随机函数论原理及其在水文气象学中的应用

〔苏〕Д.И. 卡札凯维奇 著

科 学 出 版 社

随机函数论原理及其在水文气象学中的应用

〔苏〕Д. И. 卡札凯维奇著

章 基 嘉 译

科 学 出 版 社

1 9 7 4

内 容 简 介

本书讲述随机函数论的原理和解决实际课题时应用它的方法．对本理论在水文气象学中广泛应用的那些方面给予主要的注意；对平稳随机过程和均匀场的谱分解，它们的线性变换，最佳外推问题以及根据实验资料确定统计特征及其精确度都作了研究．对本理论的基本原理是用许多应用上的实例来加以阐述的．

本书可供水文气象工作者，水文气象高等院校师生和从事概率论和随机函数论在其他领域的应用问题的人员参考．

Д. И. КАЗАКЕВИЧ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ГИДРО-МЕТЕОРОЛОГИИ
Гидрометеоиздат
1971

随机函数论原理及其在水文气象学中的应用
〔苏〕Д. И. 卡札凯维奇著
章 基 嘉 译

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街137号
国 营 五 二 三 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1974年2月第一版 开本：787×1092 1/32
1974年2月第一次印刷 印张：10 1/8
印数：0001—5,100 字数：227,000

统一书号：13031·143
本社书号：262·13—15

定价：1.05 元

译 者 的 话

概率论和数理统计方法的应用范围在最近廿年中已经获得显著的扩大. 同时,这门学科本身的内容也被一系列新的分支,如随机函数论、信息论、博奕论、线性规划论、动态规划论、统计决策论等所大为丰富.

随机函数论被认为是概率论的一个"动力学"分支. 廿多年来利用它来研究乱流理论,气象要素场的客观分析,气象测站网的合理布局,衡量观测仪器的精确度,建立天气预报和河川迳流预报方法等方面都收到了一定的成效.

在我国概率论和数理统计方法在天气预报上的应用早在三十年代就已经开始. 解放以后,尤其是 1958 年大跃进以来,我国广大县气象站在开展单站补充天气预报中愈来愈多地运用数理统计方法揭露气象要素随时间演变的规律,充实和丰富了各地单站补充天气预报方法的内容. 近年来,由于高空和地面气象资料的进一步积累,对大气环流和大型天气过程机制认识的深化,计算设备的更新,特别是国产电子计算机在气象部门开始运用,为近代统计学理论和方法在气象研究工作和日常天气预报工作中的应用开拓了广泛的可能性. 在这种形势下,为了总结和推广我国广大气象台站和气象科研工作者近年来研究和运用数理统计方法制作天气预报的经验,由中央气象局组织,有中国科学院大气物理研究所、中国科学院数学研究所、南京大学气象系的有关同志参加,在南京气象学院举办了概率统计天气预报方法短期训练班. 这个短训班的主要教材《概率统计和单站天气预报方法》不久即将

问世.

我们遵循伟大领袖毛主席关于“**洋为中用**”的教导，翻译出版了苏联 Д. И. 卡札凯维奇在列宁格勒水文气象学院多年讲授《随机函数论》专题论著. 本书如作者所指出，并不强求论述随机函数论理论上的完整性，而着重介绍它在水文气象上应用的某些方面，同时力求叙述简明易懂，而不受数学严密性的束缚. 因此本书可以作为对随机函数论有关的水文气象工作者的一本入门的书籍，同时，它在应用方面，大体上反映了苏联六十年代的主要成果. 本书与上面提到的那本即将出版的《概率统计和单站天气预报方法》相比，在任务和性质上都是各不相同的. 本书主要涉及概率论的一个分支——随机函数论，但应用范围却涉及水文气象学的许多方面，而后一本书则着重介绍概率论和数理统计的各种方法及其在单站天气预报上的应用. 本书所论述的问题面较窄，在个别地方叙述尚欠严谨，但对于从事概率统计天气预报方法研究和实践的同志来说，可作为进一步了解随机函数论及其应用方面的一本补充材料，但对于广大的水文气象工作者来说，从本书的各个不同章节均可得到一些借鉴.

本书译文虽经多次审校，仍有不妥或错误之处，请读者批评指正.

