弹塑性有限变形理论和有限元方法

孟凡中 编著

清华大学出版社

弹-塑性有限变形理论和有限元方法

孟凡中　编著

清 华 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书叙述弹-塑性有限变形（大位移变形）理论及按之建立的有限元方法，考虑了金属塑性变形过程的物理和几何的非线性性质，用以模拟和分析塑性成形过程。内容包括：张量分析基础、有限变形理论、塑性理论和变分原理(包括有限变形变分原理)、一般的弹-塑性有限元法和大位移变形时的拉格朗日和欧拉两种有限元方法。

本书可供从事金属塑性成形理论和塑性力学研究者及有关工程技术人员参考，也可供高等院校有关专业研究生使用。

弹-塑性有限变形理论和有限元方法

孟凡中 著

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

八九九二〇部队印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/16 印张：$16^3/_4$ 字数：420千字

1985年9月第一版 1985年9月第一次印刷

印数：00001～10000

统一书号：15235·148 定价：2.90元

序　　言

金属塑性成形技术是一种被广泛采用的，对金属材料进行加工，使之成材或成零件、毛坯的方法。用这种方法加工得到的制件不仅性能好，还可以节约原材料。有些制件甚至必须用这种方法来制造。随着生产发展的需要，越来越多的塑性成形生产问题需要从理论上来进行分析。要求了解金属塑性成形过程中的流动规律，应力和应变分布的情况。有时还要求了解残余应力和残余变形问题。以便能更好地制定工艺规程，设计工具、模具和装备，并控制产品的质量。

金属塑性成形实际上是一个非常复杂的大变形过程，更确切地说是一个大的弹-塑性变形过程。它既是物理非线性的，又是几何非线性的。而且它的边界条件往往也很复杂。以往在处理这种问题时多按塑性理论用解析的方法来求解。由于它的复杂性，以及数学工具上的困难，不得不作较多的简化和假设。这就使得理论分析的结果具有较大的局限性，难以得出整个变形过程的全解，在实际应用上受到较多的限制。特别是在处理残余应力和残余变形的问题时，遇到了更大的困难。

随着计算技术和计算机应用的发展以及弹性有限元方法已经比较成熟地、广泛地用来解决实际的工程问题，近来发展了用有限元法在计算机上对金属塑性成形过程进行模拟和分析。计算技术上则用数值方法来处理这种非线性的大变形，即有限变形的问题。当然，这就涉及到有限变形理论（几何非线性）、塑性理论（物理非线性）和按有限变形理论建立起来的弹-塑性有限元方法问题。

在此，主要是按照对金属塑性成形过程分析的需要来讨论有限变形弹-塑性有限元方法。在讨论这些问题时离不开张量分析这个数学工具，因此本书中列入了张量分析基础方面的内容。有限变形理论、弹-塑性本构关系和涉及到有限变形的变分原理是我们讨论有限元法应用于金属塑性成形问题的理论基础。在这个基础上，讨论了弹-塑性小位移变形时的有限法和有限变形的两种弹-塑性有限元法：拉格朗日描述的有限元法和欧拉描述的有限元法。

对金属塑性成形过程的分析也可以用在计算上较为省时的刚-塑性有限元法。但这种方法不能计算残余应力和残余变形。本书中没有专门进行讨论。只不过在附录中列入了刚-塑性材料的变分原理。弹-塑性有限元法和刚-塑性有限元法是不同的，但从方法上来说，它们有很多类似之处。

近代，国外有越来越多的学者从事这方面的研究工作，并取得不少有实际意义的结果。近年来，国内也有一些研究者在进行这方面的工作。虽然它还不像弹性有限元法那样成熟和得到广泛的应用。但是，由于它在理论上很有希望，在具体计算上可以用计算机这个工具，能够得出金属塑性成形过程，包括卸载在内的整个过程的全解，即能够计算整个过程中质点的流动规律、应力和应变的分布、卸载后的残余应力和残余变形的分布。也就是可以对整个金属塑性成形过程进行模拟。现在，这种方法在生产上也开始有了一些应用，它正处于蓬勃发展的阶段。

