少有一个不等于零,因为 $\sqrt{2}$ 是无理数,所以

$$\alpha_2-\beta_2\sqrt{2}\neq 0$$

从而

$$(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})=\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq 0$$

设

$$\alpha_3=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-\beta_2^2} \qquad \beta_3=\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均为有理数,且 $\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq 0$,所以 α_3,β_3 均为有理数,则

$$\frac{a}{b}=\alpha_3+\beta_3\sqrt{2}$$

故

$$\frac{a}{b}\in P$$

例 2 任意一个数域 P 必含 0 与 1。

证明:在数域 P 中任取一个数 a,由数域的定义恒有

$$a-a\in P$$

所以

$$0\in P$$

因 P 中不只含一个数,所以 P 中不可能只含一个数 0,则在 P 中必存在一个数 $b\neq 0$,由数域的定义知恒有

$$\frac{b}{b}\in P$$

所以 $$1 \in P$$

根据数域的定义，我们知道一个数域中的数，经过有理运算(即加、减、乘、除)以后，所得到的数仍在这个数域内，本书所讨论的问题中，所涉及到数的运算也常常只是有理运算，故可以认为在讨论问题时，所涉及到的数统统属于某个数域。

二、连加号与连乘号

过去，我们是用"+"号表示数的相加，用"×"号表示数的相乘，现在我们引用符号"$\sum$"表示数的连加，引用符号"$\prod$"表示数的连乘。

1. n 个实数相加

设 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，它们的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 可以用连加号 $\sum$ 表示，记作

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

即
$$\sum_{i=1}^{n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 中下标 i 表示和式展开时从 1 到 n，也可用其他下标表示，如用 k、j 等。

例如

$$\sum_{i=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

2. $m \times n$ 个实数相加

设 $m \times n$ 个实数

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1,n-1}, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2,n-1}, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{m,n-1}, a_{mn} \end{array}$$

设 $m \times n$ 个实数的和为 S，为了求 S，可先按行逐个相加，然后再把每行的和加起来，即

$$\begin{aligned} S &= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n}) + \cdots \\ &\quad + (a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \end{aligned}$$

这里出现了二重连加号，是先对第二个下标 j 相加，再对第一个下标 i 相加。

例 3 当 $m=3, m=4$ 时，即 $m \times m = 3 \times 4 = 12$ 个实数

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}$$

相加时,用连加号(和号)表示它们的和,设为 S,即

$$\begin{aligned} S &= (a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14})+(a_{21}+a_{22} \\ &\quad +a_{23}+a_{24})+(a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}) \\ &= \sum_{j=1}^{4}a_{1j}+\sum_{j=1}^{4}a_{2j}+\sum_{j=1}^{4}a_{3j} \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}a_{ij} \end{aligned}$$

当然也可以按列一个一个相加,然后把每列的和加起来,即

$$\begin{aligned} S &= (a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1}) \\ &\quad +(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m1})+\cdots \\ &\quad +(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn}) \\ &= \sum_{i=1}^{m}a_{i1}+\sum_{i=1}^{m}a_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}a_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \end{aligned}$$

3. n 个实数相乘

n 个实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 相乘,可用符号

$$\prod_{i=1}^{n}b_i$$

表示,即

$$\prod_{i=1}^{n}b_i=b_1b_2\cdots b_n$$

例如 10 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$相乘,可表示为

$$\prod_{i=1}^{10}a_i=a_1a_2\cdots a_{10}$$

4. n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所有可能的差(a_i-a_j)的连乘积

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所有可能的差(a_i-a_j)的连乘积表示为

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

这个符号是表示连乘的意思,但具体是什么数相乘,所有可能的差(a_i-a_j)的积表示什么意思,可通过具体例子说明。

例如当 $n=2$ 时,是两个数 a_1、a_2 所有可能的差 $a_i-a_j(1\leqslant j<i\leqslant n)$的乘积$(a_2-a_1)$,

即

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(a_i-a_j)=a_2-a_1$$

当 $n=3$ 时，是三个数 a_1、a_2、a_3 所有可能的差 (a_i-a_j) $(1\leqslant j<i\leqslant 3)$ 的连乘积，即

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$

当 $n=4$ 时，有

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\cdot(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$$

当 $n=100$ 时有

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 100}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_{100}-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_{100}-a_2)\cdots(a_{99}-a_{98})(a_{100}-a_{98})(a_{100}-a_{99})$$

从而可以推出对于一般的 n 有

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})(a_n-a_{n-1})$$

这就是 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所有可能的差的连乘积

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

的意义。现在若问 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$ 表示多少项相乘呢？从以上的计算中可以发现一条规律，即

当 $n=2$ 时，有 1 项；

当 $n=3$ 时，有 3 项，等于 $1+2$ 项；

当 $n=4$ 时，有 6 项，等于 $1+2+3$ 项；

……………………………………

当 $n=100$ 时，有 $1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99(1+99)}{2}=4950$ 项；

当 n 为任意数时有 $1+2+3+4+\cdots+(n-1)=\dfrac{(n-1)[1+(n-1)]}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 项；

如果当 n 相当大时，要全部写出是不可能的，所以用连乘号表示

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

第一章　行　列　式

一、二元、三元线性方程组与二阶三阶行列式

行列式的概念是以解线性方程组的问题引进的。我们知道：任何一个二元一次方程组经过变形以后，可化为一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则此方程有唯一的解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

为了便于记忆这个公式，我们引进二阶行列式的概念

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

于是式(1－2)可以写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

同样，三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{33}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-3}$$

的解可借助于三阶行列式表示如下

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{1-4}$$

式中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

式中 D 是方程组(1—3)的系数按原来次序组成的 3 阶行列式，称为方程组(1—3)的系数行列式。式(1—4)右端的三个分子行列式，它们是用常数项 b_1、b_2、b_3 分别替换系数行列式中的第 1 列、第 2 列、第 3 列构成的。

可见一个三阶行列式是由不同列不同行的三个数(元素)相乘而得到的六项的代数和，这些项前面所带的正负号可以由图 1—1 看出。

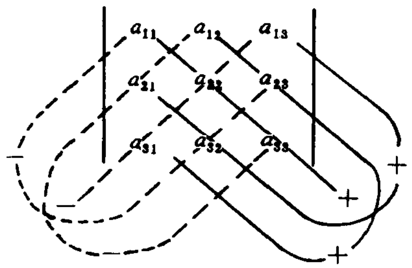

图 1—1

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=2 \\ x_1+x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-7x_2+5x_3=-1 \end{cases}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=10-12+7+56+5+3=69\neq 0$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & 5 \end{vmatrix}}{69}=\frac{69}{69}=1$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{69}=\frac{23}{69}=\frac{1}{3}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}}{69}=\frac{-23}{69}=-\frac{1}{3}$$

从上面的例子看出：利用二阶、三阶行列式来解系数行列式不为零的二元、三元线性方程组是很方便的。那么，能否将这个方法推广到解 n 元线性方程组呢？

为了研究利用行列式来解 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

首先需要给 n 阶行列式下定义，从二阶、三阶行列式的定义看出：行列式的展开式中，主要的因素有两点：一是“项”，二是项前面的符号。因为每一项都是不同的行不同的列的元素的乘积，当 n 很大时，不同的行不同的列的元素的取法很多，每项的符号也不能用前面图 1—1 的方法来决定，为了解决这两个问题，首先介绍“排列”的概念。