

复解析动力系统

任福尧 主编

编著者

邱维元 尹永成 乔建永

张文俊 周维民 龚志民

复旦大学出版社

责任编辑 范仁梅

责任校对 马金宝

复解析动力系统

任福尧 主编

出 版 复旦大学出版社

(上海国权路 579 号 邮政编码 200433)

发 行 新华书店上海发行所

印 刷 江苏丹阳教育印刷厂

开 本 850×1168 1/32

印 张 11.875

字 数 342 000

版 次 1997 年 12 月第 1 版 1997 年 12 月第 1 次印刷

印 数 1—1 000

书 号 ISBN 7-309-01958-X/O · 178

定 价 15.00 元

本版图书如有印订质量问题,请向承印厂调换。

内 容 提 要

本书以经典的 Fatou-Julia 理论为基础,重点介绍了本世纪 80 年代以来复解析动力系统这一学科的卓越成就,其中包括有理函数动力系统、代数函数和代数体函数的动力系统,以及多复变全纯映射的动力系统等研究成果.

本书可作为研究生和高年级学生选修课的教材,也可作为教师和科技人员的参考书.

前 言

复解析动力系统的研究初创于第一次世界大战期间. P. Fatou 和 G. Julia 受 Newton 迭代法以及 Möbius 变换群的子群的极限集的启发, 产生了 Riemann 球面上复解析动力系统的研究思想. 两人独立地发表了相当数量的研究简报, 此后又发表了很长的学术论文. Julia 的主要工作发表于 1918 年, Fatou 的主要工作发表于 1919 至 1920 年. 当时, 他们运用新的正规族理论(如 Montel 定理等)于动力系统, 证明了一系列非凡、漂亮的结果, 完成了复动力系统的奠基工作, 形成了经典的 Fatou-Julia 理论.

80 年代以来, 这一领域又受到广泛的关注, 已成为国际上公认的复分析的主要研究方向之一. 许多国际上著名的数学家如 A. Douady, J. H. Hubbard, W. Thurston, I. N. Baker 和 J.-C. Yoccoz 等均在这一研究领域作出了杰出贡献. 目前这一研究领域的突出特点是拓扑学、代数理论以及现代分析理论的综合运用. 特别是, 近年来大型电子计算机的飞速发展, 给研究工作提供了有效的实验工具. 人们借助于先进的快速计算和模拟手段实现了历史上的许多构想, 也为这一学科的发展进一步提供了可靠的原始素材.

值得一提的是, 动力系统、分形几何以及混沌学是紧密相关的三个学科. 事实上, 动力系统理论中的主要研究对象 Julia 集一般具有分形结构, 而用于产生动力系统的映照在 Julia 集上呈混沌状态. 已经发现, 这三个学科在采矿、信息处理、石油勘探及水力学中有很大的应用价值.

近五年来在国际上已有四本复动力系统方面的专著, 它们是 A. F. Beardon 的“*Iteration of Rational Functions*”(1991 年), L. Carleson 和 T. Gamelin 所著的“*Complex Dynamics*”(1993 年), N. Steinitz 所著的“*Rational Iteration—Complex Dynamics System*”(1993 年), 以及

R. L. Devaney 所著的“*Complex Dynamical System: The Mathematics behind the Mandelbrot and Julia Sets*”(1994 年). 这些书都各有特色, 但它们只讨论有理函数的动力系统.

本书以经典的 Fatou-Julia 理论为基础, 重点介绍 80 年代以来这一学科的卓越成就, 其中包括有理函数动力系统、整函数和亚纯函数动力系统、函数族的随机迭代动力系统、代数函数和代数体函数的动力系统, 以及多复变全纯映射的动力系统等研究成果. 本书介绍了这一学科的许多代表性成果, 以及近年来我们在这方面的一系列工作. 当然, 由于受我们学术水平和篇幅的限制, 还有很多出色的结果没有引入.

