21世纪计算机专业大专系列教材

主编 李大友

离散数学

邵学才 蒋强荣 石嘉明 张秀珍 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

21世纪计算机专业大专系列教材

离 散 数 学

李大友　主编

邵学才　蒋强荣
石嘉明　张秀珍　编著

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内容简介

离散数学是高等院校理工科计算机专业必修的重要的专业基础课程。其基本内容由集合论(包括二元关系和函数)、代数结构、图论和数理逻辑四部分构成。本教材在叙述上简明扼要,深入浅出,通过大量的例题把抽象的理论"具体化",是一本可读性很强的教材。

本教材适合于高等院校计算机专业专修科的学生使用,也适合于函授大学、职工大学、高职高专、成人教育的计算机专业的学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/邵学才等编著. —北京:清华大学出版社,2001
21 世纪计算机专业大专系列教材
ISBN 7-302-04292-6

Ⅰ. 离… Ⅱ. 邵… Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 11494 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者:北京市清华园胶印厂
发行者:新华书店总店北京发行所
开 本:787×1092 1/16 印张:13.25 字数:299 千字
版 次:2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 7-302-04292-6/TP·2521
印 数:0001~8000
定 价:17.00 元

《21世纪计算机专业大专系列教材》
编辑委员会名单

序

这套教材为 21 世纪高等学校计算机学科大专系列教材。

我们从 1995 年开始组织《计算机专业大专系列教材》。当时根据中国计算机学会教育委员会与全国高等学校计算机教育研究会联合推荐的《计算机学科教学计划 1993》的要求，组织了《计算机原理》等 13 本教材，并由清华大学出版社出版。这套教材出版后，受到了高等学校师生的广泛欢迎和好评。

在组织上述教材的时候，主要是按《计算机学科教学计划 1993》的要求进行的。而 1993 教学计划主要是参照美国 IEEE 和 ACM《计算机学科教学计划 1991》并结合我国高等教育当时的实际情况制定的。反映的是 20 世纪 80 年代末计算机学科的发展状况。

计算机学科是一个飞速发展的新兴学科，发展速度之快可谓一日千里。近 10 年来，计算机学科已发展成为一个独立学科，计算机本身向高度集成化、网络化和多媒体化迅速发展。

但从另一个方面来看，目前高等学校的计算机教育，总是滞后于计算机学科的发展，特别是教材建设，由于受时间和软硬条件的限制，更是落后于现实需要，大专层次的教材建设就更是如此。为了改变这种状况，高等学校的教育工作者和专家教授们应当仁不让地投入必要的时间和精力来完成这一历史使命。

为适应 21 世纪计算机教育形势的需要，在课程设置和教材建设上，必须及时进行重新调整。

为组织好这套教材，我们认真地研究了全国高等学校计算机专业教学指导委员会和中国计算机学会教育委员会联合推荐的《计算机学科教学计划 2000》和美国 IEEE 和 ACM 两个学会最新公布的《计算机学科教学计划 2001》。这两个教学计划所提供的指导思想和学科所涵盖的内容，不仅适合于大学本科，也适合大学专科的需求。关键在于，要对其内容的取舍进行认真的研究。

上述两个教学计划都是在总结了从《计算机学科教学计划 1991》到现在，计算机学科十年来发展的主要成果的基础上诞生的。

在我国的《计算机学科教学计划 1993》和美国 IEEE 和 ACM 两个学会提出的《计算机学科教学计划 1991》中，根据当时的情况，只提出了 9 个主科目。而在《计算机学科教学计划 2001》中，根据学科的最新发展状况，提出了 14 个主科目，其中 13 个主科目又为核心主科目。这 14 个主科目是：算法与分析(AL)、体系结构(AR)、离散结构(DS)、计算科学(CN)、图形学、可视化、多媒体(GR)、网络计算(NC)、人机交互(HC)、信息管理(IM)、智能系统(IS)、操作系统(OS)、程序设计基础(PF)、程序设计语言(PL)、软件工程(SE)、社会、道德、法律和专业问题(SP)。其中除 CN 和 GR 为非核心主科目外，其他 12

个主科目均为核心主科目。

将美国 IEEE 和 ACM 的教学计划 2001 与 1991 计划进行比较可看出：在 1991 计划中，离散结构只是作为数学基础提出，未被列为主科目；而在 2001 计划中，不但列为主科目、而且为核心主科目。可见，已将离散结构提升为本学科的基础。显然，离散结构在学科中地位已提升，从而说明了离散结构在本科中的重要性。

