大学生概率学

李铁臣 编著

航空工业出版社

大学生学概率

李铁臣　编著

航空工业出版社

内 容 提 要

全书包括预备知识、基本概念与定义、重要定理与公式、例题分析与讲解四部分内容。其中预备知识部分，列出了学习概率所必须熟悉的集合论基础、组合论概要、Γ-函数与B-函数中的重要结论；基本概念与定义列出了100个概率论的名词、术语；重要定理与公式给出了100个概率论常用定理、公式；例题分析与讲解选择了100个典型例题并给出详细解答。

本书可供工科、财经类大学生学习概率时作为辅导资料阅读，也可供承担大学概率统计课程教学任务的教师参考。本书可说是一本别具特色的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学生学概率/李铁臣编著．—北京：航空工业出版社，2000
ISBN 7-80134-718-8

Ⅰ．大…　Ⅱ．李…　Ⅲ．概率-基本知识　Ⅳ．O211.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第68349号

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里14号　100029)
河北香河印刷厂　印刷　　全国各地新华书店经售
开本：850×1168　1/32　印张：8.5　　字数：150千字
印数：1-3000　　定价：12.00元

大学生怎样才能学好概率
——代序

李铁臣同志1965年毕业于北京大学数学力学系，所学专业为数学专业概率统计专门化。多年来他在高等工科院校从事高等数学、工程数学的教学工作。我俩在北京联合大学数学协作组共事多年，在此期间他主持了联大每年本科高等数学统考的命题工作，还和韩庆书、王勇烈等同志合作主编、出版了《高等数学学习指导》、《微积分与应用数学基础》、《高等数学解难》。《大学生学概率》是近期他为工科、财经类大学生学好《概率论》课程倾注心血而写的一本辅导教参。

《大学生学概率》一书包括预备知识、基本概念与定义、重要定理与公式、例题分析与讲解四部分内容。书中有三个"100"：100个概率论的名词、术语；100个概率论常用定理、公式；100个典型例题与详细解答，是别具特色的一本教学参考书。

李铁臣同志给我一个任务，就如何学好概率论发表点意见，由于能力、水平所限，我只能发表点粗浅的见识，供读者参考。

1. 概率论是研究随机现象的数量规律性，这与其他数学课程所研究的对象有显著的不同。它有一套特有的概念、理论和方法，学习时要注意这个特点，关注对概念、定理的理解；关注产生这些概念和方法的实际背景，通过对应用问题的处理，逐步加深对特殊规律的认识和理解。

2. 概率论所研究的对象有它的特殊性，然而在揭示其具体的数量关系时，少不了会用到前面学过的数学知识。诸如高等数学中的微积分，组合数学中的排列、组合公式，集合论中集合的运算规律，等等。在你解题中如遇到一些麻烦也无需气馁，静下心来复习一下本书提供的预备知识或其他相关的内容即可。

3. 做题。做题是学好数学课必不可少的手段，学好概率论也理应如此。做题要有一定的数量，还要照顾到不同的题型，做完题后还需对每章内容进行适当的小结，要明确每章内容中重点的概念、重点的定理和重点的计算公式及方法。遇到难题时，切不要急于求助，更不可简单地抄袭书中或别人的结果。“难点”很可能是你加深对概念、定理、方法理解的极好机遇，要把握住这个机会，冥思苦想，反复思考，直至做出满意的正确的答案。照此去做，即使实在解决不了，再求助别人帮助，也会获得难以预料的、可喜的收获。

4.《大学生学概率》是学习概率论的一本好的参考读物，它一定会对读者提供有效的帮助。我想提醒读者注意的是：任何好的读物，好的辅导教参，都是不应当代替个人学习的工具，否则，就会失去编著者的本意。因此，读者在参阅本书时需要认真、积极思考。每个例题、习题解答不可死记硬背。正确的做法是，个人先要试做，然后再参阅书中提供的解题思路和步骤，对比它与本人试做结果的异同。有了这个过程，就会使你加深对概念、定理、方法的理解，又能对正确的概念、计算方法和步骤在脑海中留下长久的、深刻的记忆。