本书是作者学习研究这方面的问题整理出的结果。把它复印出来是为了互相切磋共同提

高。为发展我国的塑性加工理论，为解决实际的生产工程问题提供一些线索和方便。但是由于本人水平的限制，错误和不当之处在所难免，请读者批评指正。

写本书时，得到了清华大学徐秉业同志和北京钢铁学院乔端同志的热情帮助，他们提出了很多宝贵的意见。西北工业大学的雷沛同志和许多其他同志也给予了热情的鼓励和帮助，在此一并表示深深的谢意。

孟凡中

于清华大学　1982.10

目　　录

符　　号

a_i	矢量的协变分量
a^i	矢量的逆变分量
$A_{ijk\cdots}$	协变张量
$A^{ijk\cdots}$	逆变张量
$A^{k}{}_{ij\cdots}$	混合张量
g_i	坐标基(基)
g^i	互易的坐标基(互易的基)
g_{ij}, g^{ij}, g^i_j	度量张量
δ_{ij}, δ^{ij}, δ^i_j	克罗内克尔记号(Kronecker delta)
e_{rst}, e^{rst}	排列符号(permutation symboe),排列张量
$\Gamma_{k,ij}$	第一类克里斯托弗(Christoff)记号
Γ^k_{ij}	第二类克里斯托弗记号
R^i_{pst}	黎曼-克里斯托弗 (Riemann-Christoff) 曲率张量
∇	汉密尔顿算子 (Hamiltonian)
$\nabla_k a^j$, $a^j\|_k$; $\nabla_k T^{\alpha_1\alpha_2\cdots}_{\beta_1\beta_2\cdots}$; $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots}_{\beta_1\beta_2\cdots}\|_{kj}$	张量的协变导数
$\|J\|$	雅可比行列式(Jacobian)
V	物体体积
S	物体表面积
ρ	物体的密度
F_i	物体的单位体积体力的分量
∂_k	$\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$
∂_0	$\partial_0 = \dfrac{\partial}{\partial t}$
$\dfrac{D}{Dt}$	物质导数
u_i	质点的位移分量

v_i	质点的位移速度分量
E_{ij}	格林(Green)应变张量
e_{ij}	阿尔曼斯(Almansi)应变张量
ω_{ij}	旋转张量
ω_k	对偶矢量的分量
v_{ij}	应变速率张量
Ω_{ij}	旋转速率张量
σ_{ij}	柯西(Cauchy)或欧拉(Euler)应力张量
S_{ij}	克希荷夫应力张量
T_{ij}	拉格朗日应力张量
σ_{ij}^{∇}	久曼应力变化率
$^T(\sigma_{ij}^{\nabla})$	屈斯笛尔(Truesdell)应力变化率
$\dot{S}_{ij}$	克希荷夫应力变化率
$\dot{T}_{ij}$	拉格朗日应力变化率
σ'_{ij}	应力偏量
e'_{ij}	应变偏量
σ	平均应力
e	平均应变
e_i	等效应变
de_i	等效应变增量
de_i^p	塑性等效应变增量
σ_i	等效应力
$d\sigma_i$	等效应力增量
E	弹性模量
G	剪切弹性模量
K	体积变形弹性模量
μ	波桑比
H	材料的硬化系数
$d\lambda$	应变增量与应力偏量间的比例因子
$\dot{\lambda}$	应变速率与应力偏量间的比例因子
$\{\psi\}$	单元节点位移列向量
$\{\dot{\psi}\}$	单元节点速度列向量
$[N]$	形函数矩阵
$[B]$	几何矩阵
$[C]_e$	弹性本构矩阵
$[C]_p$	塑性本构矩阵
$[S]_e$	弹性应力矩阵
$[S]_p$	塑性应力矩阵
$[K]_e^{(e)}$	弹性区单元刚度

