



清华大学
电子与信息技术系列教材

电磁场

理论基础

王 蓓 李国定 龚 克 编著



清华大学出版社

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

清华大学电子与信息技术系列教材

电磁场理论基础

王 蓓 李国定 龚 克 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书系统地介绍了电磁场理论的基本内容,包括静电场、恒定磁场、准静态场、时变场、电磁波在无界空间的自由传播、导波和电磁波的激励。比较系统地介绍了求解电磁问题的几种严格的解析方法,也讨论了近年来出现的计算电磁学中常用的几种数值计算方法的基本原理,并介绍了电磁场理论在电磁兼容性中的应用。为便于读者掌握基本理论,对重要的物理概念从不同的角度加以阐述,并在各章中都列出了较多的典型例题和习题。

该书适于作为高等院校无线电技术专业本科生的教材,也可供从事电磁场理论、微波技术、天线和电磁兼容性领域工作的科技人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论基础/王蕃编著. —北京:清华大学出版社,2001

清华大学电子与信息技术系列教材

ISBN 7-302-04251-9

I. 电… II. 王… III. 电磁场-高等学校-教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 07498 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者:清华大学印刷厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:21.5 字数:532 千字

版 次:2001 年 2 月第 1 版 2001 年 2 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-04251-9/TN·117

印 数:0001~3000

定 价:24.00 元

前 言

1865年英国学者麦克斯韦总结和概括了物理学家法拉第、安培和高斯等前人的工作,创造性地提出位移电流的概念,建立了宏观电磁现象满足的基本规律——麦克斯韦方程组及光的电磁波学说,至今已有一百多年。在这期间,随着科学技术的发展,电磁场理论得到了广泛的应用和发展。尤其近三十年来,无线电电子学、计算机和网络技术的飞速发展,生物电磁学、环境电磁学和电磁兼容性等学科的建立,向电磁场理论提出了许多新的研究课题,使现代电磁场理论得到了迅速的发展。以无线电电子学领域为例,近代发展起来的新技术如雷达、通信、导航、遥感等,均与电磁波的产生、辐射、传播和接收有关,作为微波技术与无线技术的理论基础的电磁场理论,在这些新技术中起着极其重要的作用,同时也得以丰富和发展。反过来,电磁场理论的研究成果又不断地促进了其他学科的发展。因此,“电磁场理论”成为世界各国大学电类专业学生必修的一门技术基础课,本书就是总结了多年来在清华大学电子工程系讲授此课程的经验编写而成的。

由于电磁场理论中的物理量大多是矢量,在定量分析时要用到许多矢量公式、定义和定理,为便于读者查阅,书中第1章概略地介绍了矢量的运算规则、相关的定义和几个在以后相关的章节中要用到的矢量积分定理。

第2章至第4章讨论静电场和恒定磁场。静电场和恒定磁场是电磁场理论的基本内容,它包含了电磁学的基本定理、定律以及求解电磁问题的基本方法。这3章涉及的物理概念多,利用的数学工具多,这些概念和处理问题的方法在一定的条件下对时变场也是有效的。

分析求解一个物理系统中的时变电磁问题严格地说都应采用电磁场理论的方法,即通常称为“场”的方法,但在很多情况下人们采用电路理论的方法,简称为“路”的方法。“路”的方法比“场”的方法要简单得多,但“场”的方法具有普遍性,“路”的方法具有局限性,电路理论只在所研究的场满足准静态的条件下成立,“路”的方法是“场”的方法的特例。作为讨论时变场的过渡,书中第5章讨论准静态场。在该章中,利用准静态条件从电磁场理论的基本方程——麦克斯韦方程,导出了电路理论的基本方程——环路电压定理和节点电流定理。

第6章至第8章讨论时变场,内容涉及时变场满足的基本方程式和时变场的波动特性,包括各种位函数、麦克斯韦方程组、波动方程,电磁波在各种媒质中自由传播的特性和导波。第10章则讨论电磁波的激励。这4章是电磁场理论的核心内容,它是正确理解各种宏观电磁现象和正确解决工程电磁问题必备的基本知识。

20世纪60年代末开始,出现了称之为“计算电磁学”的新学科,它是计算机技术与传统电磁场理论相结合的产物。它的出现大大拓宽了电磁场理论的研究范围,使许多原来不能解决的复杂工程电磁问题能顺利求解。书中第9章介绍了计算电磁学中常用的几种数值计算方法的基本原理。

本书最后的第11章介绍电磁场理论在电磁兼容性中的应用。由于电子设备的应用已渗透到各个领域,工作时伴有寄生辐射的通信设备和各种信息处理设备往往同时配置在同一个场地中,且场地的空间越来越小(尤其在移动的场地中),而设备和系统的灵敏度越来越