最后，让我祝愿《大学生学概率》一书，伴你取得成功！

武继玉

2000 年 7 日于北京

目　录

预备知识

0.1 集合论基础

概率论的严格理论是建筑在集合论与测度论基础上的。工科院校的概率论课程虽然不涉及概率论的严格理论，但也离不开集合论与测度论的初步知识，为此我们在学习概率论之前有必要复习一下同学们在中学里学习过的集合论知识，并对集合代数与 σ - 代数作简要介绍。

一、集合的概念

本书用大写拉丁或希腊等字母表示集合(或简称集)，用小写字母表示集合中的元素，记号 $a \in A$ 表示元素 a 属于集合 A，而记号 $a \notin A$ 表示元素 a 不属于集合 A。

把含元素是有限多个的集称为**有限集**，否则称为**无限集**。当无限集的元素可以一一数出即排成一列时，称它为**可列(无限)集**，否则称为**不可列(无限)集**，括号中的无限二字可以省略。对有限集与可列集常用列举法表示成 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 及 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，注意列举集合的元素时不计次序但不允许重复。如 $\{1,2,3\}$ 与 $\{3,2,1\}$ 我们认为是同一个集，但不能记成 $\{1,2,2,3\}$。对不可列集常用叙述法表示成 $\{x \mid x$ 具有性质 $P(x)\}$，对有限集或可列集也可以用叙述法表示。

记号 $\{a\}$ 表示仅含元素 a 的集，称为单点集或单元素集。记号 $\varnothing$ 表示空集，即认为它是一个不含任何元素的集。

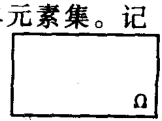

图 0-1

通常我们把研究对象的全体构成的集称为全集，

记作 Ω。并可用一个矩形来表示,如图 0-1。

任一个不为空集的集 A(当然在我们的研究对象之内)用上述矩形中的一个不一定很规则的圆(圆周及其内部)来表示,如图 0-2。

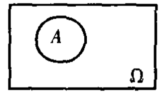

图 0-2

显然,集 A 的元素都是集合 Ω 的元素。这便引出集合的包含关系与子集的概念。一般地,设 A、B 表示两集,若 A 中的元素均为 B 中的元素,则称 A 被 B 包含或 B 包含 A,且称集 A 为集 B 的子集。由此定义,我们看出任一集 A 被全集 Ω 包含,A 是 Ω 的子集。为了研究问题方便,我们规定空集 $\varnothing$ 被任意集 A 包含,即 $\varnothing$ 为 A 的子集。集 A 被集 B 包含,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,从而 $\varnothing\subset A\subset\Omega$。"$\subset$"的连用说明包含关系有传递性,即若 $A\subset B$,$B\subset C$,其中 C 也表示一个集合,则 $A\subset C$。集 A 被集 B 包含可用图 0-3 表示。

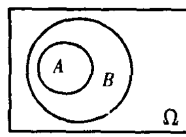

图 0-3

若 $A\subset B$,且存在 $b\in B$,但 $b\notin A$,则称 A 为 B 的真子集。若 $A\subset B$,具有上面性质的元素 b 不存在,则必有 $B\subset A$,即 A 与 B 之间具有双包含关系,此时称 A 与 B 相等,记作 $A=B$。显然,此时表示 A 与 B 具有的元素全同,实际上是同一个集合,但可能是用不同的表示方法来描述它的,如 $\{1,2\}=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$。

二、集合的运算

设 A,B 为两个集(下同),我们把由至少属于 A 与 B 之中一个的全体元素组成的集合,称为集 A 与集 B 的**并集**,简称为**并**,记作 $A\cup B$,读作"A 并 B",即

$$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A\text{ 或 }\omega\in B\}$$

其中的"或"字不可省略,它表示的含意如下:其一,$\omega\in A$ 但 $\omega\notin B$;其二,$\omega\in B$ 但 $\omega\notin A$;其三,$\omega\in A$ 且 $\omega\in B$。并集 $A\cup B$

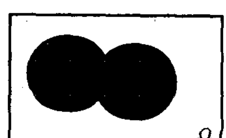

图 0-4

可用图 0－4 中的阴影部分表示。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个集(下同),我们称至少属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中一个的元素的全体组成的集合为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集,记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

