现代数学丛书

李尚志 著

典型群的子群结构

SUBGROUP STRUCTURE OF CLASSICAL GROUPS

LI SHANGZHI

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

典型群的子群结构

李尚志　著

上海科学技术出版社

Modern Mathematics Series

SUBGROUP STRUCTURE OF CLASSICAL GROUPS

Li Shangzhi

Shanghai Scientific & Technical Publishers

内 容 提 要

典型群的子群结构是群论研究中的一个重要课题.本书主要介绍作者在这一方向上的研究成果:作为对任意体上典型群中极大子群的可能类型研究的一项重要进展,定出了典型群中正规化非纯量可约子群或非纯量可解子群的极大子群的可能类型;借助于典型群中根子群生成的不可约子群分类的知识,并利用矩阵“打洞”技巧,对典型群中若干类型的子群的所有扩群作出了完全的分类,并作为主要结果的推论,得出了这些子群成为极大子群的条件.

本书供数学研究工作者;高等学校数学专业的教师、研究生、高年级学生学习参考之用.

责任编辑 赵序明

·现代数学丛书·

典型群的子群结构

李尚志 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

南京理工大学激光照排公司照排

新华书店上海发行所经销 常熟印刷四厂印刷

开本 787×1092 小 1/16 印张 29 字数 378,000

1998年11月第1版 1998年11月第1次印刷

印数 1-1200

ISBN7-5323-4628-5/O·213

定价:50.60元

Subgroup Structure of Classical Groups

Li Shangzhi

Abstract

It is an important topic to investigate the subgroup structure of classical groups. The main purpose of this book is to introduce the author's results in the research in this direction. As the first step in determining the possible types of maximal subgroups in classical groups over arbitrary fields or division rings, all the classes have been classified, of the maximal subgroups which normalize nonscalar reducible subgroups or normalize nonscalar solvable subgroups. All the overgroups of certain classes of subgroups have been classified, by using the knowledge of the classification of irreducible subgroups generated by root subgroups, and by using the techniques of making zeroes in matrices. From the main results it follows the conditions of the maximality of the subgroups in the classes we deal with.

出 版 说 明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价.原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念.由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿.

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作，充实编委会的力量.考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨.

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员.编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作.

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流.

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》,我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导,并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见.

上海科学技术出版社

引　　言

典型群的子群结构，特别是典型群的极大子群，是群论研究的重要课题之一. 这一研究的目标当然是希望定出所有典型群的所有极大子群. 但这一目标至少在近期看来很难实现. 因此，群论学者们就希望先做一些较有可能做出的事情，一步一步向上述最终目标接近. 比如说，先对某些特定类型的极大子群作出完全的分类，或先对某些类型的典型群作出极大子群的分类，或先研究某些特定类型的子群是否是极大子群，等等. 在这一方向上最重要的成果，首推 1984 年 M. Aschbacher 的纲领性论文[1]中关于有限典型群的极大子群分类的定理. 在这篇论文中，定义了有限典型群的 8 类子群 $C_1 \sim C_8$，并且证明了：有限典型群的极大子群，或者属于这 8 个类型之一，或者是非交换的几乎单群. 这样，就把对有限典型群的极大子群分类的研究归结为两件事：一是验证这 8 类子群的极大性，二是定出几乎单群的极大子群. 由于这个定理以及 P. Kleidman-M. Liebeck[30]、G. Seitz[65]等在这个定理所指引的方向上的一系列工作，有限典型群的极大子群的分类已经有希望完成.

对任意域或任意体上的典型群，也可以类似地定义 $C_1 \sim C_8$ 等 8 个类型的子群，并研究它们的极大性，这构成了本书的主要内容. 另一件重要事情，是将 Aschbacher 的定理向任意域或任意体上的典型群推广，对所有这些典型群的极大子群的可能类型做出一定程度的归类. 最好是能像 M. Aschbacher 对有限典型群所作的那样，在给出任意域或任意体上典型群的若干有明确定义的子群类型之后，证明这些类型之外的极大子群一定是非交换的几乎

单群.本书第 2 章在这一方向上作了初步的努力，并且有一些重要的进展，但离最后完成这一工作还有相当距离.

作为本书的预备知识，第 1 章不加证明地罗列了体上典型群的一些基本知识和要用到的主要性质.这些性质的证明可以在典型群的教科书（例如文献[15]或文献[6]）中找到.这一章的另外一个目的，是提供一些记号供全书使用.

本书的主要研究对象是典型群的子群，而关于子群类型的知识在典型群的教科书中涉及得不多.因此，第 2 章的前三节介绍了关于体上典型群的子群类型的一些知识，以作为理解全书的基础.第 2 章中 § 2.4～§ 2.7 这四节是对推广 Aschbacher 定理作出的努力.我们的基本思路是将典型群 G 作用的空间 V 看作 G 及其子群作用下的模，通过考察这种模的子模结构来获得关于 G 的子群类型的知识.因此，作为这方面的基础，又在 § 2.4 和 § 2.5 中介绍了关于模的一些知识.在 § 2.6 和 § 2.7 中包含了在推广 Aschbacher 定理方面做出的进展，分别定出了 V 上典型群中这样的极大子群 M 的可能类型：M 正规化某个非纯量可约子群或非纯量可解子群.这样的 M 组成了子群类型 C_1、C_2、C_4、C_6 的全部及 C_3、C_5 的一部分.第 2 章的最后一节概述了本书以后各章将采用的主要方法：几何方法和矩阵方法.

