复解析动力系统

任福尧　主编
编著者
邱维元　尹永成　乔建永
张文俊　周维民　龚志民

复旦大学出版社

责任编辑　范仁梅
责任校对　马金宝

复解析动力系统
任福尧　主编

出　版　复旦大学出版社
（上海国权路 579 号　邮政编码　200433）
发　行　新华书店上海发行所
印　刷　江苏丹阳教育印刷厂
开　本　850×1168　1/32
印　张　11.875
字　数　342 000
版　次　1997 年 12 月第 1 版　1997 年 12 月第 1 次印刷
印　数　1—1 000
书　号　ISBN 7-309-01958-X/O・178
定　价　15.00 元

内 容 提 要

本书以经典的 Fatou-Julia 理论为基础，重点介绍了本世纪 80 年代以来复解析动力系统这一学科的卓越成就，其中包括有理函数动力系统、代数函数和代数体函数的动力系统，以及多复变全纯映射的动力系统等研究成果.

本书可作为研究生和高年级学生选修课的教材，也可作为教师和科技人员的参考书.

前　言

复解析动力系统的研究初创于第一次世界大战期间. P. Fatou 和 G. Julia 受 Newton 迭代法以及 Möbius 变换群的子群的极限集的启发,产生了 Riemann 球面上复解析动力系统的研究思想. 两人独立地发表了相当数量的研究简报,此后又发表了很长的学术论文. Julia 的主要工作发表于 1918 年,Fatou 的主要工作发表于 1919 至 1920 年. 当时,他们运用新的正规族理论(如 Montel 定理等)于动力系统,证明了一系列非凡、漂亮的结果,完成了复动力系统的奠基工作,形成了经典的 Fatou-Julia 理论.

80 年代以来,这一领域又受到广泛的关注,已成为国际上公认的复分析的主要研究方向之一. 许多国际上著名的数学家如 A. Douady, J. H. Hubbard, W. Thurston, I. N. Baker 和 J-C. Yoccoz 等均在这一研究领域作出了杰出贡献. 目前这一研究领域的突出特点是拓扑学、代数理论以及现代分析理论的综合运用. 特别是,近年来大型电子计算机的飞速发展,给研究工作提供了有效的实验工具. 人们借助于先进的快速计算和模拟手段实现了历史上的许多构想,也为这一学科的发展进一步提供了可靠的原始素材.

值得一提的是,动力系统、分形几何以及混沌学是紧密相关的三个学科. 事实上,动力系统理论中的主要研究对象 Julia 集一般具有分形结构,而用于产生动力系统的映照在 Julia 集上呈混沌状态. 已经发现,这三个学科在采矿、信息处理、石油勘探及水力学中有很大的应用价值.

近五年来在国际上已有四本复动力系统方面的专著,它们是 A. F. Beardon 的"*Iteration of Rational Functions*"(1991 年),L. Carleson 和 T. Gamelin 所著的"*Complex Dynamics*"(1993 年),N. Steimntz 所著的"*Rational Iteration—Complex Dynamics System*"(1993 年),以及

R. L. Devaney 所著的"*Complex Dynamical System: The Mathematics behind the Mandelbrot and Julia Sets*"(1994 年). 这些书都各有特色,但它们只讨论有理函数的动力系统.

本书以经典的 Fatou-Julia 理论为基础,重点介绍 80 年代以来这一学科的卓越成就,其中包括有理函数动力系统、整函数和亚纯函数动力系统、函数族的随机迭代动力系统、代数函数和代数体函数的动力系统,以及多复变全纯映射的动力系统等研究成果. 本书介绍了这一学科的许多代表性成果,以及近年来我们在这方面的一系列工作. 当然,由于受我们学术水平和篇幅的限制,还有很多出色的结果没有引入.

