Hamilton 系统的拓扑理论

杨晓松 著

中国科学技术大学出版社

HAMILTON

Hamilton 系统的拓扑理论

杨晓松　著

中国科学技术大学出版社
2000・合肥

图书在版编目(CIP)数据

Hamilton系统的拓扑理论/杨晓松著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2000.8

ISBN 7-312-01192-6

Ⅰ. H…

Ⅱ. 杨…

Ⅲ. 拓扑—动力系统

Ⅳ. O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第21454号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号,230026)

安徽肥西新华印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:850×1168/32　印张:5　字数:130千

2000年8月第1版　2000年8月第1次印刷

印数:1—1000册

定价:10.00元

前　言

Hamilton 动力系统理论有着悠久而丰富的历史，它本身是 Lagrange 力学的升华与推广，从数学角度看又是一门内容精深的相空间几何学，如辛几何、辛拓扑等都源于此．近几十年来，随着纯数学理论的不断发展与计算机的普遍应用，Hamilton 动力系统理论又成为当今非线性科学中极其活跃而富有魅力的研究领域，不同背景的科学家、数学家纷纷投身于该领域．此外，Hamilton 动力系统理论的发展又为一般动力系统理论的发展提供了强大的推动力，使动力系统理论成为当今主流理论之一．1994 年国际数学家大会 Fields 奖的颁发无可争议地说明了这个事实．

当今 Hamilton 动力系统理论的发展为各种纯数学理论提供了用武之地，其中数论与拓扑学更是大大促进了人们对 Hamilton 动力系统的认识，本书所探讨的 Hamilton 系统的拓扑理论正是在这种背景下发展起来的．尽管人们很早就运用拓扑思想处理动力学问题，但 Hamilton 动力系统的拓扑理论却很年青．虽然早在 20 世纪 70 年代，美国著名数学家 Smale 在其奠基性论文《拓扑与力学》中就倡导有关的拓扑理论研究，但直到 80 年代末才由前苏联的一个数学家群体将 Smale 的想法贯彻实施．到目前为止，从事该领域研究的基本上是以 Fomenko 为首的俄罗斯(前苏联)学派和少数西方的学者．

本书主要是为具有拓扑、微分几何与辛几何背景的物理学或力学方面的学者和对应用感兴趣的拓扑或几何学家写的，考虑本书的读者对象，我们基本上着重介绍基本概念和思想，而除非能给

出简短证明,否则将复杂的证明略去不提,对证明感兴趣的读者可查阅书后的参考文献. 由于本书的后半部分涉及的大多是我自己的工作,故证明讨论比较详细. 本书的主要内容大致如下:首先简述一下准备知识,其中数学方面包括微分流形、微分形式、Riemann几何、辛几何、同调群、基本群等基本知识,Hamilton 力学方面有 Liouville 可积性、Bott 积分及动量映射等. 在准备工作之后,先讨论(主要是 2 个自由度的)可积 Hamilton 系统能量面的拓扑,其内容包括辛流形上可积 Hamilton 系统的若干基本概念和基本性质、可积 Hamilton 系统能量面的拓扑及其与稳定周期解个数的下界的关系、圆 Morse 函数与能量面的拓扑等. 接下来讨论一般(可积与不可积)Hamilton 系统的拓扑,首先建立了向量丛诱导的奇异丛的拓扑理论,然后运用有关理论讨论自然 Hamilton 系统能量面的拓扑及有关整体 Poincaré 截面的存在性问题. 最后,我们介绍了 Maupertuis-Jacobi 原理及其在 Hamilton 系统中的应用,讨论了 Riemann 流形上曲率对测地流可积性的影响,及其在当今热门领域混沌动力学中的应用.

由于 Hamilton 系统的拓扑理论是一个全新的有待发展的领域,再加上著者的学识和时间所限,书中的错误与不足在所难免,敬候读者朋友们指正.

