中学生数学
课外读物

数学归纳法

华 罗 庚

上 海 教 育 出 版 社

中学生数学課外讀物

数学归納法

华罗庚

上海教育出版社

一九六四年·上海

中学生数学課外讀物

数 学 归 納 法

华 罗 庚

*

上 海 教 育 出 版 社 出 版

（上 海 永 福 路 123 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 090 号

上海市印刷三厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：1 7/8　字数：39,000

1963 年 11 月第 1 版　1964 年 5 月第 3 次印刷

印数：48,001—146,000 本

統一书号：7150 · 1457

定　　价：（七）0.15 元

編輯說明

数学，在中学里是一門基本工具学科，通过这一学科的教学，必須使中学生掌握数学这个工具，为他們参加生产劳动和进一步学习打下扎实的基础．为了使中学生学好数学，除了必須用最大的努力提高教学质量以外，还需要各方面的配合．我們編輯这套“中学生数学課外讀物”，目的就在于配合教学，使中学生更好地掌握基础知識，进一步提高基本技能，同时扩大他們的眼界，培养他們对数学的爱好，以帮助他們适应参加生产劳动和进一步学习的需要．

这套讀物的內容主要包括下列两个方面：一、就中学数学課程中的一些問題，介紹为深透理解这些問題所需要的基础知識，并提供一些必要的习题，以加强基本訓练和提高运用知識解决实际問題的能力；二、就一些与中学数学有关的专题，介紹数学方法，邏輯知識，数学某些分支的概况，数学史方面的知識，等等．

这套讀物的編写还是一种新的尝試．无論在选題、要求、內容、体裁等方面是否能适合中学生的需要，希望教育工作者和讀者对我們提出宝貴的意見，同时还希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物，帮助我們做好这套讀物的編輯工作．

中学生数学課外讀物編审委員会

1963年8月

目　录

一 写在前面

高中代数教科书里，讲过数学归納法，也有不少的数学参考书讲到数学归納法．但是，我为什么还要写这本小册子呢?

首先，当然是由于这个方法的重要．学好了、学透了，对进一步学好高等数学有帮助，甚至对认識数学的性质，也会有所裨益．但更主要的，我总觉得有些看法、有些材料，值得补充．而这些看法和材料，在我学懂数学归納法的过程中，曾經起过一定的作用．

这里，我先提出其中的一点．

我在中学阶段学习数学归納法这部分教材的时候，总认为学会了

“1 对；假設 n 对，那末 $n+1$ 也对”

的证明方法就滿足了．后来，却愈想愈觉得不滿足，总感到还差了些什么．

抽象地談恐怕談不清楚，还是举个例子来說明吧．

例如：求证

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \qquad (1)$$

这个問题当时我会做．证法如下：

证明：当 $n=1$ 的时候，(1)式左右两边都等于 1；所以，当 $n=1$ 的时候，(1)式成立．

假設当 $n=k$ 的时候(1)式成立，就是

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2. \qquad (2)$$

那末，因为

$$\begin{aligned}&1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3\\&=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+(k+1)^3\\&=\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]^2[k^2+4(k+1)]\\&=\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]^2[k+2]^2\\&=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2,\end{aligned}$$

所以，当 $n=k+1$ 的时候，(1)式也成立.

因此，对于所有的自然数 n，(1)式都成立.（证毕）

上面的证明步驟是不是完整了呢？当然，是完整了．老师应当不加挑剔地完全认可了.

但是，我后来仔細想想，却感到有些不滿足．問題不是由于证明錯了，而是对上面这个恒等式(1)是怎样得来的，也就是对前人怎样发現这个恒等式，产生了疑問．难道这是从天上掉下来的嗎？当然不是！是有“天才”的人，直观地看出来的嗎？也不尽然！

这个問題启发了我：难处不在于有了公式去证明，而在于沒有公式之前，怎样去找出公式来；才知道要点在于言外．而我們以前所学到的，仅仅是其中比較容易的一个方面而已.