本书共分 11 章,其中第一章是 Riemann 曲面上的解析动力系统,主要介绍双曲 Riemann 曲面上的解析动力学的局部迭代理论以及 Riemann 曲面的有关结论,它是后面内容的基础. 第二章到第七章讨论有理函数的动力学. 其中第二章是$\hat{\mathscr{C}}$上动力系统——Fatou-Julia 理论,主要介绍轨道、周期、Fatou 集、Julia 集的基本概念,以及 Fatou-Julia 理论的基本结果. 第三章是 Fatou 集的动力学性质,主要介绍 Fatou 分支的游荡性质、Sullivan 最终周期定理,以及周期分支的分类定理. 第四章是 Julia 集的动力学性质,主要介绍递归性质、扩张性质、Julia 集的测度及 Hausdorff 维数等. 第五章是有理函数的解析族和结构稳定性,主要介绍全纯运动、λ-引理、J-稳定性、结构稳定性和拟共形形变等. 第六章是多项式的动力学,主要介绍填充 Julia 集、势函数与外射线、Julia 集的局部连通性、Mandelbrot 集、Ecalle 圆柱,以及填充 Julia 集对参数的连续性等. 第七章是类多项式与拟共形手术,主要介绍类多项式、整理定理、有理函数的拟共形手术、拟共形手术的应用,以及耦合等. 第八章是整函数和亚纯函数的动力学,主要介绍整函数动力学的基本性质、Fatou 分支的性质、游荡域的存在性、Julia 集的分布、有限型整函数以及指数函数的动力学等. 第九章是函数族的随机迭代动力系统,主要介绍由有限多个或无穷多个有理函数、整函数或亚纯函数所生成的随机动力学的定义,Fatou 分支的游荡性质以及 Julia 集的基本性质. 第十章是代数函数与代数体函数的迭代,主要介绍代数函数及代数体函数的迭代定义、分类定理、Fatou 集和 Julia 集的典型性质等. 第十

一章是多复变量全纯映射的动力学，主要介绍$\mathscr{C}^N$上全纯自映射的迭代、Denjoy-Wolff 定理以及随机迭代等.

本书的第一、第三—第五章由邱维元撰写，第二章由邱维元和周维民撰写，第六、第七章由尹永成撰写，第八、第十章由乔建永撰写，第九章由乔建永、周维民和龚志民撰写，第十一章由张文俊撰写.

本书可作为研究生和高年级学生选修课的教材，也可作为教师和科技人员的参考书.

任福尧

1996 年 10 月于上海

符 号 说 明

$\mathscr{C}$ 是 C 的草体,表示复数平面;$\hat{\mathscr{C}}$表示复球面.(p. 1)

$\mathscr{R}$ 是 R 的草体,表示实数的全体.(p. 2)

$\mathscr{Z}$ 是 Z 的草体,表示整数的全体.(p. 4)

$\mathscr{N}$ 是 N 的草体,表示自然数的全体.(p. 39)

$\mathscr{Q}$ 是 Q 的草体,表示有理数的全体.(p. 45)

$\mathscr{G}$ 是 G 的草体,表示一族函数.(p. 106)

$\forall$ 表示对任意给定的.(p. 8)

$\exists$ 表示存在.(p. 331)

每条说明后面的页码,表示该条所说明的字母第一次在书中出现的页码数.

目　录

第一章　Riemann 曲面上的解析动力系统

设 f 是定义域 S 到其自身的解析映射，这里 S 可以是复平面 $\mathscr{C}$ 内的区域、复平面 $\mathscr{C}$ 本身、Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}} = \mathscr{C} \cup \{\infty\}$ 或一般的一个 Riemann 曲面. 对任意初值 $z_0 \in S$，考虑迭代过程 $z_1 = f(z_0)$，$z_2 = f(z_1)$，…，$z_n = f(z_{n-1})$，…. 称迭代序列 $\{z_0, z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\}$ 为点 z_0（在 f 作用下）的轨道，记为 $O_f(z_0)$. 也可以这样定义：记 $f^0 = id$，$f^1 = f$，$f^2 = f \circ f^1$，…，$f^n = f \circ f^{n-1}$，…. 这里记号 $\circ$ 表示函数复合，那么对于初值 $z_0 \in S$，$z_n = f^n(z_0)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，复解析动力系统即要研究函数迭代序列 $\{f^n\}$ 或轨道 $O_f(z_0)$ 的状态，主要考虑下面几个问题：对给定解析自映射 f 及初值 z_0，其轨道的极限状态；关于初值 z_0 的稳定性；及关于函数 f 的稳定性等.

对于大多数 Riemann 曲面，其上的解析动力系统是简单的，不会产生混沌现象，而对于某些 Riemann 曲面如 $\mathscr{C}$，$\hat{\mathscr{C}}$ 等，其上的动力系统非常复杂. 本章将主要讨论简单的情形，即双曲 Riemann 曲面上的解析动力学，此时可以给出一个较完全的描述.