章 基 嘉

于1973年12月6日

序　　言*

近廿年来随机函数论的数学工具在气象学和水文学中得到了广泛的应用.

这种应用的基础是把水文气象过程和空间场记录下来的瞬时值看成是某种随机过程或随机场的各个现实的思想. 这种想法可以不考虑水文气象场各个瞬时值的特点，因为它们随空间坐标的变化和随时间的变程具有十分复杂和紊乱的性质，从而使我们有可能转为讨论它们的现实的统计集合的某些平均性质，而这些现实是符合某种固定的外部条件的总和的.

利用随机函数论研究水文气象现象概率的方法，对于研究乱流理论，建立长期天气预报方法，气象场的客观分析，评定观测资料的代表性，衡量测量仪器的精确度，解决气象测站网的合理布局，建立河川迳流和其他水文气象特征的预报方法，以及解决许多其他问题都是十分有效的.

在这方面 A. H 柯尔马哥罗夫 (Колмогоров) 的许多基础性工作，以及 A. M. 奥布霍夫 (Обухов)，A. C. 莫宁 (Монин)，A. M. 雅格龙 (Яглом)，M. И. 尤金 (Юдин)，Л. C. 刚金 (Гандин)，H. A. 巴格罗夫 (Багров)，O. A. 德罗兹道夫 (Дроздов)，E. П. 波利辛可夫 (Борисенков)，H. A. 卡尔特维里须维尔 (Картвелишвил)，Ю. M. 阿列辛 (Алехин) 和我国其他一些主要的水文气象科学家的研究作

* 序言略有删节——译者注

出了重要的贡献.

这样就使得水文气象学院有必要扩充概率论教程并增设随机函数论基础的专门课程，这在列宁格勒水文气象学院于1961年已首先实现.

本书是在作者为列宁格勒水文气象学院数值天气预报方法专业学生多年讲授随机函数论教程的基础上写成的，因而是一本针对水文气象学院和大学相应科系的大学生和研究生的教科书，同时也适用于广大的水文气象工作者. 它对关心随机函数论及其应用的其他专业的大学生和工程师也可以作为教科书来使用.

编写本书的目的是由于目前还没有一本能完全满足水文气象专业研究生和大学生需要的随机函数论方面的教材，同时随机函数论向气象学和水文学的不断渗透要求水文气象工作者迅速地和积极地掌握这门理论.

作为概率论一个分支的随机函数论在最近几十年中得到了迅速的发展,并在科学技术的各个领域获得最广泛的应用. 当时,随机函数论首先是在无线电技术中,尤其是在自动控制理论中得到应用，而这两门学科的需要同样地又促进了该理论的发展. 它在气象学和水文学中的广泛应用开始得稍晚一些. 由于这种关系，目前在随机函数论方面有两种类型的教学参考书籍.

在第一种类型的参考书籍中以较高的数学水平对概率过程的理论作了严密的论述(例如,Дж. 杜布 (Дуб) 的«概率过程»，Ю. А. 罗尚诺夫 (Розанов)的 «平稳随机过程»). 这些书籍是以数学工作者为对象的，对于数学素养不够充分的水文气象院校的大学生和工程师来说有一定困难. 适应于自动控制理论和无线电技术的需要而讲述随机函数论基础的专著和教科书属于第二种类型. 水文气象工作者要使用这种类型

的书籍也会碰到困难，因为在这些书中随机函数论和自动控制论或无线电技术是紧密相关、很难分割开的．此外，在这些书中对于水文气象学应用这一理论的许多十分重要的方面没有得到反映．

本书是为具有水文气象院校高等数学教程水平的读者编写的．在叙述过程中凡是不得不引用比较不熟悉的数学方法和概念时(例如积分方程理论中的某些知识，线性代数中的某些概念，戴尔他函数等)，在课文中均作了简要的说明．

由于有些水文气象工作者缺乏概率论方面的足够知识，在第一章中简要地叙述了今后在讲解随机函数论时要用到的一些概率论的基本知识．这些问题的详细叙述在概率论教科书中，尤其是在 E. C. 温特切勒 (Вентцель) 的著名教本[4]中可以找到．熟悉概率论的读者可以越过这一章．