我这样說，請不要跟学校里对同学們的要求混同起来，作为中学数学教科书，要求同学們学会数学归納法的运用，就可

以了．而这本书是中学生的数学課外讀物，不是敎科书，要求也就不同了．

話虽如此，一切我們还是从头讲起．

二　归納法的本原

先从少数的事例中摸索出規律来，再从理論上来证明这一規律的一般性，这是人們认識客观法則的方法之一．

以識数为例．小孩子識数，先学会数一个、两个、三个；过些时候，能够数到十了；又过些时候，会数到二十、三十、……一百了．但后来，却决不是这样一段一段地增长，而是飞跃前进．到了某一个时候，他領悟了，他会說：“我什么数都会数了”．这一飞跃，竟从有限跃到了无穷！怎样会的？首先，他知道从头数；其次，他知道一个一个按次序地数，而且不愁数了一个以后，下一个不会数．也就是他領悟了下一个数的表达方式，可以由上一个数来决定，于是，他也就会数任何一个数了．

設想一下，如果这个飞跃现象不出现，那末人們一輩子就只能学数数了．而且人生有限，数目无穷，就是学了一輩子，也决不会学尽呢！

解釋这个飞跃现象的原理，正就是数学归納法．数学归納法大大地帮助我們认識客观事物，由簡到繁，由有限到无穷．

从一个袋子里摸出来的第一个是紅玻璃球、第二个是紅玻璃球、甚至第三个、第四个、第五个都是紅玻璃球的时候，我

們立刻会出現一种猜想:“是不是这个袋里的东西全部都是紅玻璃球?”但是,当我們有一次摸出一个白玻璃球的时候,这个猜想失败了;这时,我們会出現另一个猜想:“是不是袋里的东西,全部都是玻璃球?”但是,当有一次摸出来的是一个木球的时候,这个猜想又失败了;那时我們会出現第三个猜想:“是不是袋里的东西都是球?”这个猜想对不对,还必須继續加以檢驗,要把袋里的东西全部摸出来,才能見个分曉.

袋子里的东西是有限的,迟早总可以把它摸完,由此可以得出一个肯定的結論.但是,当东西是无穷的时候,那怎么办?

如果我們有这样的一个保証:“当你这一次摸出紅玻璃球的时候,下一次摸出的东西,也一定是紅玻璃球”,那末,在这样的保証之下,就不必費力去一个一个地摸了.只要第一次摸出来的确实是紅玻璃球,就可以不再檢查地作出正确的結論:“袋里的东西,全部是紅玻璃球”.

这就是数学归納法的引子.我們采用形式上的讲法,也就是:

有一批編了号碼的数学命題,我們能够証明第1号命題是正确的;如果我們能够証明在第k号命題正确的时候,第$k+1$号命題也是正确的,那末,这一批命題就全部正确.

在上一节里举过的例子:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \qquad (1)$$

当$n=1$的时候,这个等式就成为

$$1^3=\left[\frac{1}{2}\cdot1\cdot(1+1)\right]^2.$$

这是第 1 号命题.（这个命题可以通过驗证，证实它是成立的.）

当 $n=k$ 的时候，这个等式成为

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2, \qquad (2)$$

这是第 k 号命题.（这个命题是假設能够成立的.）

而下一步就是要在第 k 号命題成立的前提下，证明第 $k+1$ 号命題

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2$$

也成立. 所以这个证法就是上面所說的这一原則的体現.

再看下面的一个例子.

例 求证:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \qquad (3)$$

第 1 号命題是：当 $n=1$ 的时候，上面这个等式成为

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}.$$

这显然是成立的.

現在假設第 k 号命題是正确的，就是假設

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

那末，第 $k+1$ 号命題的左边是

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{k+2},$$

恰好等于第 $k+1$ 号命题的右边. 所以第 $k+1$ 号命题也正确.

由此, 我們就可以作出結論: 对于所有的自然数 n, (3)式都成立.

附言: 上面的证明中, 假設"第 k 号命题是正确的", 我們有时用"归納法假設"一語来代替.

三　两条缺一不可

这里, 必須强調一下, 在我們的证法里:

(1) "当 $n=1$ 的时候, 这个命题是正确的";

(2) "假設当 $n=k$ 的时候, 这个命题是正确的, 那末当 $n=k+1$ 的时候, 这个命题也是正确的", 这两条缺一不可.

不要认为, 一个命题在 $n=1$ 的时候, 正确; 在 $n=2$ 的时候, 正确; 在 $n=3$ 的时候也正确, 就正确了. 老实說, 不要說当 $n=3$ 的时候正确还不算数, 就是一直到当 n 是 1 千的时候正确, 或者 1 万的时候正确, 是不是对任何自然数都正确, 还得证明了再說.

不妨举几个例子.