本书共分 11 章, 其中第一章是 Riemann 曲面上的解析动力系统, 主要介绍双曲 Riemann 曲面上的解析动力学的局部迭代理论以及 Riemann 曲面的有关结论, 它是后面内容的基础. 第二章到第七章讨论有理函数的动力学. 其中第二章是 $\hat{\mathbb{C}}$ 上动力系统——Fatou-Julia 理论, 主要介绍轨道、周期、Fatou 集、Julia 集的基本概念, 以及 Fatou-Julia 理论的基本结果. 第三章是 Fatou 集的动力学性质, 主要介绍 Fatou 分支的游荡性质、Sullivan 最终周期定理, 以及周期分支的分类定理. 第四章是 Julia 集的动力学性质, 主要介绍递归性质、扩张性质、Julia 集的测度及 Hausdorff 维数等. 第五章是有理函数的解析族和结构稳定性, 主要介绍全纯运动、 λ -引理、 J -稳定性、结构稳定性和拟共形变换等. 第六章是多项式的动力学, 主要介绍填充 Julia 集、势函数与外射线、Julia 集的局部连通性、Mandelbrot 集、Eccalle 圆柱, 以及填充 Julia 集对参数的连续性等. 第七章是类多项式与拟共形手术, 主要介绍类多项式、整理定理、有理函数的拟共形手术、拟共形手术的应用, 以及耦合等. 第八章是整函数和亚纯函数的动力学, 主要介绍整函数动力学的基本性质、Fatou 分支的性质、游荡域的存在性、Julia 集的分布、有限型整函数以及指数函数的动力学等. 第九章是函数族的随机迭代动力系统, 主要介绍由有限多个或无穷多个有理函数、整函数或亚纯函数所生成的随机动力学的定义, Fatou 分支的游荡性质以及 Julia 集的基本性质. 第十章是代数函数与代数体函数的迭代, 主要介绍代数函数及代数体函数的迭代定义、分类定理、Fatou 集和 Julia 集的典型性质等. 第十

一章是多复变量全纯映射的动力学,主要介绍 $\mathbb{C}^N$ 上全纯自映射的迭代、Denjoy-Wolff 定理以及随机迭代等.

本书的第一、第三—第五章由邱维元撰写,第二章由邱维元和周维民撰写,第六、第七章由尹永成撰写,第八、第十章由乔建永撰写,第九章由乔建永、周维民和龚志民撰写,第十一章由张文俊撰写.

本书可作为研究生和高年级学生选修课的教材,也可作为教师 and 科技人员的参考书.

任福尧

1996 年 10 月于上海

符号说明

$\mathscr{C}$ 是 C 的草体, 表示复数平面; $\overset{\wedge}{\mathscr{C}}$ 表示复球面. (p. 1)

$\mathscr{R}$ 是 R 的草体, 表示实数的全体. (p. 2)

$\mathscr{Z}$ 是 Z 的草体, 表示整数的全体. (p. 4)

$\mathscr{N}$ 是 N 的草体, 表示自然数的全体. (p. 39)

$\mathscr{Q}$ 是 Q 的草体, 表示有理数的全体. (p. 45)

$\mathscr{G}$ 是 G 的草体, 表示一族函数. (p. 106)

$\forall$ 表示对任意给定的. (p. 8)

$\exists$ 表示存在. (p. 331)

每条说明后面的页码, 表示该条所说明的字母第一次在书中出现的页码数.

目 录

前言.....	1
符号说明.....	1
第一章 Riemann 曲面上的解析动力系统	1
§ 1.1 Riemann 曲面基础	1
§ 1.1.1 Riemann 曲面的分类	1
§ 1.1.2 Riemann 曲面的度量	5
§ 1.2 双曲 Riemann 曲面上的解析动力系统	8
§ 1.3 双曲区域上的解析动力系统.....	13
§ 1.4 其他 Riemann 曲面上的解析动力学初步	17
第二章 有理函数的动力系统: Fatou-Julia 集理论	22
§ 2.1 基本概念.....	22
§ 2.1.1 周期点.....	22
§ 2.1.2 临界点与分支覆盖.....	24
§ 2.2 Fatou 集和 Julia 集	27
§ 2.3 周期点的局部动力学(一) 吸引、超吸引 和有理中性周期点.....	34
§ 2.3.1 吸引周期点情形.....	34
§ 2.3.2 超吸引周期点情形.....	37
§ 2.3.3 有理中性周期点情形.....	39
§ 2.4 周期点的局部动力学(二) Siegel 盘和 Cremer 点 ...	44
§ 2.4.1 Siegel 盘	44
§ 2.4.2 Cremer 点	48
§ 2.5 周期点的整体动力学.....	48