$[K]_e^{(p)}$	塑性区单元刚度
$[K]_e^{(ep)}$	过渡区单元刚度
$[K]$	物体的总刚度

第一章　张量分析基础

1. 标量和矢量

由一个具有实数值的、空间一点的函数所确定的物理量称为标量。如果标量与坐标系的选择无关，则称为绝对标量或不变量。例如物体的质量、温度、力所做的功等。除了绝对标量外，还有与坐标选择有关的标量，称为非绝对的标量。如后面将要经常用到的张量的分量，就是非绝对的标量。

矢量是可以用数值（模）和在空间的一定方向表征的物理量。某一物理量如果它是矢量，除了应具有数值和空间一定方向外，它还必须具有由矢量的代数运算规则所确定的许多特性。因此，一个只有数值和空间一定方向的物理量尚不足以列入矢量类。

矢量可以分为定位矢量、滑动矢量和自由矢量。固结于空间某一点（作用点）的矢量称为定位矢量或固定矢量。如质点的速度、加速度和作用于一点的力是定位矢量。沿着空间某一直线，但不具有一定作用点的矢量称为滑动矢量。如作用于刚体上的力和刚体的瞬时角速度。无一定作用点的是自由矢量。如力偶矩。

矢量的代数运算规则对所有的自由矢量都一样，与这些矢量的物理性质无关。这可进一步推广到张量计算的一切运算中。因此，只要以任一种特定类型的矢量就可建立其代数运算规则。

自由矢量的运算规则也可以应用于共点的定位矢量和共线的滑动矢量。运算的结果仍分别是共点的定位矢量和共线的滑动矢量。矢量的代数运算规则并不适用于具有不同作用点的诸定位矢量。显然，把作用在互不相关的两点上的诸力进行代数运算是毫无意义的。

一切矢量，不管它的物理特性如何，它必须遵守矢量的多边形规则，如图（1.1.1）所示。这个规则确定了矢量的第三个必要条件。一般矢量加法的平行四边形规则是矢量多边形规则的特例。矢量的多边形规则实际上就是矢量的加法运算规则。矢量减法是矢量加法的逆运算。

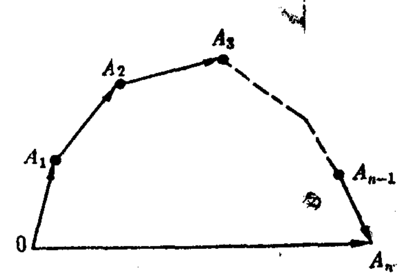

图1.1.1　矢量的多边形规则

（1）矢量的标积

空间某一 x 轴的方向将由轴的单位矢量来确定。以 g_i 表示 x_i 轴的单位矢量，以 a_i 表示矢量 a 在 x_i 轴上的投影，称 a_i 为矢量 a 与单位矢量 g_i 的标积：

$$a_i = a \cdot g_i = |a| \cos(\widehat{a, x_i}) \tag{1.1.1}$$

式中，$\cos(\widehat{a, x_i})$ 为矢量 a 和 g_i 的正方向的夹角的余弦。

同样可确定两个任意矢量 a 和 b 的标积。矢量 a 在矢量 b 方向的投影 a_b 为

$$a_b = a\cdot\frac{b}{|b|} = |a|\cos(\widehat{a,b})$$

即

$$a\cdot b = |a||b|\cos(\widehat{a,b}) = a_b|b| = b_a|a| \tag{1.1.2}$$

矢量 a 和 b 的正交条件是

$$a\cdot b = 0 \qquad (\text{当} a\neq 0,\ b\neq 0) \tag{1.1.3}$$

标积具有明显的可交换性，$a\cdot b = b\cdot a$。

矢量之和在某轴上的投影等于诸分矢量在该轴上投影的代数和。这样，可得出标积具有分配性。

两矢量标积得到的是一个标量。

(2)矢积

设有二矢量 a 和 b。由矢量 a,b构成平行四边形 $ABCD$ 的自由平面元素（图1.1.2），以矢量 a 的正向到矢量 b 的正向来确定右手螺旋规则的正向。按右手螺旋规则确定的，与平行四边形 $ABCD$ 正交的矢量 c 称为矢量 a 和 b 的矢积。