例 1　当 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, 15$ 的时候, 我們可以驗证式子

$$n^2+n+17$$

的值都是素数①. 是不是由此就可以作出这样的結論: “n 是任何自然数的时候, n^2+n+17 的值都是素数”呢?

这个命题是不正确的. 事实上, 当 $n=16$ 的时候,

$$n^2+n+17=16^2+16+17$$

$$=17^2,$$

它就不是素数.

不仅如此, 我們还可以举出同样性质的例子:

(1) 当 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, 39$ 的时候, 式子

$$n^2+n+41$$

的值都是素数; 但是, 当 $n=40$ 的时候, 它的值就不是素数.

(2) 当 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, 11000$ 的时候, 式子

$$n^2+n+72,491$$

的值都是素数, 即使如此, 我們还不能肯定 n 是任何自然数的时候, 这个式子的值总是素数. 事实上, 只要 $n=72,490$ 的时候, 它的值就不是素数.

这也就是說, 即使我們試了 11,000 次, 式子

$$“n^2+n+72,491”$$

的值都是素数, 但我們仍旧不能断定这个命题一般的正确性.

例 2 式子

$$2^{2^n}+1,$$

当 $n=0, 1, 2, 3, 4$ 的时候, 它的值分别等于 3, 5, 17, 257, 65537, 这 5 个数都是素数. 根据这些資料, 費尔馬(Fermat)

---

① 素数又称质数, 就是除 1 和它本身以外, 不能被其他自然数整除的数.

就猜想：对于任何自然数 n，式子

$$2^{2^n}+1$$

的值都是素数．但这是一个不幸的猜测．欧拉 (Euler) 举出，当 $n=5$ 的时候，

$$2^{2^5}+1=641\times 6,700,417.$$

因而费尔馬猜错了．

后来，有人还证明当 $n=6,7,8,9$ 的时候，$2^{2^n}+1$ 的值也都不是素数．

例 3
$$\begin{aligned}
x-1&=x-1,\\
x^2-1&=(x-1)(x+1),\\
x^3-1&=(x-1)(x^2+x+1),\\
x^4-1&=(x-1)(x+1)(x^2+1),\\
x^5-1&=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),\\
x^6-1&=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1),
\end{aligned}$$

………………………………………………

从上面这些恒等式，可以看出什么来？

我們可以看出一点："把 x^n-1 分解为不可再分解并且具有整系数的因式以后，各系数的絕对值都不超过 1"．

这个命題是不是正确呢？这就是所謂契巴塔廖夫 (Н. Г. Чеботарев) 問題．后来被依万諾夫 (В. Иванов) 找出了反例，他发現 $x^{105}-1$ 有下面的因式

$$\begin{aligned}
&x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}\\
&\quad+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}\\
&\quad-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}\\
&\quad+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^{9}-x^{8}-2x^{7}-x^{6}\\
&\quad-x^{5}+x^{2}+x+1.
\end{aligned}$$

其中 x^{41} 和 x^7 的系数都是 -2,它的絕对值大于 1.

虽然如此，我們可以证明上面的命题，当 n 是素数的时候,总是对的;当 $n<105$ 的时候,也总是对的.

例 4 一个平面把空間分为两份；两个平面最多可以把空間分为四份；三个平面最多可以把空間分为八份．从这些資料,我們能不能得出这样的結論:

"n 个平面最多可以把空間分为 2^n 份"?

这个命题是不正确的．事实上，四个平面不可能把空間分为 16 份,而最多只能分为 15 份;五个平面也不可能把空間分成 32 份,而最多只能分为 26 份．一般地說，n 个平面最多可以把空間分为 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 份,而不是 2^n 份,并且的确有这样的 n 个平面存在.

怎样证明这一点，讀者可以自己思考①．在思考的过程中,可以先从比較容易的問題入手,試一試证明下面这个命题:

平面上 n 条直綫，最多可以把平面分为 $1+\frac{1}{2}n(n+1)$ 份.

上面这几个例子，总的說明了一个問題:对于一个命题，仅仅驗证了有限次，即使是千次、万次，还不能肯定这个命题的一般正确性．而命题的一般正确性，必須要看我們能不能证明数学归納法的第二句話:"假設当 $n=k$ 的时候,这个命题是正确的,那末当 $n=k+1$ 的时候,这个命题也是正确的".