第三章 Fatou 集的动力学	55
§ 3.1 Fatou 分支的基本性质	55
§ 3.2 周期分支的动力学描述, Herman 环	58
§ 3.3 Sullivan 最终周期性定理: 多连通情形	65
§ 3.4 拟共形映射和有理函数的拟共形形变	68
§ 3.4.1 拟共形映射与可测 Riemann 映射定理	68
§ 3.4.2 有理函数的拟共形形变	71
§ 3.5 Sullivan 最终周期性定理: 单连通情形	71
第四章 Julia 集的动力学	78
§ 4.1 递归性质	78
§ 4.2 双曲有理函数与次双曲有理函数	81
§ 4.3 Julia 集的测度	88
§ 4.4 Julia 集的 Hausdorff 维数	91
第五章 有理函数的全纯簇和结构稳定性	102
§ 5.1 有理函数全纯簇	102
§ 5.1.1 多复变函数简介	102
§ 5.1.2 全纯簇和稳定性	104
§ 5.2 全纯运动和 λ -引理	106
§ 5.3 有理函数的 J -稳定性	108
§ 5.4 临界轨道关系与局部拟共形共轭	114
§ 5.5 有理函数的结构稳定性	118
第六章 多项式的动力学	128
§ 6.1 填充 Julia 集	128
§ 6.2 等势曲线与外射线	132
§ 6.3 Julia 集的局部连通性	137
§ 6.4 二次多项式与 Mandelbrot 集	145

§ 6.5	填充 Julia 集对参数的连续依赖性	152
§ 6.6	高次多项式的动力学	158
第七章	类多项式与拟共形手术	164
§ 7.1	类多项式及其基本动力学性质	164
§ 7.2	整理定理	166
§ 7.3	有理函数的拟共形手术	175
§ 7.4	多项式的耦合	178
第八章	整函数及亚纯函数的动力学	183
§ 8.1	整函数动力学的基本性质	183
§ 8.2	关于 Fatou 集的分支	188
§ 8.2.1	多连通区域的游荡性	188
§ 8.2.2	Fatou 集周期分支的分类	190
§ 8.3	游荡分支的存在性	192
§ 8.3.1	多连通游荡分支的构造	192
§ 8.3.2	单连通游荡分支的构造	197
§ 8.4	有限型整函数的动力学	202
§ 8.4.1	Baker 分支的消失	202
§ 8.4.2	最终周期性定理	204
§ 8.4.3	$z \exp(z + \mu)$ 的动力学	206
§ 8.5	关于完全不变分支	215
§ 8.6	关于 Julia 集的渐近分布	218
§ 8.6.1	整函数在其 Fatou 集上的增长性	219
§ 8.6.2	整函数及其导函数的 Julia 集	221
§ 8.7	指数函数的动力学	223
§ 8.7.1	Fatou 集的分支	224
§ 8.7.2	Julia 集上的 Cantor 束	225
§ 8.7.3	Julia 集的 Hausdorff 维数	227
§ 8.7.4	λe^z 的 M 集的维数	232

§ 8.8 亚纯函数迭代理论简介	237
------------------------	-----

第九章 函数族的随机迭代动力系统 242

§ 9.1 基本概念	242
§ 9.2 有理函数组的迭代动力学系统	246
§ 9.3 整函数与亚纯函数组的迭代	257
§ 9.4 关于 Julia 集的内点	265
§ 9.4.1 Julia 集有内点的充分性条件	265
§ 9.4.2 Julia 集没有内点的充分性条件	267
§ 9.5 无穷多个函数的随机迭代动力系统	275