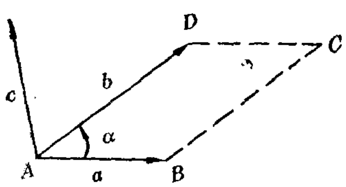

图1.1.2 矢积

$$c = a\times b \tag{1.1.4}$$

由矢积得到的矢量 c 的模等于由矢量 a，b 构成的平行四边形面积的大小，即

$$|c| = |a||b|\sin(\widehat{a,b}) = |a||b|\sin\alpha \tag{1.1.5}$$

显然，两自由矢量的矢积仍是自由矢量。

若矢量 a 和 b 共线则矢积 c 为零。交换律对矢积不成立。由矢积的定义知

$$a\times b = -b\times a$$

矢积具有分配性。设矢量 d 是矢量 a 和 b 之和，有

$$d = a+b$$

$$d\times c = (a+b)\times c = a\times c + b\times c$$

(3)矢量的组合运算

A）考察矢量 a，b，c 的混合积 V

$$V = (a\times b)\cdot c \tag{1.1.6}$$

这个积 V 代表由矢量 a，b，c 构成的平行六面体的体积，如图（1.1.3）所示。V 的符号与矢量 a，b，c 间的相互位置有关。若矢积（$a\times b$）和矢量 c 之间夹角 $\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $V>0$。这时，三矢量 a，b，c 称为右旋系。若 $\beta>\frac{\pi}{2}$，则 $V<0$。这时，称为左旋系。

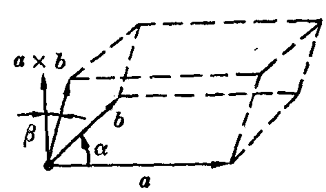

图1.1.3 混合积

通过实际的验算可证明，若循环置换矢量 a，b，c

的次序，得到次序为 b，c，a 或次序为 c，a，b 的混合积，如原来 a，b，c 是右旋系，依次置换后仍为右旋系。如原来为左旋系，依次置换后仍为左旋系。由此，

$$\begin{aligned} V&=(a\times b)\cdot c \\ &=(b\times c)\cdot a \\ &=(c\times a)\cdot b \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

显然，若矢量 a，b，c 共面，即位于同一平面，则

$$V=(a\times b)\cdot c=0 \tag{1.1.8}$$

反之，若 $V=0$，则矢量 a，b，c 共面。

B）考察二重矢积

$$d=a\times(b\times c) \tag{1.1.9}$$

按矢积的定义，矢量（$b\times c$）是垂直于矢量 b 和 c 构成的平面元素的自由矢量。而矢量d又是垂直于矢量 a 和($b\times c$)的自由矢量（图1.1.4）。因此，矢量 d 和矢量 $b\cdot c$ 是共面的。由共面条件（1.1.8）知