杨晓松

1999 年 6 月 15 日

目　次

第 1 章　准备知识

本章将简略介绍一下后面讨论所需的准备知识，有关的详细讨论可参考相应的教科书(见书后参考文献).

1.1　微分流形

流形

所谓流形，直观地说，就是局部看起来同欧氏空间一样的一个集合或几何对象. 比如地球的表面，每一局部小块粗略地看起来像一块平地，但整体看起来就是一个球面，故可认为这是一个 2 维流形. 如果一个流形上赋予了一定的光滑结构，那么这个流形就是一个微分流形. 空间解析几何中的球面、环面等大多数曲面都是(2 维)微分流形. 为明确起见，下面给出微分流形的数学定义.

设 M 是一满足 Hausdorff 分离公理的拓扑空间(在实际讨论中，还要求 M 满足第二可数公理). (U,φ)称为 M 的一个局部坐标卡(或一个局部坐标系)，如果 U 是 M 的一个开集，φ是 U 到 R^n 中开集 $\varphi(U)$的一个同胚映射.

M 的两个图卡(U_1,φ_1)和(U_2,φ_2)称为 c^r 相容的，如果 $U_1\cap U_2=\varnothing$，或者 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$，并且坐标变换

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:\ \varphi_1(U_1\cap U_2)\to\varphi_2(U_1\cap U_2)$$

以及

$$\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}:\ \varphi_2(U_1\cap U_2)\to\varphi_1(U_1\cap U_2)$$

都是 c^r(即 r 次连续可微)映射.

M 的一族局部坐标卡 $\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 称为一个 c^r 图册，如果下述条件成立：

(1) 开集族 $\{U_\alpha\}$ 覆盖 M；

(2) $\mathscr{D}$ 中任意两个图卡都 c^r 相容.

M 的一个 c^r 图册 $\mathscr{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 被称为极大的，如果除条件(1)、(2)外还满足条件：

(3) 与 $\mathscr{D}$ 中各局部坐标卡 c^r 相容的任一局部坐标卡 (U,φ) 都属于 $\mathscr{D}$.

M 上的一个极大 c^r 图册 $\mathscr{D}$ 称为 M 上的一个 c^r 结构，M 连同一个 c^r 结构一起称为 c^r 流形. 当 $r\geqslant 1$ 时，统称为微分流形. 一个 c^∞ 流形又叫光滑流形. 由于局部坐标卡 (U,φ) 是以欧氏空间 R^n 为基准的，故 n 称为 M 的维数，记为 $\dim M=n$，M 叫做 n 维可微流形.

子流形

设 M 是 c^r 流形，$\dim M=n$，$N\subset M$ 是 M 的一个子集. 如果对任一点 $x\in N$，存在 M 的局部坐标卡 (U_x,φ_x)，使得 $x\in U_x$，并且有

$$\varphi_x(U_x\cap N)=\varphi_x(U_x)\cap(R^s\times 0),$$

那么 N 被称作 M 的 s 维子流形.

有边流形

我们知道，在前面所给的微分流形 M 的定义中，所给的图卡是以标准的欧氏空间 R^n 为基准的. 若将标准欧氏空间 R^n 改为半空间

$$R_+^n=\{(x^1,x^2,\cdots,x^n)\in R^n\,|\,x^n\geqslant 0\},$$

而其它条件不变，我们就得到有边微分流形的定义. 此时，M 的边界是如下点 y 的集合：

存在 M 上的图卡 (U,φ)，$y\in U$，使得

$$\varphi(y) \in \{(x^1, x^2, \cdots, x^n) \in R^n_+ \mid x^n = 0\}.$$

设 M 的边界为 ∂M,易见其本身是 $n-1$ 维无边流形.