本书中叙述的材料并不强求论述随机函数论的完整性，主要讨论那些在水文气象学中已获得最广泛应用的随机函数论的某些方面．同时，作者着重于叙述的简明易懂方面，而不受整个数学的严密性框框的束缚．

本书由两部分组成．第一部分讲述随机函数论的基础．同时，除讨论一维随机过程外，对于随机空间场也给予较大的注意．第二部分讨论用随机函数论方法解决的一些气象学和水文学课题．同时，没有抱任何目的想把用随机函数论方法解决水文气象课题的所有研究作一系统的概括．对于本国和外国在水文气象上利用随机函数论的各方面工作的详细评论可以在许多作者的论著[5,18,20,14,9,45,57等]中找到．

在本书中只分析气象学和水文学中的一些典型课题，它们能有助于说明本书第一部分叙述的随机函数论基本方法的应用．同时基本的注意力集中在方法问题上．

作者希望本书对广大水文气象工作者掌握随机函数论的

基本思想和方法以及把它们运用于水文气象实践方面有所帮助.

目　录

第一篇　随机函数论基础

第二篇　用随机函数论方法解决的若干水文学和气象学中的课题

第一篇　随机函数论基础

第一章　概率论的基础知识

§1.1　随机变量及其分布律

在同一些条件下进行一系列试验时，若变量每次可能取事先并不确知的这样或那样的数值，这样的变量叫作随机变量.

随机变量分离散型和连续型两类. 离散型随机变量是指这样的一类变量，它所取的全部可能的数值是事先可以列举出来的，即可以用自然数列来编码；而连续型随机变量的全部可能的取值完全充满数轴的某一区间，所以它们是不能作这种编码的.

在掷骰子时所得的数字可作为离散型随机变量的例子，在每次投掷时这随机变量可取 1,2,3,4,5 或 6 六个数字中的任意一个.

任何随机变量，当它只取整数或有理数时，都是离散型的. 同时这种随机变量可能取的离散值的集合是无穷的.

连续型随机变量是这样的一种随机变量，进行试验的结果，它可以取某一区间或某几个区间中的任意实数. 例如，气温、气压或它们对其多年平均值的距平，风速矢的各分量都可以看作连续型的随机变量.

进行观测用的仪器的误差也可以看作随机变量．这种误差通常也是连续型随机变量．我们确定用大写字母：$A, B, C, X, Y, \cdots\cdots$表示随机变量，而其可能的取值相应地用小写字母：$a, b, c, x, y, \cdots\cdots$表示．

设离散型随机变量X以概率$p_1, p_2, \cdots$，p_n分别取值$x_1, x_2, \cdots$，x_n.

列举出离散型随机变量所有可能的取值，并分别给出每一取值的概率，我们就完全确定了这一随机变量．

表示随机变量的可能取值及与其相应的概率之间的联系的关系式叫做随机变量的分布律．

离散型随机变量的分布律可用列表方式给出，表中的第一行为该随机变量的所有可能取值x_i，而另一行为同这些取值相应的概率p_i．即

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

同时，随机变量可能取值的个数可以是有限的，也可以是无穷的，而表中第二行列出的所有概率的总和是一组互不相容事件的概率之和，故等于1，即

$$\sum_i p_i = 1.$$

对于连续型随机变量而言，不能给出类似的表格，因为其可能取值是不能被一一列举出来的．此外，正如后面我们将看到，连续型随机变量取某个给定的具体数值的概率等于零，但是它在某个任意小的区间内取值的概率却不等于零．

作为既适用于离散型又适用于连续型随机变量的普遍特征，常常利用分布的积分定律，后者也叫作分布函数．

随机变量X的分布函数$F(x)$是指随机变量X的取值小于某一个数x的概率：

$$F(x)=P(X<x),\tag{1.1.1}$$

式中$P(X<x)$表示事件$X<x$的概率.

如果把随机变量X看作是数轴上一点的位置，那么函数$F(x)$的值就表示这点位于点x之左的概率.

从这样的几何解释可以引出下列关于分布函数的一些明显的性质：

1) $F(x)$是非降函数，即当 $x_2>x_1$ 时总存在 $F(x_2)\geqslant F(x_1)$；

2) $F(-\infty)=0$，正如不可能事件的概率等于零；

3) $F(+\infty)=1$，正如必然事件的概率等于 1.