$$(b\times c)\cdot d=0$$

这样，可将矢量 d 分解为沿矢量 b 和 c 方向的分量，有

$$d=\beta b+\gamma c \tag{1.1.10}$$

其中，β 和 γ 是标量。

另外，矢量 d 垂直于矢量 a，有 $d\cdot a=0$，所以有

$$d\cdot a=\beta b\cdot a+\gamma c\cdot a=0$$

即

$$\frac{\beta}{c\cdot a}=-\frac{\gamma}{b\cdot a}=\lambda \tag{1.1.11}$$

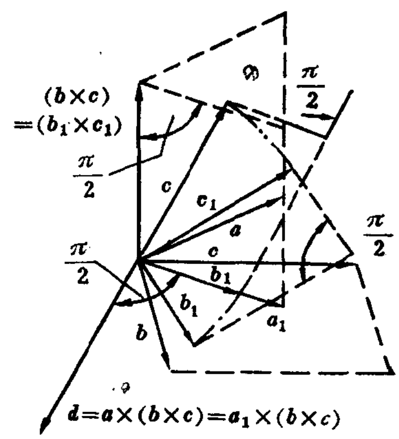

图1.1.4 二重矢积

把（1.1.11）式代入（1.1.10）式，则

$$d=\lambda\{b(a\cdot c)-c(a\cdot b)\} \tag{1.1.12}$$

其中 λ 是尚待确定的标量。现在我们来确定 λ。

根据矢积的性质，在保持矢量 b，c 的相互位置和它们所构成平行四边形面积大小的条件下，用互相垂直的矢量 b_1 和 c_1 来代替 b 和 c，而不改变矢量（$b\times c$），从而也不改变 d 矢量。同样地，用垂直于矢量（$b\times c$）的矢量 a_1 来代替矢量 a，在不改变它们构成的平行四边形面积的条件下，不会改变 d，如图（1.1.4）所示。这时，a_1 和 $b\cdot c$ 是共面的。再将 b_1和 c_1 构成的矩形在它原来的平面内转动，使得 b_1 方向与 a_1 方向一致，于是必定 c_1 方向与 d 的方向相反且在一条直线上。经过这样一些变换后有

$$d=-c_1|a_1||b_1| \tag{1.1.13}$$

另一方面，由（1.1.12）式又可得到

$$d=\lambda\{b_1(a_1\cdot c_1)-c_1(a_1\cdot b_1)\} \tag{1.1.14}$$

由于 $b_1\perp c_1$，$a_1\perp c_1$，故 $a_1\cdot c_1=0$，于是（1.1.14）式变成

$$d=\lambda\{-c_1(a_1\cdot b_1)\}=-\lambda c_1|a_1||b_1| \tag{1.1.15}$$

对比（1.1.13）式和（1.1.15）式得到

$$\lambda=1 \tag{1.1.16}$$

最后将 $\lambda=1$ 代入（1.1.14）式得到二重矢积为

$$d=a\times(b\times c)=b(a\cdot c)-c(a\cdot b) \tag{1.1.17}$$

自由矢量的二重矢积仍为自由矢量。

C）乘法的组合运算

根据混合积和二重矢积的运算规则，我们可以计算各种复杂的积。例如考察乘法的组合运算，

$$e=(a\times b)\cdot(c\times d) \tag{1.1.18}$$

根据（1.1.17)式及标积的可交换性有

$$e=c\cdot\{d\times(a\times b)\}$$

由（1.1.17）式得到

$$\begin{aligned}e&=c\cdot\{a(d\cdot b)-b(d\cdot a)\}\\&=(c\cdot a)(d\cdot b)-(c\cdot b)(d\cdot a)\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

其中 e 为标量。

（4）矢量的“除法”

矢量的“除法”是矢量的标积和矢积的逆运算。现分别讨论之。

A）标积的逆运算

考察矢量方程

$$a\cdot x=p \tag{1.1.20}$$

设矢量 a 和标量 p 为已知，由（1.1.20）式的方程来确定矢量 x 即为标积的逆运算。

不难看出：方程（1.1.20）的诸解之一为

$$x=p\frac{b}{a\cdot b} \tag{1.1.21}$$

其中，b 可以是不垂直于 a 的任意矢量。其次还可以看出，将垂直于 a 的矢量加在矢量 x 上仍满足方程（1.1.20)。其普遍解是

$$x=p\frac{b}{a\cdot b}+c\times a \tag{1.1.22}$$

式中 b 是不垂直于 a 的任意矢量，c 是任意的矢量。所以方程(1.1.20)的逆运算是不定的。

B）矢积的逆运算

考察矢积方程

$$a\times x=q \tag{1.1.23}$$

设矢量 $a\cdot q$ 为已知，由方程（1.1.23）求矢量 x 是矢积的逆运算。

从方程（1.1.23）可看出，矢量 a 与矢量 q 正交，有

$$a\cdot q=0 \tag{1.1.24}$$

设方程（1.1.23）的解 x 具有下列形式：

$$x=b\times d \tag{1.1.25}$$

其中矢量 b，d 之中的一个可任意选择。把（1.1.25）式代入（1.1.23）式，并按二重矢积的运算规则有

$$q=a\times(b\times d)=b(a\cdot d)-d(a\cdot b) \tag{1.1.26}$$

由（1.1.24）式知矢量 a 与 q 正交，是不共线的。我们这样选择矢量 b，d，使 b 与 q 共线，且 $a\cdot d\neq 0$。由于 b 与 q 共线，而 $a\cdot q=0$，于是 $a\cdot b=0$。这样，由（1.1.26）式得到