切空间与切丛

设 M 是一个 n 维 c^r 流形,其上一点 x 的切空间乃是曲线上一点处的切线以及曲面上一点处的切平面在高维情形下的推广. 可直观地说明如下:

设 M 已嵌入到一欧氏空间 R^m 中,对于任意一个 c^r 曲线

$$\alpha(t) \subset M, \quad \alpha(0) = x \in M,$$

其速度向量

$$v_x = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t}$$

称作 M 在 x 点处的一个切向量,所有这种切向量的全体就构成了 M 在 x 点处的切空间 TM_x. 易见这是一个 n 维向量空间.

切空间也可内蕴地定义如下:

设有曲线 $\alpha:(-1,1)\to M$ 与曲线 $\beta:(-1,1)\to M$ 满足 $\alpha(0)=\beta(0)=x\in M$,并且在 M 的某个局部坐标卡 (U_x,φ_x) 中有

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_x \circ \alpha(t) - \varphi_x \circ \beta(t)}{t} = 0,$$

则称 α 与 β 在 x 处相切. 易见这种相切是一等价关系,而且不依赖于局部坐标卡的选择.

定义 1.1 流形 M 在点 x 处的切向量就是满足 $\alpha(0)=x$ 的曲线 $\alpha:(-1,1)\to M$ 在相切意义下的一个等价类. 易见,所有在 x 点处的这种曲线的等价类的全体构成一个向量空间 TM_x,TM_x 称为 M 在 x 点处的切空间.

M 在其各点处的切空间的并 $TM=\bigcup_{x\in M} TM_x$ 就称为 M 的切丛. 易见 TM 有一个自然的微分流形构造,故是一个 $2n$ 维微分流形. TM 的局部坐标卡可如下构造:设 (U_x,φ_x) 是 M 在点 x 的邻域

中的一个局部坐标卡，φ_x 在 U_x 中的局部坐标记为 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$，而 $\zeta=(\zeta^1,\zeta^2,\cdots,\zeta^n)$是切向量在此坐标系下的分量．则$(x,\zeta)$给出 TM 的一个局部坐标系表示，自然投影 $p:TM\to M$ 定义为

$$p(x,v)=x,\quad x\in M,v\in TM_x,$$

故 $p^{-1}(x)=TM_x$，并称之为 TM 在点 x 上的纤维．因此，切丛的纤维本质上是欧氏空间 R^n.

切丛的概念可推广到一般向量丛上去．

c^r 可微映射

令 $f:M\to N$ 是 c^r 微分流形 M 到 c^r 微分流形 N 的映射．对任一点 $x\in M$，考虑点 x 处的局部坐标卡(U_x,φ_x)与点 $f(x)\in N$ 处的局部坐标卡$(V_{f(x)},\psi_{f(x)})$，若映射

$$A=\psi_{f(x)}\circ f\circ\varphi_x^{-1}(y):U_x\to V_{f(x)}$$

是一个 c^r 映射，即 A 的分量都是 c^r 可微函数，那么 f 称为 c^r 可微映射．

此外，f 还诱导出 $x\in M$ 处的切空间到 $f(x)\in N$ 处的切空间之间的线性映射

$$f_{*x}:TM_x\to TN_{f(x)},$$

其定义方式如下：

令 $v\in TM_x$，$\alpha:(-1,1)\to M$ 是一可微曲线，$\alpha(0)=x$，且 $\left.\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v$，则 $f_{*x}v\in TN_{f(x)}$定义为

$$f_{*x}v=\left.\frac{\mathrm{d}f(\alpha(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}.$$

微分同胚

设 M 与 N 是 c^r 微分流形，$f:M\to N$ 是 c^r 可微映射，若存在 c^r 可微映射 $g:N\to M$，使得

$$f \circ g: N \to N,$$
$$g \circ f: M \to M$$

分别是 N 与 M 上的恒同映射，则称 f 是 c^r 微分同胚．特别地，若 f 是光滑映射(即 c^∞ 映射)，则称 f 为光滑同胚．

显然，对于微分同胚 $f:M\to N$，映射

$$f_{*x}: TM_x \to TN_{f(x)}$$

是同构．

切向量场

设 M 是一个光滑流形，TM 是 M 的切丛，则 M 上的一个 c^r 切向量场乃是一个 c^r 映射 $v:M\to TM$．具体地说，就是对某一点 $x\in M$，取定一个 x 处的切向量 $v(x)$，并且 v 是 M 上的 c^r 函数，则在局部坐标系$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$下，M 上的向量场 v 可表示为

$$v(x) = v^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + v^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n},$$

