GAILULUN YU SHULITONGJI

概率论与数理统计

郑　颖·钱君燕·冯玉瑚 编

$P\{\xi = x_i\} = P_i, i = 1, 2, \cdots$

$P\{\xi = x_i\} = P_i, i = 1, 2, \cdots$

$P\{\xi = x_i\} = P_i, i = 1, 2, \cdots$

$P\{\xi = x_i\} = P_i, i = 1, 2, \cdots$

中国纺织大学出版社

概率论与数理统计

郑 颖 钱君燕 冯玉瑚 编

中国纺织大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/郑颖等编著,上海:中国纺织大学出版社,1999.10

ISBN 7-81038-235-7

Ⅰ.概… Ⅱ.郑… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 28668 号

内容提要

本书是根据高等工业学校“概率论与数理统计课程教学基本要求”并参考“全国工学、经济学硕士研究生入学考试大纲”中关于“概率论与数理统计初步”的要求编写而成的。全书分八章。前五章介绍概率论的基本内容,后三章介绍数理统计基本概念和数理统计的两大基本问题(参数估计与假设检验)。本书叙述详细,例题丰富,选材适当,各节附有习题,每章有小结和复习题,书末附有习题答案。本书可供 48～54 学时的课程教学使用,也可作为工程技术人员培训或自学参考书。

责任编辑 杜亚玲

封面设计 周 新

概率论与数理统计

郑 颖 钱君燕 冯玉瑚 编

中国纺织大学出版社出版

(上海市延安西路 1882 号 邮政编码:200051)

新华书店上海发行所发行 上海长阳印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:11 字数:294 千字

1999 年 8 月第 1 版 1999 年 8 月第 1 次印刷

印数:0 001—3 000

ISBN 7-81038-235-7/O·11

定价:18.00 元

前　言

本书是根据高等工业学校“概率论与数理统计课程教学基本要求”并参考“全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲”中关于“概率论与数理统计初步”的要求编写而成的，可作为工科院校的概率论与数理统计课程的教材，也可作为工程技术人员培训或自学参考书。

全书分 8 章。前 5 章介绍概率论的基本内容：概率论基本概念、随机变量及其分布、数字特征、大数定律与中心极限定理，为读者了解随机数学建立了必要的理论基础。后 3 章在概率论的基础上，介绍了数理统计基本概念和数理统计的两大基本问题（参数估计和假设检验）。本书主要供 48～54 学时的课程教学使用。如果只讲概率论部分，约需 32～36 学时。

本书曾在中国纺织大学使用多年，经过教学实践，吸收众多同学和有关教师的意见，在这基础上作了修订。作为教材，当然要便于教学，增强可读性。我们注意到一些同学在开始接触概率论基本概念时常常感到理解起来困难，因此本书内容编排充分做好铺垫，由浅入深由表及里逐步帮助同学掌握这些概念。全书在介绍重要概念、定理和公式时，注意联系实际，讲清楚应用背景，并通过吸收有关文献和通用教材的大量典型例题和习题，使得概念清晰易懂，既保持教学上必要的严格性严密性，又让读者容易接受消化。本书采纳的各个例题涉及概率统计在许多方面的应用，使读者了解到概率论与数理统计在生活与工程技术等方面的广泛应用，从而激发同学的学习兴趣，启发他们把数学学习与应用相结合以适应日后工作学习的需要。我们在每章后都有小结，进一步阐明各章的重点与难点、介绍各概念之间的联系和一些方法的实质，帮助读者总结提高，融会贯通。

本书的第一章由冯玉瑚同志编写，第四、五章由钱君燕同志编写，

其余各章由郑颖同志编写。吴让泉教授审阅全书，并提出了许多宝贵意见，编者在此谨致感谢。本书编写过程中参考和采纳了参考书目中一些例题、习题，采用了工学硕士研究生入学考试的一些试题，在此一并表示感谢。