第十章 代数函数和代数体函数的迭代 282

§ 10.1 代数函数和代数体函数	282
§ 10.2 代数函数的迭代	287
§ 10.2.1 代数函数的复合	287
§ 10.2.2 分支点处的复合	289
§ 10.2.3 迭代	293
§ 10.2.4 Möbius 变换下的共轭	294
§ 10.2.5 Riemann 球面上的动力系统	295
§ 10.2.6 关于常值极限函数	302
§ 10.3 整代数体函数的迭代	304
§ 10.3.1 轨道及复平面的分解	305
§ 10.3.2 Fatou 集和 Julia 集的性质	308
§ 10.3.3 关于 $J(f)$ 和 V_f 的分布	315

第十一章 多复变量全纯映射的动力学 325

§ 11.1 $\mathbb{C}^N$ 中全纯自映射迭代的一般理论	325
§ 11.1.1 定义与初等性质	325
§ 11.1.2 局部线性化定理	328
§ 11.1.3 多项式映射的 Fatou 分支	330

§ 11.1.4 一些例子.....	331
§ 11.2 Denjoy-Wolff 定理	332
§ 11.2.1 强拟凸域的情形.....	333
§ 11.2.2 凸区域的情形.....	338
§ 11.3 有界域上全纯自映射的随机迭代.....	339
§ 11.3.1 压缩映射的随机迭代.....	339
§ 11.3.2 凸区域上的随机迭代.....	342
§ 11.3.3 一般绷紧区域上的随机迭代.....	346
§ 11.4 $\mathcal{C}^2$ 中多项式自同构的迭代	348
§ 11.4.1 $\mathcal{C}^2$ 中多项式自同构的分类	348
§ 11.4.2 不动点.....	349
§ 11.4.3 轨道有界集与非游荡集.....	351
§ 11.4.4 双曲广义 Hénon 映射	357

第一章 Riemann 曲面上的解析动力系统

设 f 是定义域 S 到其自身的解析映射, 这里 S 可以是复平面 $\mathcal{C}$ 内的区域、复平面 $\mathcal{C}$ 本身、Riemann 球面 $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$ 或一般的一个 Riemann 曲面. 对任意初值 $z_0 \in S$, 考虑迭代过程 $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, $\dots$, $z_n = f(z_{n-1})$, $\dots$. 称迭代序列 $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ 为点 z_0 (在 f 作用下) 的轨道, 记为 $O_f(z_0)$. 也可以这样定义: 记 $f^0 = id$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f^1$, $\dots$, $f^n = f \circ f^{n-1}$, $\dots$. 这里记号 $\circ$ 表示函数复合, 那么对于初值 $z_0 \in S$, $z_n = f^n(z_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 复解析动力系统即要研究函数迭代序列 $\{f^n\}$ 或轨道 $O_f(z_0)$ 的状态, 主要考虑下面几个问题: 对给定解析自映射 f 及初值 z_0 , 其轨道的极限状态; 关于初值 z_0 的稳定性; 及关于函数 f 的稳定性等.

对于大多数 Riemann 曲面, 其上的解析动力系统是简单的, 不会产生混沌现象, 而对于某些 Riemann 曲面如 $\mathcal{C}$, $\hat{\mathcal{C}}$ 等, 其上的动力系统非常复杂. 本章将主要讨论简单的情形, 即双曲 Riemann 曲面上的解析动力学, 此时可以给出一个较完全的描述.

§ 1.1 Riemann 曲面基础

本节先简单地介绍一下 Riemann 曲面的有关知识, 详细论述参看文献^[AS, FK].

§ 1.1.1 Riemann 曲面的分类

回忆 Riemann 曲面的一些基本概念. 一个 Riemann 曲面是一个曲面 S 带有一个复结构 σ_0 , 即有一个局部坐标图册, 使得坐标变换是解

析的. 以后, 我们给定一个 Riemann 曲面总假定给定了它的一个复结构, 这个复结构就称为标准复结构, 用 σ_0 表示.