其中，$v^j(x)$是 c^r 可微函数．

梯度场

令 M 是一个光滑流形．在 M 上选定一个 Riemann 度量(见 1.3 节)，以$\langle X,Y\rangle_p$ 表示在点 $p\in M$ 处两切向量 X,Y 在给定 Riemann 度量下的内积．M 上一光滑函数 f 的梯度场是由如下恒等式定义的切向量场 grad f：

$$\langle X,\operatorname{grad} f\rangle = Xf = \mathrm{d}f(X),\quad \forall\, X\in TM_p, \forall\, p\in M.$$

在 M 是普通欧氏空间的情况下，grad f 可表示为

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^n},\end{aligned}$$

这里，$\frac{\partial}{\partial x^i}$表示 x^i 坐标方向上的单位向量.

流

令 M 是紧致光滑闭流形，$\mathrm{Diff}^r(M)$是 M 上所有 c^r 微分自同胚组成的集合. 设 $\varphi_t: R\to \mathrm{Diff}^r(M)$是一单参数微分同胚群，且满足：

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t \circ \varphi_s(x),\quad \forall\, x \in M, t, s \in R,$$
$$\varphi_0(x) = x,\quad \forall\, x \in M,$$

那么称 φ_t 是 M 上的流.

M 上的流 $\varphi_t: M\to M$ 定义了 M 上的一个切向量场：

$$X(x) = \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_t(x)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0},$$

在 M 是紧致无边的情形下，由常微分方程的理论知，M 上任一光滑切向量场也生成 M 上的一个流，即微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = X(x(t)),\quad x(0) = x_0,\quad x_0 \in M$$

的积分曲线.

1.2　微分形式

数学家 Arnold 有一句名言："不懂微分形式就不能理解 Hamilton 力学."本节就简单介绍一下微分形式的基本概念.

1-形式

一个 1-形式(一次形式)乃是一个线性函数 $\omega: R^n\to R$，其中
$$\omega(ax + by) = a\omega(x) + b\omega(y),\quad a, b \in R, x, y \in R^n.$$

由线性代数知，R^n 上的 1-形式构成的空间也是 n 维线性空间，称为 R^n 的对偶空间，记为$(R^n)^*$.

在 R^n 上给定一线性坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$，每个坐标 x^i 都定义了一个 1-形式：

$$x^i(v) = \text{向量 } v \text{ 在 } x^i \text{ 坐标上的分量},$$

这 n 个 1-形式线性无关，从而每个 R^n 上的 1-形式都可表示为

$$\omega = a_1x^1 + \cdots + a_nx^n, \quad a_j \in R.$$

2-形式

一个 2-形式就是一个双线性斜对称函数 $\omega^2: R^n \times R^n \to R$，其中

$$\omega^2(ax + by, z) = a\omega^2(x,z) + b\omega^2(y,z),$$
$$\omega^2(x,y) = -\omega^2(y,x),$$
$$\forall\ a,b \in R, x,y,z \in R^n.$$

设 R^n 上的线性坐标系为 $(x^1,\cdots,x^n)$，则 R^n 上的每一个 2-形式都可唯一表示为

$$\omega^2 = \sum_{i<j} a_{ij}x^i \wedge x^j,$$

其中，$\wedge$ 表示外积，其含义如下.