受水平限制加上时间仓促，本书不可避免有许多不足之处，欢迎读者批评指正，以便再版改进。

编　者

1999.3.1

目　录

第一章　事件与概率

1.1　随机现象与统计规律性

1.1.1　随机现象

我们观察到的自然现象和社会现象一般可分为两类：一类称为确定性现象，另一类称为随机现象。我们先通过实例来说明这两类现象。

考察水的状态变化：在标准大气压下将水加热到100℃，这种试验无论做多少次，都会出现沸腾现象。

考察物体的运动状态：在不受外力作用的条件下物体作直线运动，这种试验无论做多少次，物体都作匀速直线运动。

考察石子的运动规律：任取一块石子作竖直上抛运动，不论其形状大小如何，也不论做多少次试验，得到的结果是相同的：石子最终掉在地上。

上述三例都是确定性现象。确定性现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象。只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预知的。

现在考察另一类型的实例。

考察抛骰子出现的点数：在专门的容器内抛一颗骰子，观察到的点数可能是1点，2点，3点，4点，5点和6点。无论重复试验多少次，得到的结果不一定相同。

考察产品的质量：从一批产品中抽出一件产品，结果可能是合格品，也可能是不合格品。若干次的重复试验会得到不同的结果。

某个物理量的测量：物理量的测量值只是“真值”的某种精确程度

下的近似值。我们把每次测量看作一次试验，并将测量到的值看作试验结果。在相同条件下对同一物理量进行多次测量，不论对测量如何精心设计，都不可能使各次出现相同的测量值(即试验结果)。出现这种现象除了是由于测量仪器的刻度不能过细外，主要的是由于在测量中存在一些无法控制的偶然因素引起了测量值的差异。例如，用天平称量某物时，形成称量误差的原因可能是天平受温度的微小变化无法控制，也可能是空气中因灰尘降落而无法控制为稳定状态，也可能是称量物或砝码上因极微小的水蒸汽凝结或电荷移动的作用而无法控制，这些无法控制的微小因素我们无法一一枚举。然而，在测量问题中，正是这些无法控制的因素造成了测量值的差异。单个无法控制的因素在指定的一次测量中影响甚微且带有偶然性，但由于因素众多，这些微小因素的总和，就造成了不可忽视的测量误差。

上述三例都是随机现象。随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象。尽管试验条件不变，试验结果在试验之前是不可以预知的。出现什么结果带有随机性。

尽管随机现象在个别试验中出现什么结果带有随机性，但在大量重复试验中却能显示出统计规律性。例如，抛一枚质量均匀的硬币，当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占$\frac{1}{2}$，某射手对一个目标进行射击，当射击次数不多时，对弹孔的分布看不出有什么规律性，但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性：弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀。又例如，个别气体分子热运动是杂乱无章的，速度和轨道都是随机的，但作为大量气体分子对器壁不断磁撞的结果，气体的压强是可以确定的，这是大量气体分子运动中的统计规律性的表现。正如恩格斯所指出的，在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支；数理统计以概率论为工具研究统计资料的收集、整理，并依据随机现象的规律性作出科

学的分析和推断。

概率论与数理统计以随机现象的统计规律性为研究对象，其最终目的在于用随机现象的规律性指导我们的实践。概率论与数理统计的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中。例如，使用概率统计方法进行天气预报、水文预报和地震预报；研制新产品时，为寻求最佳方案可用以进行试验设计和数据处理；在通讯工程中可用以提高信号的抗干扰性和分辨率；在可靠性工程中可用以给出元件和系统的使用可靠性及平均寿命的估计；在军事战略战术研究中，常用以研究最优策略，制定战术计划等等；在现代经济管理中的预测方法、统计质量管理方法等都是概率统计的成功的应用。

1.1.2 频率稳定性

对于随机现象，我们通常关心的是在试验或观察中某个结果是否出现，这些结果称为随机事件（数学定义将在 1.2 节中给出），简称事件。例如购买彩票可能中各种类型的奖，这是一个随机现象，而“中大奖”则是一个随机事件。以后我们用 $A,B,C,\cdots\cdots$ 等大写拉丁字母表示随机事件。

对于一个随机事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生。我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大。例如，为了确定防汛墙的高度，就要知道每年最大洪水超过某一高度这一随机事件发生的可能性大小。我们希望找一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小。我们首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度。