设 S_1 与 S_2 是两个 Riemann 曲面, $f: S_1 \rightarrow S_2$ 称为是解析的, 如果 f 在其局部坐标表示下是解析的. 如果存在同胚 $h: S_1 \rightarrow S_2$ 使得 h 及其逆 h^{-1} 都是解析的, 则称 h 是 S_1 与 S_2 之间的共形同构, 共形同构的 Riemann 曲面被认为是相同的.

设 $f_1: S_1 \rightarrow S_1$ 是解析自映射, 定义 $f_2 = h \circ f_1 \circ h^{-1}$, 则 $f_2: S_2 \rightarrow S_2$ 也是解析自映射, 且 $f_2^n = h \circ f_1^n \circ h^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$. 因此, f_1 与 f_2 具有相同的解析动力学性质, 称 f_1 与 f_2 是共形共轭的, 而 h 称为 $(f_1$ 与 f_2 之间的) 共形共轭映射.

经典复分析的一个中心结论是下面的单值化定理.

定理 1.1 (单值化定理) 任何单连通 Riemann 曲面共形等价于下列三种标准的 Riemann 曲面之一:

- 1) Riemann 球面 $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$;
- 2) 复平面 $\mathcal{C}$;
- 3) 单位圆盘 $\Delta = \{z \in \mathcal{C} \mid |z| < 1\}$ (或上半平面 $H = \{z \in \mathcal{C} \mid \text{Im} z > 0\}$).

单值化定理的证明非常复杂, 可参看文献^[AS, FK].

Riemann 球面 $\hat{\mathcal{C}}$ 是一个紧的 Riemann 曲面, 其复结构可如下确定: $\hat{\mathcal{C}}$ 的局部坐标邻域可取为 $\mathcal{C}$ 和 $\hat{\mathcal{C}} \setminus \{0\}$, 在 $\mathcal{C}$ 上用通常的自然坐标 z 作为单值化参数, 在 $\hat{\mathcal{C}} \setminus \{0\}$ 用 $\zeta = \frac{1}{z}$ 作为单值化参数. 通过球极投影, $\hat{\mathcal{C}}$ 同胚于 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面.

单位圆盘 Δ 与上半平面 H 是共形等价的. 共形同构为 $h: z \mapsto \frac{i - z}{i + z}$, 我们将按需要选取 Δ 或 H 作为标准 Riemann 曲面.

对于一般的 Riemann 曲面 S , 其万有覆盖曲面 $\tilde{S}$ 是单连通的 Riemann 曲面, 记 $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ 是覆盖映射, 它是局部共形映射. 由单值化定理, $\tilde{S}$ 共形等价于 $\hat{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}$ 或 Δ 之一.

定义 1.1 设 S 是 Riemann 曲面, $\tilde{S}$ 是其万有覆盖曲面, $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ 是覆盖映射, 则

- 1) 如果 $\tilde{S}$ 共形等价于 $\hat{\mathcal{C}}$, 称 S 是椭圆的 Riemann 曲面;
- 2) 如果 $\tilde{S}$ 共形等价于 $\mathcal{C}$, 称 S 是抛物的 Riemann 曲面;
- 3) 如果 $\tilde{S}$ 共形等价于 Δ (或 H), 称 S 是双曲的 Riemann 曲面.

以后, 我们就取 $\tilde{S} = \hat{\mathcal{C}}, \mathcal{C}$ 或 Δ (或 H) 作为 S 的万有覆盖曲面.

对于 S 的万有覆盖曲面 $\tilde{S}$, $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$, $\tilde{S}$ 上的共形自同构 $\gamma: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ 如果满足 $\pi \circ \gamma = \pi$, 则称为覆盖变换. 覆盖变换全体构成 $\tilde{S}$ 上共形自同构群 $G(\tilde{S})$ 的子群, 称为覆盖变换群, 记为 Γ . 由于对任意 $x \in S$, 纤维 $\pi^{-1}(x)$ 是离散的, 容易看出, 作为拓扑群, Γ 是离散群, 即对任意 $\gamma_n \in \Gamma$, $\gamma_n \mapsto \gamma_0 (n \rightarrow \infty)$, 均有当 n 充分大时, $\gamma_n \equiv \gamma_0$. 其次, 若 $\gamma \in \Gamma$ 不是恒等元素, 那么, γ 在 $\tilde{S}$ 内没有不动点.