1-形式之间的外积

设 R^n 上给出两个 1-形式 ω_1 和 ω_2，则外积 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 定义为

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1,v_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_2(v_1) \\ \omega_1(v_2) & \omega_2(v_2) \end{vmatrix}, \quad \forall\ v_1,v_2 \in R^n.$$

易见 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 是 $R^n \times R^n$ 到 R 上的一个双线性斜对称函数，因此是一个 2-形式.

直观地说，对于向量对 (v_1,v_2)，$\omega_1 \wedge \omega_2$ 在 (v_1,v_2) 处的值正是以 v_1,v_2 为边的有向平行四边形与以 ω_1,ω_2 为边的有向平行四边形的某种“内积”.

关于 k-形式及其高次形式的外积，可参考有关教科书.

1-微分形式(1阶微分形式)

令 M 为一个微分流形,M 上的 1-微分形式乃是切丛到实数集的可微映射

$$\omega: TM \to R,$$

对每个点 $x\in M$,限制

$$\omega_x: TM_x \to R$$

都是线性映射.

设 $f:M\to R$ 是一可微函数,则 $\mathrm{d}f_x$ 是 TM_x 上的 1-形式,从而是 M 上的 1-微分形式.

设 R^n 的坐标系为 $(x^1,\cdots,x^n)$,则 R^n 上的微分 $\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^n$ 都是 1-微分形式,且线性无关. 进一步,若 ω 是 R^n 上的一个 1-微分形式,则 ω 可唯一表示为

$$\omega = a_1(x)\mathrm{d}x^1 + \cdots + a_n(x)\mathrm{d}x^n,$$

其中,$a_i(x)$ 是相应的可微函数.

注意,微分形式是同微分流形的切空间紧密关联的,是定义在切丛上的形式.

2-微分形式

微分流形 M 上的 2-微分形式 ω^2 是这样一种微分形式,对于每点 $p\in M$,ω_p^2 都是 TM_p 上的 2-形式,即 $\omega_p^2:TM_p\times TM_p\to R$ 是双线性斜对称函数.

设 (U,φ) 是 M 的一个局部坐标卡,则 ω^2 可局部唯一地表示为

$$\omega^2 = \sum_{i<j} a_{ij}(\varphi^{-1}(x))\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j.$$

微分形式的微分

设 f 是微分流形 M 上的可微函数,则 f 是 0-微分形式,其微

分 df 是 1-微分形式，在 M 的局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$下有表达式

$$df=\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n.$$

设 f 如上，ω 是 M 上的 1-微分形式，则 $f\omega$ 的微分定义为

$$d(f\omega)=df\wedge\omega+fd\omega.$$

特别(可证明 $d(d\omega)=d^2\omega=0$)有

$$d(fdx^i)=df\wedge dx^i.$$

1.3 Riemann 度量与曲线长度

为了后面的需要，本节介绍一下 Riemann 几何的一些基本概念. 关于微分几何方面具有深度的入门读物，我们推荐陈省身等人的书[1]与伍鸿熙等人的书[4].

Riemann 度量是欧几里德空间上长度到一般流形上“长度”的一个自然推广. 首先让我们看一个例子.

考虑欧氏空间 R^3，设其坐标系为(x,y,z)，则 R^3 中任一曲线 $c(t)=(x(t),y(t),z(t))$的长度为

$$\int ds=\int(\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t))^{\frac{1}{2}}dt.$$

设 $c(t)$是 R^3 中以原点为中心的单位球面 S^2 上的曲线，则在球坐标系(θ,φ)下，$c(t)$可表示为

$$c(t)=(\cos\theta(t)\cos\varphi(t),\cos\theta(t)\sin\varphi(t),\sin\theta(t)),$$

其无穷小长度为

$$(\theta'^2+\cos^2\theta\varphi'^2)^{\frac{1}{2}}dt.$$

于是，在球坐标系(θ,φ)下的微分表达式

$$ds^2=d\theta^2+\cos^2\theta d\varphi^2$$

给出了度量 S^2 上曲线长度的一个方式，从而得到 S^2 的一个 Riemann度量.