§1.1　Riemann 曲面基础

本节先简单地介绍一下 Riemann 曲面的有关知识，详细论述参看文献[AS, FK].

§1.1.1　Riemann 曲面的分类

回忆 Riemann 曲面的一些基本概念. 一个 Riemann 曲面是一个曲面 S 带有一个复结构 σ_0，即有一个局部坐标图册，使得坐标变换是解

析的. 以后，我们给定一个 Riemann 曲面总假定给定了它的一个复结构，这个复结构就称为标准复结构，用 σ_0 表示.

设 S_1 与 S_2 是两个 Riemann 曲面，$f: S_1 \mapsto S_2$ 称为是解析的，如果 f 在其局部坐标表示下是解析的. 如果存在同胚 $h: S_1 \mapsto S_2$ 使得 h 及其逆 h^{-1} 都是解析的，则称 h 是 S_1 与 S_2 之间的共形同构，共形同构的 Riemann 曲面被认为是相同的.

设 $f_1: S_1 \mapsto S_1$ 是解析自映射，定义 $f_2 = h \circ f_1 \circ h^{-1}$，则 $f_2: S_2 \mapsto S_2$ 也是解析自映射，且 $f_2^n = h \circ f_1^n \circ h^{-1}$，$n = 1, 2, \cdots$. 因此，$f_1$ 与 f_2 具有相同的解析动力学性质，称 f_1 与 f_2 是共形共轭的，而 h 称为(f_1 与 f_2 之间的)共形共轭映射.

经典复分析的一个中心结论是下面的单值化定理.

定理 1.1(单值化定理) 任何单连通 Riemann 曲面共形等价于下列三种标准的 Riemann 曲面之一：

1) Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}} = \mathscr{C} \cup \{\infty\}$；

2) 复平面 $\mathscr{C}$；

3) 单位圆盘 $\Delta = \{z \in \mathscr{C} \mid |z| < 1\}$ (或上半平面 $H = \{z \in \mathscr{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$).

单值化定理的证明非常复杂，可参看文献[AS, FK].

Riemann 球面 $\hat{\mathscr{C}}$ 是一个紧的 Riemann 曲面，其复结构可如下确定：$\hat{\mathscr{C}}$ 的局部坐标邻域可取为 $\mathscr{C}$ 和 $\hat{\mathscr{C}} \backslash \{0\}$，在 $\mathscr{C}$ 上用通常的自然坐标 z 作为单值化参数，在 $\hat{\mathscr{C}} \backslash \{0\}$ 用 $\zeta = \dfrac{1}{z}$ 作为单值化参数. 通过球极投影，$\hat{\mathscr{C}}$ 同胚于 $\mathscr{R}^3$ 中的单位球面.

单位圆盘 Δ 与上半平面 H 是共形等价的. 共形同构为 $h: z \mapsto \dfrac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}$，我们将按需要选取 Δ 或 H 作为标准 Riemann 曲面.

对于一般的 Riemann 曲面 S，其万有覆盖曲面 $\widetilde{S}$ 是单连通的 Riemann 曲面，记 $\pi: \widetilde{S} \mapsto S$ 是覆盖映射，它是局部共形映射. 由单值化定理，$\widetilde{S}$ 共形等价于 $\hat{\mathscr{C}}$，$\mathscr{C}$ 或 Δ 之一.

定义 1.1 设 S 是 Riemann 曲面,$\widetilde{S}$是其万有覆盖曲面,$\pi: \widetilde{S} \mapsto S$ 是覆盖映射,则

1) 如果$\widetilde{S}$共形等价于$\hat{\mathscr{C}}$,称 S 是椭圆的 Riemann 曲面;

2) 如果$\widetilde{S}$共形等价于$\mathscr{C}$,称 S 是抛物的 Riemann 曲面;

3) 如果$\widetilde{S}$共形等价于 Δ(或 H),称 S 是双曲的 Riemann 曲面.

以后,我们就取 $\widetilde{S} = \hat{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$或 Δ(或 H)作为 S 的万有覆盖曲面.