设 $A_1, A_2, \cdots$ 为可列的无限个集,称之为集合序列,简称集列,可以记作 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$(下同),我们称至少属于 $A_1, A_2, \cdots$ 中一个的元素的全体组成的集合为 $A_1, A_2, \cdots$ 的并集,记作

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \text{ 或 } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

我们把同时属于集 A 与集 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**,简称为**交**,记作 $A \cap B$,或简记作 AB,读作"A 交 B",即

$$AB = A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$$

其中的"且"字可用逗号","代替。交集 AB 可用图 0－5 中的阴影部分表示。

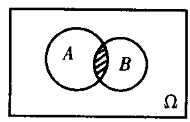

图 0－5

我们称同时属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的元素的全体为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集,记作

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

也可简记为 $A_1 A_2 \cdots A_n$;称同时属于集列 $A_1, A_2, \cdots$ 的元素的全体为 $A_1, A_2, \cdots$ 的交集,记作

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \text{ 或 } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

也可简记为 $A_1 A_2 \cdots$。

若两个集 A 与 B 没有公共元素,则 A 与 B 的交为空集,即 $AB = \varnothing$,此时称这两集 A 与 B 不相交,图 0－6 直观地表示出 A 与 B 不相交。

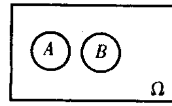

图 0－6

我们称由全体不属于集 A 的元素(但需属于全集)组成的集为 A 的**补集**或**余集**,简称**补**或**余**,记作 $\bar{A}$(有些书上记作 A' 或 A^{C} 等,本书均采

用 $\bar{A}$ 表示 A 的补集)，即有 $\bar{A}=\{\omega \mid \omega \notin A, \omega \in \Omega\}$，下面图 0－7 中的阴影部分表示了 A 的补集 $\bar{A}$。

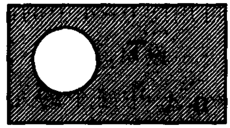

图 0－7

我们称由属于 A 而不属于 B 的元素的全体组成的集为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，即

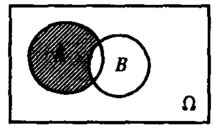

图 0－8

$$A-B=\{\omega \mid \omega \in A, \omega \notin B\}$$

图 0－8 中的阴影部分表示 $A-B$。

显然由此图还可看出有 $A-B=A\bar{B}$。

求集合的并、交、补、差这几种运算，服从以下规则：

规则 1(交换律)对任意两集 A,B，有

$$A \cup B=B \cup A$$
$$AB=BA$$

规则 2(结合律)对任意三集合 A,B,C(下同)，有

$$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)=A \cup B \cup C$$
$$(AB) C=A(BC)=ABC$$

规则 3(分配律)

$$A(B \cup C)=AB \cup AC$$
$$A \cup BC=(A \cup B)(A \cup C)$$
$$A(B-C)=AB-AC$$

规则 4(幂等律)对任意集 A，有

$$A \cup A=A$$
$$AA=A$$

规则 5(复原律)对任意集 A，有

$$\overline{(\bar{A})}=A$$

规则 6(互补律)

$$\bar{\Omega}=\varnothing$$
$$\bar{\varnothing}=\Omega$$

规则 7(补集的运算性质)

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$A \bar{A} = \varnothing$$

规则 8(全集的运算性质)

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A\Omega = A$$

规则 9(空集的运算性质)

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A\varnothing = \varnothing$$

规则 10(吸收律)

$$A(A \cup B) = A$$

$$A \cup AB = A$$

规则 11(De Morgen 律)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A}\,\bar{B}$$

$$\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

规则 12(对偶原理)可以推广到有限集

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

及可列集

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$$

以上这些规则以及并、交、补、差的性质均可由定义直接证明，可以参看任何一本“集合论”的书，这里就不作证明了。下面举例说明如何应用这些规则与性质来化简或证明集合关系式。

例 证明下列诸条件是等价的：

1) $A \subset B$;

2) $AB = A$;

3) $A \cup B = B$;

4) $A - B = \varnothing$;

5) $\bar{A} \cup B = \Omega$;