在 $\tilde{S}$ 上有下述等价关系 $\sim: x, y \in \tilde{S}, x \sim y$ 当且仅当存在 $\gamma \in \Gamma$, 使得 $\gamma(x) = y$. $\tilde{S}$ 在此等价关系下的商空间记为 $\tilde{S}/\Gamma$, 它是一个 Riemann 曲面, 具有诱导复结构. 注意到 $x \sim y$ 当且仅当 $\pi(x) = \pi(y)$, 我们有: $\tilde{S}/\Gamma$ 共形等价于 Riemann 曲面 S .

下面我们分别对 $\tilde{S} = \hat{\mathcal{C}}, \mathcal{C}$, 与 H , 讨论其上的共形自同构群 $G(\tilde{S})$ 和覆盖变换群 Γ .

对椭圆情形, 容易证明: 任意 $\gamma \in G(\hat{\mathcal{C}})$ 是一个分式线性变换

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

其中, $a, b, c, d \in \mathcal{C}, ad - bc \neq 0$, 称为 Möbius 变换. 反之亦然. 在规范化条件 $ad - bc = 1$ 下, $\gamma \in G(\hat{\mathcal{C}})$ 由其系数唯一确定. 因此 $G(\hat{\mathcal{C}})$ 同构于复二阶矩阵 (行列式等于 1) 构成的线性群 $PSL(2, \mathcal{C})/\{\pm I\}$. $G(\hat{\mathcal{C}})$ 中的每个非恒等元素或者有两个不同的不动点, 或者有一个重

不动点. 因此, 如果 S 是一个椭圆 Riemann 曲面, 那么对应的覆盖变换群 Γ 只能含有恒等元素, 即 $\Gamma = \{id\}$. 于是 S 共形等价于 $\hat{\mathcal{C}}/\Gamma = \hat{\mathcal{C}}$. 故椭圆 Riemann 曲面只有一个, 即 Riemann 球面 $\hat{\mathcal{C}}$.

对抛物情形, 这时 $G(\mathcal{C})$ 中每个元素是一个平面仿射变换 $\gamma(z) = \lambda z + c$, $\lambda \neq 0$, $G(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 上的仿射变换群. 当 $\lambda \neq 1$ 时, γ 一定有一个有限不动点, 故 γ 要属于某个抛物 Riemann 曲面 S 的覆盖变换群 Γ , 只能有形式 $\gamma(z) = z + c$. 又由于 Γ 是离散群, 因此, 仅有下面三种情形:

Γ 是单位群, 即 $\Gamma = \{id\}$. 这时 S 共形等价于 $\mathcal{C}$;

Γ 有一个生成元, 即 $\Gamma = \langle z + c \rangle (c \neq 0)$, 这时 Γ 同构于整数群 $\mathcal{Z}$. 因此 $S = \mathcal{C}/\mathcal{Z}$, 或者说, 在指数映射下, S 共形等价于穿孔复平面 $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \setminus \{0\}$;

Γ 有两个生成元, 即 $\Gamma = \langle z + \omega_1, z + \omega_2 \rangle$, 这里 $\omega_1/\omega_2 \in \mathcal{R}$, Γ 同构于由复数 ω_1, ω_2 生成的格点群 Λ . 因此 S 共形等价于环面 $\mathcal{C}/\Lambda = T$. 称 ω_1/ω_2 为 T 的复模.

因此, 抛物 Riemann 曲面仅可能为复平面 $\mathcal{C}$, 穿孔复平面 $\mathcal{C}^*$ 或环面 T 之一.