离散型随机变量分布函数 $F(x)$ 的值的大小等于所有可能取值x_i小于x的概率p_i之和，即

$$F(x)=\sum_{x_i<x}P(X=x_i).\tag{1.1.2}$$

显然，离散型随机变量分布函数的图形是一个阶梯函数，在点x_i上不连续，同时，在这些点上函数的跳跃值为 $p_i=P(X=x_i)$。

图 1.1 给出掷骰子时所得数字的随机变量分布函数的图形. 在这种情况中从 1 到 6 每个可能取值所对应的概率相等，即 $p=\frac{1}{6}$.

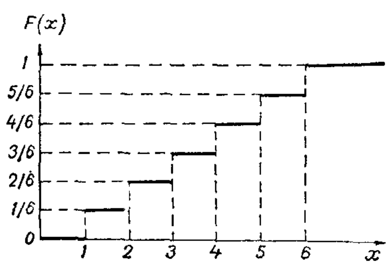

图 1.1

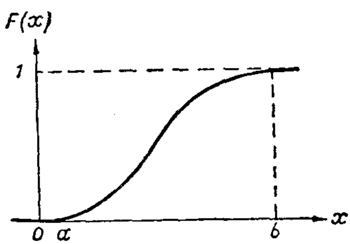

图 1.2

连续型随机变量分布函数的图形，由于这种随机变量的可能取值完全充满某一区间$[a, b]$，所以通常是一条由0到1上升的连续曲线(图1.2).

但是，可以举出随机变量的取值完全充满某一个区间，但其分布函数的图形上存在间断点的例子．这种随机变量称为混合型随机变量．混合型随机变量在实际中是很少遇到的.

以后我们把分布函数连续且可微的随机变量称作连续型随机变量.

已知分布函数就可以确定随机变量在给定区间内取值的概率.

下面我们来确定随机变量X取值大于或等于a且小于b的概率$P(a \leqslant X < b)$.

随机变量取值小于b的概率$P(X < b)$可以表示为两个互不相容事件的概率和：

$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \leqslant X < b). \qquad (1.1.3)$$

由此得

$$P(a \leqslant X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a). \qquad (1.1.4)$$

因此，随机变量从某一给定区间取值的概率，或者按通常的说法，随机变量落入某一给定区间的概率，等于分布函数在这个区间上的增量.

现在我们来看一看连续型随机变量X，并使b趋近a以缩短区间．这时，由于分布函数的连续性，$F(b)$将趋近$F(a)$．所以将等式(1.1.4)左端取极限便得到随机变量X取a值的概率，而右端变为零．由此可见，对于连续型随机变量，其取值为任意具体数值的概率等于零.

对于连续型随机变量来说，表示该随机变量落入某个区间的概率时，公式(1.1.4)可写为以下形式：

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a). \tag{1.1.5}$$

对于分布函数是连续可微的连续型随机变量，可以采用分布函数的导数，

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}, \tag{1.1.6}$$

作为分布律．分布函数的导数用$f(x)$表示，并称之为分布的微分定律或者称作分布密度．

由于分布密度是非降函数$F(x)$的导数，所以它是一个非负函数，即对于所有x，$f(x)\geqslant 0$．

下面我们通过分布密度$f(x)$来表示分布函数$F(x)$．为此将等式(1.1.6)在从$-\infty$到x的区间内积分，得

$$\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=F(x)-F(-\infty). \tag{1.1.7}$$

因为$F(-\infty)=0$，所以

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx. \tag{1.1.8}$$

由公式(1.1.6)和(1.1.8)可见，分布函数和分布密度可以互相通过对方表示，因此它们之中的每一个都是连续型随机变量的全面特征．

下面我们通过分布密度来表示随机变量落入给定区间(a,b)的概率．

利用(1.1.5)及(1.1.8)，得

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx-\int_{-\infty}^{a}f(x)\,dx$$

$$=\int_{a}^{b}f(x)\,dx. \tag{1.1.9}$$

由此可见，随机变量落入给定区间(a,b)的概率等于函数