对于 S 的万有覆盖曲面$\widetilde{S}$, $\pi: \widetilde{S} \mapsto S$, $\widetilde{S}$ 上的共形自同构 $\gamma: \widetilde{S} \mapsto \widetilde{S}$ 如果满足 $\pi \circ \gamma = \pi$,则称为覆盖变换.覆盖变换全体构成$\widetilde{S}$上共形自同构群 $G(\widetilde{S})$的子群,称为覆盖变换群,记为 Γ. 由于对任意 $x \in S$,纤维 $\pi^{-1}(x)$是离散的,容易看出,作为拓扑群,Γ 是离散群,即对任意 $\gamma_n \in \Gamma$, $\gamma_n \mapsto \gamma_0 (n \to \infty)$,均有当 n 充分大时,$\gamma_n \equiv \gamma_0$. 其次,若 $\gamma \in \Gamma$ 不是恒等元素,那么,γ 在$\widetilde{S}$内没有不动点.

在$\widetilde{S}$上有下述等价关系 $\sim$:$x, y \in \widetilde{S}$, $x \sim y$ 当且仅当存在 $\gamma \in \Gamma$,使得 $\gamma(x) = y$. $\widetilde{S}$在此等价关系下的商空间记为$\widetilde{S}/\Gamma$,它是一个 Riemann 曲面,具有诱导复结构. 注意到 $x \sim y$ 当且仅当 $\pi(x) = \pi(y)$,我们有:$\widetilde{S}/\Gamma$ 共形等价于 Riemann 曲面 S.

下面我们分别对 $\widetilde{S} = \hat{\mathscr{C}}$, $\mathscr{C}$, 与 H,讨论其上的共形自同构群 $G(\widetilde{S})$和覆盖变换群 Γ.

对椭圆情形,容易证明:任意 $\gamma \in G(\hat{\mathscr{C}})$ 是一个分式线性变换

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

其中, $a, b, c, d \in \mathscr{C}$, $ad - bc \neq 0$, 称为 Möbius 变换. 反之亦然. 在规范化条件 $ad - bc = 1$ 下,$\gamma \in G(\hat{\mathscr{C}})$ 由其系数唯一确定. 因此 $G(\hat{\mathscr{C}})$同构于复二阶矩阵(行列式等于 1)构成的线性群 $PSL(2, \mathscr{C})/\{\pm I\}$. $G(\hat{\mathscr{C}})$中的每个非恒等元素或者有两个不同的不动点,或者有一个重

不动点. 因此，如果 S 是一个椭圆 Riemann 曲面，那么对应的覆盖变换群 Γ 只能含有恒等元素，即 $\Gamma = \{id\}$. 于是 S 共形等价于 $\hat{\mathscr{C}}/\Gamma = \hat{\mathscr{C}}$. 故椭圆 Riemann 曲面只有一个，即 Riemann 球面$\hat{\mathscr{C}}$.

对抛物情形，这时 $G(\mathscr{C})$ 中每个元素是一个平面仿射变换 $\gamma(z) = \lambda z + c$, $\lambda \neq 0$, $G(\mathscr{C})$ 为 $\mathscr{C}$ 上的仿射变换群. 当 $\lambda \neq 1$ 时，γ 一定有一个有限不动点，故 γ 要属于某个抛物 Riemann 曲面 S 的覆盖变换群 Γ，只能有形式 $\gamma(z) = z + c$. 又由于 Γ 是离散群，因此，仅有下面三种情形：

Γ 是单位群，即 $\Gamma = \{id\}$. 这时 S 共形等价于$\mathscr{C}$；

Γ 有一个生成元，即 $\Gamma = \langle z + c\rangle (c \neq 0)$，这时 Γ 同构于整数群 $\mathscr{Z}$. 因此 $S = \mathscr{C}/\mathscr{Z}$，或者说，在指数映射下，$S$ 共形等价于穿孔复平面 $\mathscr{C}^* = \mathscr{C}\backslash\{0\}$；

Γ 有两个生成元，即 $\Gamma = \langle z + \omega_1, z + \omega_2\rangle$，这里 $\omega_1/\omega_2 \notin \mathscr{R}$，$\Gamma$ 同构于由复数 ω_1，ω_2 生成的格点群 Λ. 因此 S 共形等价于环面 $\mathscr{C}/\Lambda = T$. 称 ω_1/ω_2 为 T 的复模.