另一方面,也不要以为"当 $n=1$ 的时候,这个命題是正确的",这句話簡单而丢开不管．在证題的时候，如果只证明了

① 本书以后将证明这一結論(見第 52 頁).

“假設当 $n=k$ 的时候，这个命題是正确的，那末当 $n=k+1$ 的时候，这个命題也是正确的”，而不去驗証“当 $n=1$ 的时候，这个命題是正确的”，那末这个証明是不对的，至少也得說，这个証明是不完整的.

让我們来看几个由于不确切地闡明数学归納法里的第一句話“当 $n=1$ 的时候，这个命題是正确的”，而得出非常荒謬的結果的例子.

例 5 所有的正整数都相等.

这个命題显然是荒謬的. 但是如果我們丟开“当 $n=1$ 的时候，这个命題是正确的”不管，那末可以用“数学归納法”来“証明”它.

这里，第 k 号命題是：“第 $k-1$ 个正整数等于第 k 个正整数”，就是

$$k-1=k.$$

两边都加上 1，就得

$$k=k+1.$$

这就是說，第 k 个正整数等于第 $k+1$ 个正整数. 这不是說明了所有的正整数都相等了嗎？

錯誤就在于，我們沒有考慮 $k=1$ 的情况.

例 6 如果我們不考慮 $n=1$ 的情况，可以証明

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2+l.$$

这里，l 是任何的数.

事实上，假設第 k 号命題

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]^2+l$$

正确，那末象第 2 頁里证过的一样，第 $k+1$ 号命題

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]^2+l$$

也就正确.

但是，这个結論显然是荒謬的.

讲到这里，让我們再重复說一遍：数学归納法的证明过程必須包括两个步驟："当 $n=1$ 的时候，这个命題是正确的"；"假設当 $n=k$ 的时候，这个命題是正确的，那末当 $n=k+1$ 的时候，这个命題也是正确的"．两者缺一不可！缺一不可！

也許有人会問：上面的第一句話要不要改做"当 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 的时候，这个命題是正确的"？

这样的要求是多余的，同时也是不正确的．所以多余，在于除了用 $n=1$ 来驗证以外，还要用 $n=2$ 和 $n=3$ 来驗证，而它的不正确則在于"……"．如果"……"表示試下去都正确，那末試問到底要試到什么地步才算試完呢？

"多余"还可以解釋成我是从 $n=1$, $n=2$, $n=3$ 里看出規律来的，或者希望通过练习熟悉这个公式；但在沒有证明 n 是所有自然数时都对以前就加上"……"，却要不得，这是犯了邏輯上的錯誤！

四　数学归納法的其他形式

数学归納法有不少"变着"．下面我們先来讲几种"变着"

(1) 不一定从 1 开始. 也就是数学归納法里的两句話，可以改成：如果当 $n=k_0$ 的时候，这个命題是正确的，又从假設当 $n=k(k\geqq k_0)$ 时，这个命題是正确的，可以推出当 $n=k+1$ 时，这个命題也是正确的，那末这个命題当 $n\geqq k_0$ 时都正确.

例 1 求证：n 边形 n 个內角的和等于 $(n-2)\pi$.

这里就要假定 $n\geqq 3$.

证明 当 $n=3$ 时，我們知道三角形三个內角的和是 2 直角. 所以，当 $n=3$ 时，命題是正确的.

假設当 $n=k$ $(k\geqq 3)$时命題也是正确的. 設 A_1, A_2,……, A_{k+1} 是 $k+1$ 边形的頂点. 作綫段 A_1A_k, 它把这个 $k+1$ 边形分成两个图形，一个是 k 边形 $A_1A_2\cdots\cdots A_k$, 另一个是三角形 $A_kA_{k+1}A_1$. 并且 $k+1$ 边形內角的和等于后面这两个图形的內角和的和. 就是

$$(k-2)\pi+\pi=(k-1)\pi=[(k+1)-2]\pi.$$

也就是說，当 $n=k+1$ 时这个命題也是正确的. 因此，定理得证.

例 2 求证：当 $n\geqq 5$ 的时候，$2^n>n^2$.

证明 当 $n=5$ 时，

$$2^5=32, \qquad 5^2=25;$$

所以

$$2^5>5^2.$$

假設当 $n=k(k\geqq 5)$ 时这个命題是正确的，那末由

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\times 2^k\\&>2\times k^2\\&\geqq k^2+5k\\&>k^2+2k+1\\&=(k+1)^2,\end{aligned}$$