$$b=\frac{q}{a\cdot d} \tag{1.1.27}$$

把（1.1.27）式代入（1.1.25）式得到

$$x=q\times\frac{a}{a\cdot d} \tag{1.1.28}$$

式中矢量 d 是满足 $a\cdot d\neq 0$ 的任意矢量。由于 a 和 q 是正交的，$a\cdot q=0$。所以在矢量 x 上加上与矢量 a 共线的任意矢量，而不影响方程（1.1.23），所以方程（1.1.23）的一般解为

$$x=q\times\frac{d}{a\cdot d}+ra \tag{1.1.29}$$

其中 r 是任意标量。从上述关系式可看到，矢积的逆运算也是不定的。

标积和矢积的逆运算可归纳成一个统一的求解公式。

设标积方程和矢积方程为

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x=p \\ a\cdot x=q \end{array}\right\} \tag{1.1.30}$$

其中 a，p，q 为已知矢量。由（1.1.22）式可令 $b=a$，令任意矢量 c 等于 q。由(1.1.29)式可令 $d=a$，且使任意标量 r 等于 $p/|a|^2$，于是得到

$$x=p\frac{a}{|a|^2}+q\times\frac{a}{|a|^2} \tag{1.1.31}$$

用上面得到的结果来解一个重要的方程组。

设矢量由下列方程组所确定

$$a_i\cdot x=p_i \qquad (i=1,2,3) \tag{1.1.32}$$

式中矢量 $a_i(i=1,2,3)$ 彼此不共面；p_i 是矢量 x 在 a_i 方向的投影，是标量。由(1.1.22)式有

$$x=p_i\frac{b_i}{a_i\cdot b_i}+c\times a_i$$

其中，$a_i\cdot b_i\neq 0$，且 c 为任意矢量。我们令

$$b_i=a_j\times a_k \qquad (\underleftarrow{\overrightarrow{i,j}},k=\underleftarrow{\overrightarrow{1,2}},3)$$

显然，$a_i\cdot(a_j\times a_k)\neq 0$。于是得到

$$x=p_1\frac{a_2\times a_3}{a_1\cdot(a_2\times a_3)}+p_2\frac{a_3\times a_1}{a_2\cdot(a_3\times a_1)}+p_3\frac{a_1\times a_2}{a_3\cdot(a_1\times a_2)} \tag{1.1.33}$$

也可写成

$$x=e_1p_1+e_2p_2+e_3p_3=\sum_{i=1}^{3}e_ip_i \tag{1.1.34}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}e_1&=\frac{a_2\times a_3}{a_1\cdot(a_2\times a_3)}\\e_2&=\frac{a_3\times a_1}{a_2\cdot(a_3\times a_1)}\\e_3&=\frac{a_1\times a_2}{a_3\cdot(a_1\times a_2)}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.35}$$

这个关系式是对坐标基进行变换的重要计算公式。

概括在这一节所讨论的矢量代数运算的规则，我们未利用任何坐标关系，因此，这些代数运算规则与坐标的选择是无关的。除矢积外，对于坐标变换是不变量。

矢量的特征除了具有一定的模和在空间一定方向的两个性质外，满足加法运算——矢量的多边形规则是矢量必须具备的第三个性质。

(5)矢量分析

A）标量自变量的矢函数的微分

现在讨论具有可变模和可变方向的矢量。标量自变量的矢函数例子是质点的径矢、质点的速度、加速度等。它们都是标量（时间）的函数。在研究矢函数的微分性质时，首先必须指出，矢函数是连续、单值可微的。