因此，抛物 Riemann 曲面仅可能为复平面 $\mathscr{C}$，穿孔复平面$\mathscr{C}^*$或环面 T 之一.

对双曲情形，所有其他 Riemann 曲面都是双曲的，以上半平面 H (或单位圆盘 Δ)为万有覆盖曲面，对于任意 $\gamma \in G(H)$ 可以通过对称开拓为$\hat{\mathscr{C}}$上共形自同构，故 $G(H)$是 $G(\hat{\mathscr{C}})$中保持上半平面不变的 Möbius 变换组成的子群. 每个 $\gamma \in G(H)$ 有形式 $\gamma(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$，这里 $a, b, c, d \in \mathscr{R}$，且 $ad - bc > 0$，在规范化条件 $ad - bc = 1$ 下，$G(H)$ 同构于 $PSL(2, \mathscr{R})/\{\pm I\}$. 如果 S 是双曲 Riemann 曲面，则 S 共形等价于某个 H/Γ，这里 Γ 是 $G(H)$的离散子群，且除恒等元素外在 H 内没有不动点. 称 $G(H)$中的离散子群为 Fuchs 群.

注 $G(\Delta)$中的元素 γ 具有如下形式：$\gamma(z) = e^{2\pi i\theta}\dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}$，其中 $\theta \in [0, 1)$，$a \in \Delta$.

综上所述，我们有下述定理.

定理 1.2 任何 Riemann 曲面共形等价于下述曲面之一：1) $\hat{\mathscr{C}}$；2) $\mathscr{C}$；3) $\mathscr{C}^*$；4) 环面 T；5) H/Γ. 这里 Γ 是 Fuchs 群，除恒等元素外在 H 内没有不动点.

$G(H)$中的元素可由 $\partial H = \mathscr{R} \cup \{\infty\}$ 给定三点的值唯一确定. 如保持 0，1，∞ 不变的元素只能是恒等元素，对于非恒等元素 $\gamma \in G(H)$，可以分为三类：

如果 γ 有两个不同的实不动点，则称 γ 为双曲的. 可以通过 H 上的共形变换将两个不动点映成 0 和∞. 这时，γ 共形共轭于变换 $z \mapsto \lambda z$，$\lambda > 0$，$\lambda \neq 1$. 如有必要，通过变换 $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ 可使 $\lambda > 1$.

如果 $\gamma \in G(H)$ 仅有一个重不动点，则称 γ 是抛物的. 这时该不动点一定是实的，将其映成∞，γ 共形共轭于 $z \mapsto z + c$，$c \in \mathscr{R}$，$c \neq 0$，可规范化为 $c = 1$.

如果 $\gamma \in G(H)$ 有一对共轭复不动点，则称 γ 是椭圆的. 这时有一个不动点 $\omega_0 \in H$. 通过共形变换将 H 映成单位圆盘 Δ，将 ω_0 映成 0，则 γ 共形共轭于 $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$，$\theta \in [0, 1)$，为一旋转.

显然，覆盖变换群不能有椭圆元素，当 γ 为双曲或抛物元素时，γ 生成的无限循环群$\langle\gamma\rangle$是离散群，如果 γ 是双曲的，则 $H/\langle\gamma\rangle$共形等价于圆环 $A_r = \{z \,|\, \gamma < |z| < 1\}$；如果 γ 是抛物的，则 $H/\langle\gamma\rangle$共形等价于穿孔圆盘 $\Delta^* = \Delta\backslash\{0\}$. Δ，Δ^* 及 A_γ 称为初等 Riemann 曲面.

§1.1.2 Riemann 曲面的度量

下面我们在 Riemann 曲面上引进度量(距离). 先讨论单连通情形：$\hat{\mathscr{C}}$，$\mathscr{C}$与 Δ 上的度量.

对于复平面$\mathscr{C}$，其上有自然的 Euclid 度量 $ds = |dz|$ ，或 Euclid 距离 $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$，$z_1$，$z_2 \in \mathscr{C}$，这是熟知的.

考虑 Riemann 球面$\hat{\mathscr{C}}$，$\hat{\mathscr{C}}$同胚于 $\mathscr{R}^3$ 中单位球面 S^2，在 S^2 上有自然的度量，即大圆弧的弧长，通过球极投影到坐标平面上，我们在$\hat{\mathscr{C}}$上