对双曲情形, 所有其他 Riemann 曲面都是双曲的, 以上半平面 H (或单位圆盘 Δ) 为万有覆盖曲面, 对于任意 $\gamma \in G(H)$ 可以通过对称开拓为 $\hat{\mathcal{C}}$ 上共形自同构, 故 $G(H)$ 是 $G(\hat{\mathcal{C}})$ 中保持上半平面不变的 Möbius 变换组成的子群. 每个 $\gamma \in G(H)$ 有形式 $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, 这里 $a, b, c, d \in \mathcal{R}$, 且 $ad - bc > 0$, 在规范化条件 $ad - bc = 1$ 下, $G(H)$ 同构于 $PSL(2, \mathcal{R})/\{\pm I\}$. 如果 S 是双曲 Riemann 曲面, 则 S 共形等价于某个 H/Γ , 这里 Γ 是 $G(H)$ 的离散子群, 且除恒等元素外在 H 内没有不动点. 称 $G(H)$ 中的离散子群为 Fuchs 群.

注 $G(\Delta)$ 中的元素 γ 具有如下形式: $\gamma(z) = e^{2\pi i \theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, 其中 $\theta \in [0, 1)$, $a \in \Delta$.

综上所述,我们有下述定理.

定理 1.2 任何 Riemann 曲面共形等价于下述曲面之一: 1) $\hat{\mathcal{C}}$; 2) $\mathcal{C}$; 3) $\mathcal{C}^*$; 4) 环面 T ; 5) H/Γ . 这里 Γ 是 Fuchs 群, 除恒等元素外在 H 内没有不动点.

$G(H)$ 中的元素可由 $\partial H = \mathcal{R} \cup \{\infty\}$ 给定三点的值唯一确定. 如保持 $0, 1, \infty$ 不变的元素只能是恒等元素, 对于非恒等元素 $\gamma \in G(H)$, 可以分为三类:

如果 γ 有两个不同的实不动点, 则称 γ 为双曲的. 可以通过 H 上的共形变换将两个不动点映成 0 和 ∞ . 这时, γ 共形共轭于变换 $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0, \lambda \neq 1$. 如有必要, 通过变换 $z \mapsto \frac{1}{z}$ 可使 $\lambda > 1$.

如果 $\gamma \in G(H)$ 仅有一个重不动点, 则称 γ 是抛物的. 这时该不动点一定是实的, 将其映成 ∞ , γ 共形共轭于 $z \mapsto z + c, c \in \mathcal{R}, c \neq 0$, 可规范化为 $c = 1$.

如果 $\gamma \in G(H)$ 有一对共轭复不动点, 则称 γ 是椭圆的. 这时有一个不动点 $\omega_0 \in H$. 通过共形变换将 H 映成单位圆盘 Δ , 将 ω_0 映成 0 , 则 γ 共形共轭于 $z \mapsto e^{2\pi i \theta} z, \theta \in [0, 1)$, 为一旋转.

显然, 覆盖变换群不能有椭圆元素, 当 γ 为双曲或抛物元素时, γ 生成的无限循环群 $\langle \gamma \rangle$ 是离散群, 如果 γ 是双曲的, 则 $H/\langle \gamma \rangle$ 共形等价于圆环 $A_r = \{z | r < |z| < 1\}$; 如果 γ 是抛物的, 则 $H/\langle \gamma \rangle$ 共形等价于穿孔圆盘 $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$. Δ, Δ^* 及 A_r 称为初等 Riemann 曲面.

§ 1.1.2 Riemann 曲面的度量

下面我们在 Riemann 曲面上引进度量(距离). 先讨论单连通情形: $\hat{\mathcal{C}}, \mathcal{C}$ 与 Δ 上的度量.

对于复平面 $\mathcal{C}$, 其上有自然的 Euclid 度量 $ds = |dz|$, 或 Euclid 距离 $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, 这是熟知的.

考虑 Riemann 球面 $\hat{\mathcal{C}}, \hat{\mathcal{C}}$ 同胚于 $\mathcal{R}^3$ 中单位球面 S^2 , 在 S^2 上有自然的度量, 即大圆弧的弧长, 通过球极投影到坐标平面上, 我们在 $\hat{\mathcal{C}}$ 上