对于随机事件 A，若在 N 次试验中出现了 n 次，则称

$$f_N(A)=\frac{n}{N} \tag{1.1}$$

为随机事件在 N 次试验中出现的频率。

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小

表示 A 发生的频繁程度。频率越大，事件 A 发生越频繁，这意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大。因而，是否可以用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小？由于在 N 次试验中，事件 A 发生的次数 n 具有偶然性，故用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性大小不尽合理。请看下面的例子。

抛硬币试验。结果见表 1.1 及表 1.2。表 1.1 中是将硬币连续抛 5 次、50 次、500 次各做了十遍所得数据。其中事件 H 表示出现正面。

表 1.1

实验序号	$N=5$		$N=50$		$N=500$	
	n	$f_n(H)$	n	$f_n(H)$	n	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

表 1.2

实验者	N	n	$f_N(H)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K. 皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K. 皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出：(1)频率有波动性，即对于同样的 N，所得的 $f_N(H)$ 不尽相同；(2)当 N 增大时，$f_N(H)$ 波动的幅度在减小，并随着 N 的逐渐增大而逐渐稳定于 0.5。

在重复试验次数比较大时，随机事件出现的频率常在某个固定的常数附近摆动，这种规律性我们称之为频率稳定性。频率稳定性说明随机事件发生的可能性大小是随机事件本身固有的，不随人们意志而改变的一种客观属性，因此可以对它进行度量。

1.1.3 概率的统计定义

对于一个随机事件 A，用一个数 $P(A)$ 来表示该事件发生的可能

性大小，这个数 $P(A)$ 就称为随机事件 A 的概率。概率度量了随机事件发生的可能性的大小。但如何定义数 $P(A)$？

根据频率稳定性的讨论可以提出这样的猜想，即当 N 足够大时 $f_N(A)$ 与 $P(A)$ 应充分接近，这一点有很大的启发性。在第五章我们将会看到，在很一般的条件下，这个结论的确成立。因此，频率所稳定的这个值就是相应事件发生可能性大小的一个客观的定量的度量，即相应事件的概率。一般定义如下：

定义 1.1 在相同条件下重复作 N 次试验，如果当 N 增大时，事件 A 出现的频率 $f_N(A)$ 在某一个常数 p 附近摆动，则称常数 p 为事件 A 的概率，即 $P(A)=p$。

这个定义称之为概率的统计定义，它适用于一切类型的试验。但定义中没有提供直接确定概率的方法，我们不可能对任何一事件 A 进行足够多次的试验，这是此定义的缺陷。尽管如此，定义揭示了频率与概率的关系，同时提供了近似或估计求某事件概率的一种手段，即当 N 充分大时，用它的频率来作为概率的近似值。以后我们将会看到，这种做法大有好处。在许多情况下足以满足实际需要。

1.2 基本事件空间与随机事件

1.2.1 基本事件空间

对随机现象的观察或试验称为随机试验，简称试验。在一次随机试验中，会出现怎样一个试验结果是无法预先知道的，但可能出现什么结果通常是能够明确的。例如，抛一颗骰子，观察出现的点数。它是一个随机试验，你不可能预先知道某次试验出现的点数，但你能够明确某次试验可能出现的结果是 1 点，2 点，3 点，4 点，5 点和 6 点。我们将每个可能出现的结果称为试验的一个基本事件，一般用 ω 表示。由基本事件全体构成的集合，称为基本事件空间（或样本空间），记为 Ω。在具体问题中十分重要的是：认清基本事件空间是由什么构成的，我们来举一

些例子。

(1)抛一枚硬币观察所出现的面:用 H 表示出现正面,T 表示出现反面,于是 Ω 由两个基本事件构成,即 $\Omega=\{H,T\}$。

(2)从标号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个同样的小球中任取其一,观察球的号码:用 ω_i 表示球的号码为 i,于是 Ω 由 n 个基本事件构成,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,如果简记 ω_i 为 i,则得 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$。