6) $\bar{A} \supset \bar{B}$

证 1)⇒2):设 $A \subset B$

若 $\omega \in A$,则 $\omega \in B$

从而 $\omega \in AB$

$\therefore \quad A \subset AB$

又 $A \supset AB$

$\therefore \quad A = AB$

即 $AB = A$

2)⇒3):设 $AB = A$

若 $\omega \in A \cup B$,则 $\omega \in A$ 或 $\omega \in B$

当 $\omega \in A$ 时,

$\because \quad AB = A$

$\therefore \quad \omega \in AB$

从而 $\omega \in B$

$\therefore \quad A \cup B \subset B$

又 $A \cup B \supset B$

$\therefore \quad A \cup B = B$

3)⇒4):设 $A \cup B = B$

若 $\omega \in A - B$,则 $\omega \in A$ 但 $\omega \notin B$

$\because \quad A \cup B = B$

$\therefore \quad \omega \in B$

这与 $\omega \notin B$ 矛盾,

$\therefore$ 不存在 $\omega \in A - B$

从而 $A - B = \varnothing$

4)⇒5)：设 $A-B=\varnothing$

$\because\quad A-B=A\bar{B}$

$\therefore\quad A\bar{B}=\varnothing$

$\overline{A\bar{B}}=\overline{\varnothing}$

$\because\quad \overline{A\bar{B}}=\bar{A}\cup B$

$\quad\quad\overline{\varnothing}=\Omega$

$\therefore\quad \bar{A}\cup B=\Omega$

5)⇒6)：设 $\bar{A}\cup B=\Omega$

若 $\omega\in\bar{B}$，则 $\omega\notin B$

而 $\omega\in\Omega$

$\because\quad \bar{A}\cup B=\Omega$

$\therefore\quad \omega\in\bar{A}\cup B$

又$\because\quad \omega\notin B$

$\therefore\quad \omega\in\bar{A}$

故 $\bar{B}\subset\bar{A}$

即 $\bar{A}\supset\bar{B}$

6)⇒1)：设 $\bar{A}\supset\bar{B}$

若 $\omega\in A$，则 $\omega\notin\bar{A}$

$\because\quad \bar{A}\supset\bar{B}$

$\therefore\quad \omega\notin\bar{B}$（因为否则 $\omega\in\bar{B}$ 从而 $\omega\in\bar{A}$ 与 $\omega\notin\bar{A}$ 矛盾）

$\therefore\quad \omega\in B$

故 $A\subset B$。

我们把由集 A 与集 B 的元素构成的序对的全体组成的集称为 A 与 B 的直积（集）或笛卡尔乘积（集），记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

类似地，我们称

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in$

$A_n\}$

为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的直积，这里 $n \geqslant 2$。

我们一般用 A^n 表示 $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n个A}$，即

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A$$
$$= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in A, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

这里 $n \geqslant 2$。

注意：$A^2 = A \times A$ 而 $A^2 \neq A \cap A = AA = A$

设 Ω 为全集，也称 Ω 为空间，而称直积 $\Omega^n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega}_{n个\Omega}$ 为 n 维空间。例如，我们熟悉的二维空间 R^2，三维空间 R^3 也就是二维欧几里得空间、三维欧几里得空间，其中 R 为实数集，即

$$\mathrm{R} = (-\infty, +\infty) \doteq \{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{R} \times \mathrm{R} = \{(x, y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$$

$$\mathrm{R}^3 = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R} = \{(x, y, z) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty\}$$

三、集合代数

在集合论中，我们还要研究以集合为元素的集。

我们常把以集合为元素的集称为**集类**，简称为**类**，也称为**集**，而用花体字母如 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{F}$ 等表示。

由一集合 A 的所有子集（包括空集 $\varnothing$ 及集 A 本身）为元素所组成的集类，称为集 A 的幂集，记作 $\rho(A)$ 或 2^A。

例如，设 $A = \{a, b, c\}$，则有

$$\rho(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

若集合 A 为有限集，则 $\rho(A)$ 亦为有限集，如 A 有 n 个元素，则 $\rho(A)$ 有

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$$

个元素，其中 C_n^k 为从 n 个不同元素中取出 k 个的组合数。