在 1991 计划中，未提及网络计算，而在 2001 计划中，不但提出，而且被列为核心主科目，以适应网络技术飞速发展的需求。

图形学、可视化与多媒体也是为适应发展需求新增的内容。

除此之外，2001 计划在下述 5 个方面作了增加或调整：

- 将程序设计语言引论调整为程序设计基础和程序设计语言两个核心主科目。显然，加强了对程序设计的要求。
- 将人—机通信调整为人机交互，反映了人—机通信的实质是人机交互，在图形界面迅速发展的今天，人机交互理论和方法的研究和应用变得十分重要。
- 将人工智能与机器人学调整为智能系统，拓宽了对智能系统的要求。
- 将数据库与信息检索调整为信息管理，因为后者不仅概括了前者，而且反映了数据库与信息检索的实质是信息管理。
- 将数值与符号计算调整为计算科学，更具有概况性。

总之，上述变化不仅更好地反映了计算机学科的发展现状，而且使 2001 教学计划具有更强的科学性和实用性。

由于我们这套系列教材，主要面向的对象是计算机专业三年制大专(高职)学生，其培养目标也属于高级技术人才的层次。他们既要有一定的理论基础(较本科弱)，又要更强调实用性，要有明确的应用方向。我们将应用方向定位在信息管理和计算机网络两个方向。这两个应用方向占计算机应用总计的百分之九十以上。

在系列教材的内容取舍上，2001 教学计划的 14 门主科目中，我们概括了除智能系统、计算科学和社会、道德、法律和专业问题之外的其他 11 个主科目。在每个主科目中，我们以其中的基本概念、基本理论和基本方法作为主线组织教材，使学生既能掌握基本的基础理论和方法，又能为他们进一步深造打下必要的基础；在信息管理和计算机网络技术两个应用方向上，他们的应用能力将得到加强。

根据上述指导思想，初步确定组织 20 本左右的教材供各高校选用。这些教材包括：《离散数学》、《计算机应用基础》、《计算机组织与结构》、《微机系统与接口技术》、《计算机网络与通信》、《网络管理技术基础》、《计算机网络系统集成技术》、《算法与数据结构》、《操作系统原理》、《实用软件工程》、《数据库原理与应用》、《管理信息系统原理与应用》、《办公自动化实用技术》、《多媒体应用技术》、《Internet 技术及其应用》、《计算机维护技术》、《C 语言程序设计》、《Java 语言程序设计》、《C++语言程序设计》、《VB 语言程序设计》、《计算机英语》等。

系列教材并不是教学计划，各高校情况不同，培养方向的侧重面也不一样，因此教学

计划也不会雷同。教材应按系列组织，反映计算机学科大专层次的总体要求，采用大拼盘结构，各校可根据自身情况选择拼用。例如，语言类教材，我们就准备了多本，各校可选择其中的一本或两本，其他依此类推。

这套教材均由高等学校具有丰富教学实践经验的老师编写。所编教材体系结构严谨、层次清晰、概念准确、理论联系实际、深入浅出、通俗易懂。

全国高等学校计算机教育研究会副理事长

课程与教材建设委员会主任

李大友

2001.2

前　言

离散数学是以研究离散结构为对象的数学课程。离散数学与计算机科学理论、应用技术有着密切的联系。离散数学中的综合、分析、归纳、演绎、递推等方法在计算机科学技术中有着广泛的应用。离散数学是理工科高等院校计算专业必修的、重要的专业基础课程。离散数学不仅为后续课程，如数据结构、操作系统、数据库原理等作必要的理论准备，而且其课程内容中所提供的一些把科学理论应用于实践的范例，可以培养学生逐步增强如何实施“科学理论——技术——生产力”转化的观念和方法，提高学生在知识经济时代中的适应能力。

离散数学的主要内容由集合论、代数结构、图论和数理逻辑等四部分构成。它具有“内容广泛、抽象理论多”的特点，在培养学生的抽象思维和创新能力方面有独特作用。

本教材是专为计算机专业专修科的学生编写的，同时也适合于高职班、各类函授大学、职工大学等成人教育的计算机专业。作者在编写过程中，充分考虑到使用对象的现有水平及其学习特点，对于传统的离散数学的内容在取舍和编排上做了精心的处理。淡化了某些理论性的证明，而注重介绍理论在实际中的应用。在教材中有大量例题，它们有层次地使学生由了解概念、深化概念，直至引发进一步思考。“深入浅出”是编写教材的指导思想，期望能得到读者的认可。