考察矢函数

$$a=a(t)\tag{1.1.36}$$

从坐标的原点引径矢 r，设标量自变量为时间 t，

$$r=a(t)\tag{1.1.37}$$

当函数 $a(t)$ 变化时，径矢 r 的终端点描出一曲线，这曲线称为矢端图。

由等式

$$\frac{da}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a(t+\Delta t)-a(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a}{\Delta t}\tag{1.1.38}$$

所确定的矢量，若等式右边的极限存在，则这极限称为矢函数 $a(t)$ 的一阶导数。同样可定义高阶导数。

现在证明导数$\frac{da}{dt}$是一矢量，其方向是沿矢函数 $a(t)$ 的矢端图的切线。

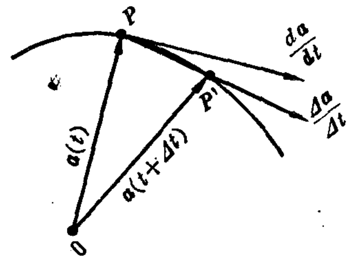

图1.1.5 矢端图及其导数

如图（1.1.5）所示，考察比例式$\frac{\Delta a}{\Delta t}$，$\Delta t$是标量，$\Delta a$ 是矢量，所以比例 $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ 是矢量，其方向为沿矢函数 $a(t)$ 的矢端图的割线 $\overline{pp'}$。当 $\Delta t\to 0$ 时，点 p' 趋近于点 p，而割线 $\overline{pp'}$ 趋近于点 p 的切线。因此，矢量 $\frac{da}{dt}$的方向是沿函数 $a(t)$的矢端图上相应点的切线。

由（1.1.38）导数的定义知，矢量和的导数等于诸导数的矢量和。

考察标量函数和矢量函数的积，设 $\varphi(t)$ 是标量函数，$b(t)$ 是矢量函数，则积

$$a(t)=\varphi(t)b(t)\tag{1.1.39}$$

仍为矢量函数。于是得出

$$a+\Delta a=(\varphi+\Delta\varphi)(b+\Delta b)$$

由此

$$\Delta a=b\Delta\varphi+\varphi\Delta b+\Delta\varphi\Delta b$$

按（1.1.39）式可得

$$\frac{da}{dt}=b\frac{d\varphi}{dt}+\varphi\frac{db}{dt} \tag{1.1.40}$$

因此，仍保持一般乘积的微分规则。

同样可证明一般乘积的微分规则也适用于标积和矢积。如考察二矢量函数的矢积

$$c(t)=a(t)\times b(t) \tag{1.1.41}$$

有

$$\frac{dc}{dt}=\frac{da}{dt}\times b+a\times\frac{db}{dt} \tag{1.1.42}$$

但应注意矢积的相互次序不得变更，因矢积是不可交换的。

B）标量自变量的矢函数的积分

矢函数的不定积分运算类似于一般标函数的不定积分运算。

设

$$\frac{da}{dt}=b(t) \tag{1.1.43}$$

则

$$a(t)=\int b(t)dt+C \tag{1.1.44}$$

其中 C 是与标量自变量 t 无关的常矢量。

如果考察定积分

$$\int_{t_1}^{t_2}b(t)dt$$

则这个记号必须理解为差数

$$a(t_2)-a(t_1)$$

是把闭区间 $[t_1, t_2]$ 分成许多子区间 Δt_i，且这些子区间趋向于无穷小。于是可将矢函数的定积分看成是和的极限，即

$$a(t_2)-a(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}b(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}b(\xi_i)\Delta t_i \tag{1.1.45}$$

这里定积分的意义与通常数学分析中的意义是一样的。

由（1.1.39)和(1.1.40）式的定义可得到“分部积分”的公式，如

$$\int a\times\frac{db}{dt}dt=a\times b-\int\frac{da}{dt}\times bdt \tag{1.1.46}$$

2. 符号与求和约定

在张量计算中，广泛地使用指标符号。例如一组变数 x_1，x_2，……，x_n，通常写成 x_i，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。另外，一组变数 x^1，x^2，……，x^n 可以写成 x^i，$i=1$，2，……，n。在此，