(3)记录电话交换台一分钟内电话的呼唤次数:用 ω_i 表示有 i 次呼唤,于是 Ω 由无限可列个基本事件构成,即 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$,如果简记 ω_i 为 i,则得 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$。

(4)在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命:用 t 表示寿命为 t 小时,于是 $\Omega=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$,它由无限不可列个基本事件构成。

(5)在一批产品中依次抽两件检查,则可能得到的结果为以下四种之一:

(a)两次全为正品,记为 ω_{11}或正正;

(b)两次全为次品,记为 ω_{00}或次次;

(c)第一次为正品,第二次为次品,记为 ω_{10}或正次;

(d)第一次为次品,第二次为正品,记为 ω_{01}或次正。

于是 Ω 由四个基本事件构成,即 $\Omega=\{\omega_{11},\omega_{00},\omega_{10},\omega_{01}\}$或 $\Omega=\{$正正,次次,正次,次正$\}$。

(6)某人在三分线外投篮球,直到投中为止,观察他投篮次数:用 ω_i 表示投到第 n 次才首次投中,于是 Ω 由无限可列个基本事件构成,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$。

从以上各例可见,基本事件空间所含的基本事件可以是有限个,也可以是无限个(无限可列个与无限不可列个)。在每次试验中,这些基本事件有一个也只有一个出现。一般地,我们关心的不仅是某一基本事件在试验中是否实现,而是由一部分基本事件构成的集合(Ω 的子集)是否实现。譬如说,在例 2 中我们关心“取得球号码不大于 3”这件事情,它是由三个基本事件 ω_1,ω_2 和 ω_3 构成的子集。例 5 中我们关心是否抽到次品,那么“抽到次品”这件事情是由三个基本事件 ω_{00},ω_{10}和 ω_{01}构成

的子集。例 6 中我们关心的是能否在不超过 5 次投篮的要求下投中，那么所关心的事情是由五个基本事件 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ 和 ω_5 构成的子集。例 4 中，如果规定寿命低于 1 000 小时则灯泡为次品。我们关心的是是否抽到正品，那么“抽到正品”这件事情是由无限不可列个基本事件构成的子集 $\{t \mid t \geqslant 1\ 000\}$。

一般地，我们称基本事件空间 Ω 的子集为随机事件，简称事件*。

在一次试验中，事件 A 发生当且仅当事件 A 含有的某一个基本事件出现。例如用 A 表示上述例 5 中的“抽得次品”，无论是抽到两件次品（ω_{00}出现），或第一件抽到正品、第二件抽到次品（ω_{10}出现），或第一件抽到次品、第二件抽到正品（ω_{01}出现），都称事件 A 发生。反之，若事件 A 发生，则三个基本事件 $\omega_{00},\omega_{10},\omega_{01}$中必有一个且只有一个出现。

由于事件是基本事件空间的子集，由一部分基本事件组成，所以在一次试验中，这个事件可能发生也可能不发生。基本事件空间 Ω 是它本身的子集，也是一个事件。因为每次试验中必然出现 Ω 中的某个基本事件，Ω 是一个必然要发生的事件，所以称 Ω 为必然事件。类似，空集$\varnothing$也是基本事件空间的子集，因为它不含任何基本事件，这个事件在每次试验中必然不发生，所以称$\varnothing$为不可能事件。例如上述例 5 中，如用 B 表示事件“次品数不超过两件”，则 B 包含四个基本事件，B 就是必然事件 Ω。如用 C 表示事件“既未抽到正品又未抽到次品”，则 C 不包含任何基本事件，所以 C 是不可能事件$\varnothing$。

1.2.2 事件间的关系和运算

事件是基本事件空间的子集，因而事件间的关系和运算完全可按照集合之间的关系和运算来处理。下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据事件发生的含义，给出它们在概率论中的含义。熟练掌握事件间的关系和运算，正确理解它们在概率论中的含义，有助于我们今后在同时考察几个在相同条件下的事件时，能够详细地分析事件

* 严格地说，并不是所有的 Ω 的子集都是随机事件，也就是说并不是所有的 Ω 的子集都是我们要考察的对象。我们主要是避免相对于教学大纲要求来说不必要的过多叙述。