本教材是由北京工业大学计算机学院邵学才、蒋强荣、石嘉明和张秀珍编写，由邵学才对书稿作统一的处理。在编写过程中，自始至终得到了北京工业大学李大友教授的热情支持和悉心帮助，对此作者表示深切的谢意。

作者

2001.2

目　　录

第1章 集　合

集合论是现代数学的基础，几乎与现代数学的各个分支都有密切联系，并且渗透到所有科技领域。集合论的内容极其丰富，本章主要介绍朴素集合论的基本内容，包括：什么是集合以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等概念；集合的基本运算和集合代数的有关公式。

1.1 集合的基本概念

集合是具有某种特点的对象的聚合，每一个对象称为这个集合的元素。例如北京工业大学学生的全体可以构成一个集合，而北京工业大学的每一个学生就是这个集合中的一个元素。又如正整数的全体构成一个集合，而每一个正整数就是这个集合的元素。通常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 代表集合，用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 代表集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的一个元素，称 a 属于 A，并记作 $a\in A$。如果 a 不是集合 A 中的元素，称 a 不属于 A，并记作 $a\notin A$。

集合有多种表示方法，这里介绍常用的两种方法。一是列举法（或称穷举法），这种表示方法是将集合中的所有元素一一列举出来，元素之间用逗号分开，并用花括号将它们括起来。如：

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$，这表示集合 A 由 5 个元素组成，它们分别是 2，4，6，8，10。又如：$B=\{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$，这表示集合 B 由 5 个元素组成，它们分别是 a，e，i，o，u。

由此可见，$4\in A$，$a\in B$；而 $5\notin A$，$b\notin B$。

集合的另一种表示方法是特征法，它是以某个小写的英文字母来统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如：

$$C=\{x\mid x\text{ 是不大于 10 的偶数},x>0\}$$

这里，符号“|”读作“系指”，花括号内的逗号读作“并且”。因此集合 C 中的元素是一些不大于 10 的偶数，并且大于 0，或者简单地说，C 是由不大于 10 的正偶数组成。实际上集合 C 的元素应是 2，4，6，8，10。可见集合 C 和列举法中所提到的集合 A 的元素是完全相同的。又如：

$$D=\{x\mid x\text{ 是英文字母},x\text{ 是元音}\}$$

易见，D 中元素和上述集合 B 中的元素是相同的。

当两个集合 X 和 Y 有相同的元素时，称这两个集合相等，记作 $X=Y$。容易看到，上面提到的集合 A，B，C，D 中，有 $A=C$ 和 $B=D$。

有一些集合，以后常常要用到，所以用固定的符号表示之：

N 是自然数集合：0，1，2，…；

I 是整数集合：…，−2，−1，0，1，2，…；

$\mathbf{I}_+$是正整数集合：1，2，3，…；

Q是有理数集合；

R是实数集合；

C是复数集合。

一般地讲，用列举法来表示集合时，往往显得冗长而复杂，但当我们对集合的某些特征作抽象的讨论时，列举法能使问题显得直观和容易理解。

如果集合 A 中的每一个元素又都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，也可以说 A 含在 B 中，或 B 含有 A，这种关系写作

$$A \subseteq B \quad 或 \quad B \supseteq A$$

如果 A 不是 B 的子集，即在 A 中至少有一个元素不属于 B 时，称 B 不包含 A，记作

$$B \not\supseteq A \quad 或 \quad A \not\subseteq B$$

例如：设集合 $A=\{1, 3, 4, 5\}$，$B=\{1, 2, 5\}$，$C=\{1, 5\}$。易见 C 是 A 的子集，C 又是 B 的子集，但 B 不是 A 的子集，因为元素 $2\in B$ 而 $2\notin A$；同理 A 也不是 B 的子集，因为 $3\in A$ 而 $3\notin B$。

由集合间的包含关系，容易得到：

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。

这一结论在证明两个集合相等时，往往是一种有效而简便的方法。

如果 A 是 B 的子集，但 A 和 B 不相等，也就是说在 B 中总有一些元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集。记作 $B\supset A$。如集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，那么 A 是 B 的真子集。