从第 3 章到第 8 章分别对各具体的子群类型进行研究.其中包含了对任意域或任意体上 $C_1 \sim C_8$ 大多数类型的子群的极大性的验证，但又不限于此.事实上，我们对子群类型 $C_1 \sim C_8$ 的定义不限于极大子群，而是一些可以明确构造出来的子群.这些子群所涉及的参数满足一定条件时才成为极大子群.对每一个子群类型，我们定出其中每个成员 N 在典型群中所有的扩群，同时也就作为推论得出了 N 的正规化子 M 成为极大子群的条件.

第 3 章研究了各类典型群中由根子群生成的不可约子群的可能的类型.一方面，这一问题在典型群的研究中有着它本身的重要意义，是很多群论学家感兴趣的课题.但它在本书中还有另一个重要意义：它是研究各类子群的扩群的一个重要工具.事实上，C_1、

C_2类子群 N(即可约子群和非本原子群),以及一部分 C_8 类子群(一类典型群中包含的另一类典型群)往往本身就含有根子群,它们的扩群当然也含有根子群,因而可以直接利用含根子群的子群的知识来得出 N 的扩群 X 的可能类型. 本书§3.6、§3.7 中正是利用根子群的知识研究了 C_1、C_2 类子群的极大性. 而在第 4 章则主要利用根子群的知识研究了一类典型群在另一类典型群中的扩群. 至于其余各类子群,它们本身往往不含典型群的根子群,但我们千方百计证明它们的扩群含有根子群,最后仍然利用根子群的知识来定出这些扩群的可能类型.

典型群的根子群都是与空间的向量联系起来的,群元素 g 对根子群作共轭,大体上相当于 g 作用于相应的向量. 第 3 章和第 4 章以研究根子群与向量之间的对应关系作为主要方法是几何方法. 而在第 6、7、8 各章中研究 C_3、C_4、C_5 的扩群则主要是利用矩阵方法. 在这几章中,一旦在扩群中找出了一个根子群,就主要利用关于根子群的知识得出扩群的类型. 但是,怎样在扩群中寻找根子群? 我们主要采用的是"矩阵打洞"的方法. 根子群中的元素,即根元素,从矩阵上看,就是和单位阵最接近的矩阵. 为了在子群 N 的扩群 X 中找出根元素,我们先从较为一般的 $g \in X$ 出发,通过用群 $\langle N,\ g\rangle$ 中的矩阵对 g 作变换,使 g 中出现尽可能多的零元素,这种在矩阵中产生"0"的技巧,我们叫做"打洞". "洞"打得越来越多,得到的矩阵就越来越接近于单位阵,最后就得到了根元素,进而得到了根子群. 这就是我们的主要思想方法.

第 6、7、8 各章分别研究 C_3、C_4、C_5 各类子群,即:扩体上空间结构的稳定子群,张量积结构的稳定子群,基础域的子域或子环上的群. 我们的主要目的是定出这些子群在典型群中的所有扩群的可能类型,也包含了对这些子群的极大性的验证. 这些子群虽然各有特殊性,但我们在研究它们的扩群时采用的方法却非常相似,很多推理过程基本上是相同的. 我们把找这些类型的子群的扩群问题抽象成一个更一般的问题:

对环 R 及其子体 D,找出 D 上的 n 维典型群 $N \leq \mathrm{SL}(n,\ D)$

在 GL(n,R) 中的扩群.

这样一般的问题当然很难一般地彻底解决,但我们却可以对它进行一定的讨论,这就构成了第 5 章的内容.第 5 章虽然不是针对任何一类具体的子群而设的,但却对第 6、7、8 章研究各类子群的扩群中几个主要的步骤作了统一的处理,得出的结论应用于以后各章.第 5 章作的一件重要的事情是:假如已经在扩群 X 中找到了具有最初几个“洞”(即零元素)的矩阵 g_1,怎样由这些已有的“洞”扩大战果,打出更多的“洞”,直到找出一个根子群来.至于怎样找到这个具有最初几个“洞”的 g_1,那就是以后几章各自的事了.

本书在对主要的结果进行证明的时候,着重于讲清证明的主要思想方法和技巧,特别是那些多次用到的方法和技巧.有些特殊情形反而还需要特别繁琐的讨论和处理,而这些处理的细节并不具有普遍意义,在书中就略去了,感兴趣的读者可以参看有关的参考文献.

在完成这本书稿时,作者首先要感谢我的老师曾肯成教授,本书所涉及的作者本人的工作,是在他的指导下开始进行并取得成果的.段学复院士和万哲先院士的支持和帮助,也起了重要作用.本书的许多工作是作者与查建国教授合作取得的,第 3 章还有一项重要结果是任金江博士作出的.作者还得益于在访问美国 University of Oregon 及 California Institute of Technology 期间与 G. Seitz 教授和 M. Aschbacher 教授的讨论,以及在访问英国 University of Newcastle 期间与 R. H. Dye 教授及 O. H. King 博士的讨论.在此一并对他们表示感谢.

本书所涉及的工作是在国家自然科学基金和国家教委高校博士点专项科研基金资助下取得的.并曾获得国家教委资助优秀青年教师基金及中国科学院数学特别支持费的资助.

李尚志

1997 年 1 月于中国科学技术大学

目　录

CONTENTS