不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$，如：

$$A = \{x \mid x 是在 2000 年跳过 2.50 米的人\}$$

由于 2000 年还没有人跳过这个高度，所以 A 是空集，即 $A=\varnothing$。

由空集的定义可知，空集是一切集合的子集。

在实际工作中，我们所研究的对象总是限制在一定的范围内。比如，要研究北京市大学生的学习情况时，研究对象可以是清华大学的学生，也可以是北京工业大学的学生，但研究的对象总是限制在北京市大学生这个范围内。在这种情况下，我们称“北京市大学生的全体”组成的集合为全集。又如在初等数论中，研究的对象是整数，在这种情况下，全体整数组成的集合就是全集，全集通常用 U 表示。

请注意，全集的概念和研究对象所处的范围密切相关，不同的情况就有不同的全集。例如，当我们研究人口问题时，全世界所有的人就构成了全集；当我们研究中国妇女的生活现状时，全中国所有的妇女构成了全集；甚至当研究的对象仅限制在一个较小的范围时，如仅研究北京工业大学一年级学生的学习情况时，北京工业大学一年级学生的全体就是全集。总之，全集是和研究对象密切相关的。简单地讲，当我们的讨论总是限制在某个集合的子集时，这个集合就是全集。

A 是一个集合，由属于全集 U 但不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 的补集，记作 $\overline{A}$ 或 $\sim A$。例如：

$$U = \{x \mid x 是北京工业大学的学生\}$$

$$A = \{x \mid x \text{ 是北京工业大学的女学生}\}$$

则 A 的补集

$$\overline{A} = \{x \mid x \text{ 是北京工业大学的男学生}\}$$

又如

$$U = \{x \mid x \text{ 是正整数}\}$$
$$A = \{x \mid x \text{ 是正偶数}\}$$

则 A 的补集

$$\overline{A} = \{x \mid x \text{ 是正奇数}\}$$

集合中的元素可以是多种多样的，因此一个集合作为另一个集合的元素是完全可以的。例如，集合 $A=\{a, b, \{c, d\}\}$，这表明集合 A 含有 3 个元素：$a, b, \{c, d\}$，这里集合 $\{c, d\}$就成为集合 A 的一个元素了。

一般地讲，从属关系“$\in$”是元素和集合之间的关系，包含关系“$\supseteq$”则是集合和集合之间的关系，但也存在着这样的情况：集合 A 属于 B，集合 A 又含在 B 中，如：

$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{a, b, \{a, b\}\}$$

这里就有 $A \subset B$ 和 $A \in B$ 同时成立。

当一个集合中的元素个数为有限时，该集合称为有限集；集合中元素的个数为无限时，该集合称为无限集。有限集 A 中元素的个数称为集合 A 的基，记作 $|A|$，如 $A=\{a, b, c\}$，则 $|A|=3$。

A 是有限集合，由 A 的所有子集作为元素而构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$。如：

$$A = \{a, b, c\}$$

则

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

又如：

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

显见，当 $|A|=3$ 时，$|P(A)|=8$；当 $|A|=4$ 时，$|P(A)|=16$，在一般情况下有：

定理 1.1.2 A 是有限集，$|A|=n$，则 A 的幂集 $P(A)$的基为 2^n。

证明 由排列组合的知识可知，

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

又由二项式定理可知，

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^n \cdot b + \cdots + C_n^{n-1} \cdot ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

特别取 $a=b=1$，则有：

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

所以可得

$$|P(A)| = 2^n$$

1.2 集合的运算

集合上的运算是以给定的集合(称为运算对象)按某种规则去确定一个新的集合(称为运算结果)。

1. 集合的并运算

定义 1.2.1 两个集合 A、B 的并记作 $A\cup B$,它也是一个集合,由所有属于 A 或者 B 的元素合并在一起而构成的,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{或} \quad x \in B\}$$

例如

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{a, b, c, d, e\}$$

则

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

又如

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

集合的运算可以用文氏图形象地表示,在图 1.2.1 中,矩形表示全集 U,两个圆分别表示集合 A 和 B,阴影部分就是 $A\cup B$。

由集合并运算的定义可知,并运算具有以下性质:

(1) $A\cup A=A$

(2) $A\cup\varnothing=A$

(3) $A\cup U=U$

(4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(5) $A\cup B=B\cup A$

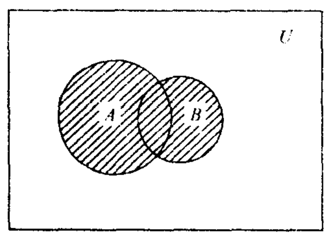

图 1.2.1

2. 集合的交运算

定义 1.2.2 两个集合 A 和 B 的交记作 $A\cap B$,它也是一个集合,由属于 A、B 两集合的所有共同元素构成,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

例如

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{a, b, d, f\}$$

则

$$A \cap B = \{a, b\}$$

又如

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

则

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

如果集合 $A \cap B = \varnothing$，也就是说 A 和 B 没有共同元素，则称 A、B 不相交，例如

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{4, 5, 6\}$$

那么 $A \cap B = \varnothing$，即 A、B 不相交。

集合的交运算的文氏图表示，见图 1.2.2，其中阴影部分就是 $A \cap B$。

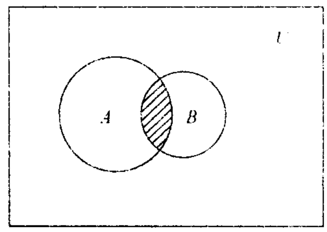

图 1.2.2

由集合交运算的定义可知，交运算具有以下性质：

(1) $A \cap A = A$

(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(3) $A \cap U = A$

(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(5) $A \cap B = B \cap A$

定理 1.2.1 设 A,B,C 为 3 个集合，则下列分配律成立：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明 这里只证第一个等式，第二等式的证明是类似的。

如果 $x \in A \cap (B \cup C)$，即 $x \in A$，且 $x \in B \cup C$，也即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$，也就是说 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$，所以 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，即有：$(A \cap B) \cup (A \cap C) \supseteq A \cap (B \cup C)$。

另外，如果 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则 $x \in (A \cap B)$ 或 $x \in (A \cap C)$，即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$，也即 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$，所以有：$x \in A \cap (B \cup C)$，于是 $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$，由此可得 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

定理 1.2.2 设 A、B 为集合，则下列关系式成立：

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

读者可以用文氏图验证之。

定理 1.2.3 设 A、B 为集合，则下列关系式成立：

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

这里 $\bar{A}$ 为 A 的补集，补集的定义可参阅 1.1 节。

定理的证明从略，读者也可用文氏图验证之。定理 1.2.2 称为吸收律；定理 1.2.3 称为摩根定律，它们在集合的运算中有较大的用途。

3. 集合的减运算

定义 1.2.3 由属于集合 A 但不属于集合 B 的那些元素构成的集合称为 A 减 B 的差，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x\in A,\ x\notin B\}$$

例如

$$A=\{a,\ b,\ c\}$$
$$B=\{a,\ b\}$$

则

$$A-B=\{c\}$$

又如

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$
$$B=\{a,\ b,\ e,\ f\}$$

则

$$A-B=\{c,\ d\}$$

再如

$$A=\{a,\ b,\ c\}$$
$$B=\{e,\ f\}$$

则

$$A-B=\{a,\ b,\ c\}$$

集合的减运算，其文氏图表示见图 1.2.3。

由减运算的定义可知，A 的补集就是全集减 A 的差，即

$$\overline{A}=U-A$$

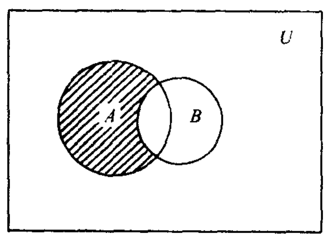

图 1.2.3

集合的减运算有以下性质：

(1) $A-A=\varnothing$

(2) $A-\varnothing=A$

(3) $A-U=\varnothing$

(4) $A-B=A\cap\overline{B}$

性质(1)，(2)，(3)是显然的，性质(4)也可由减运算的定义直接得到。

例 1 设 A、B、C 为集合，证明：

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

证明 利用性质(4)，右式

$$\begin{aligned}(A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap(\overline{A\cap C})\\&=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\\&=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\\&=\varnothing\cup(A\cap B\cap\overline{C})=A\cap B\cap\overline{C}\\&=A\cap(B-C)\end{aligned}$$