高,无线通信的频道日趋拥挤,加上有限的频谱资源被非法滥用,使得系统内和系统间的电磁干扰问题变得越来越严重。信息处理设备在运行过程中产生的信息电磁泄漏失密问题已成为主要的安全风险。因此从20世纪60年代中期开始,逐渐形成了一门称之为“电磁兼容性”的学科。电磁兼容性中的许多问题是必须用电磁场理论才能解决的。第11章中除介绍了电磁兼容性的一些基本概念外,还推导了一些在文献中经常被引用的公式。

本书力求比较系统地介绍求解电磁问题的基本方法,在进行严格的数学分析的同时,对重要的物理概念从不同的角度加以阐述,为便于读者理解,每章都有较多的典型例题和习题。

本书在内容安排上,恒定场与时变场相比,时变场为重点;静电场与恒定磁场相比,静电场为重点。本书目录中标注有*的内容属于较深的内容,可由任课教师自行选择讲授。

全书第1,5,9,10,11章由李国定编写,第2,3,4章由王蕃编写,第6,7,8章由龚克编写。

阅读本书应具备大学物理电磁学和高等数学中的矢量分析、复变函数、数理方程、特殊函数和线性代数的基础知识。

由于作者水平有限,书中难免存在缺点与不足,欢迎广大读者与同行专家批评指正。

作者于清华大学

2000年8月

目 录

第 1 章 矢量分析	1
1.1 矢量及其代数运算	1
1.1.1 矢量的基本概念.....	1
1.1.2 矢量函数的代数运算规则.....	2
1.2 矢量函数和微分	3
1.2.1 矢量函数的偏导数.....	3
1.2.2 梯度、散度和旋度的定义	4
1.3 矢量微分算子	5
1.3.1 微分算子 ∇ 的定义.....	5
1.3.2 含有 ∇ 算子算式的定义与性质.....	6
1.3.3 二重 ∇ 算子.....	7
1.3.4 包含 ∇ 算子的恒等式.....	8
*1.4 并矢及其运算规则	9
1.4.1 并矢的导出及其表达式	9
1.4.2 并矢的运算规则	11
1.4.3 并矢的几点性质	12
1.5 矢量积分定理.....	14
1.5.1 高斯散度定理	14
1.5.2 斯托克斯定理	14
1.5.3 平面格林定理	14
1.5.4 标量格林定理	15
1.5.5 矢量格林定理	15
1.5.6 并矢格林定理	16
1.5.7 其他积分定理	16
1.5.8 亥姆霍兹定理	18
1.6 正交曲线坐标系.....	18
1.6.1 正交曲线坐标系的基本概念	19
1.6.2 正交曲线坐标系中的梯度、散度和旋度.....	21
习题	26
第 2 章 静电场	28
2.1 静电场中的基本定律.....	28
2.1.1 库仑定律	28
2.1.2 电场强度 E	29

2.1.3	高斯定律的积分和微分形式	30
2.2	静电场中的标量电位	32
2.2.1	静电场的保守性	32
2.2.2	标量电位 φ 的定义及其物理意义	33
2.3	存在电介质时的静电场	35
2.3.1	介质的极化	35
2.3.2	电位移矢量 D	37
2.4	电介质的分类	38
2.4.1	线性和非线性电介质	38
2.4.2	各向同性和各向异性电介质	38
2.4.3	均匀和非均匀电介质	39
2.5	静电场中的导体与电容	40
2.5.1	静电场中的导体	40
2.5.2	导体系与部分电容	41
2.6	静电场的边界条件	43
2.6.1	电位移矢量的法向分量	43
2.6.2	电场强度的切向分量	43
2.6.3	标量电位的边界条件	44
2.7	泊松方程与拉普拉斯方程	45
2.7.1	泊松方程与拉普拉斯方程的导出	45
2.7.2	一维泊松方程的解	46
2.8	标量位的多极展开	49
2.8.1	电偶极子	49
2.8.2	标量位的多极展开	50
2.9	静电场的能量与力	54
2.9.1	点电荷系的能量	54
2.9.2	能量的场强表示	55
2.9.3	作用在导体上的电场力	56
2.9.4	作用在电介质上的力	57
2.9.5	虚位移法	59
	习题	61

第3章 静电场边值问题的解析解 65

3.1	边值问题的分类和解的唯一性定理	65
3.1.1	边值问题的分类	65
3.1.2	静电场中解的唯一性定理	65
3.2	镜象法	66
3.2.1	点电荷对无限大接地导体平面的镜象	67
3.2.2	点电荷对导体球面的镜象	69

3.2.3	线电荷对导体圆柱面的镜象	70
3.2.4	点电荷对无限大介质平面的镜象	72
3.3	复变函数法	73
3.3.1	复位函数	74
3.3.2	保角变换	76
3.4	分离变量法	81
3.4.1	直角坐标系中的分离变量法	81
3.4.2	圆柱坐标系中的分离变量法	86
3.4.3	圆球坐标系中的分离变量法	93
3.5	点电荷密度的 δ 函数表示	97
3.5.1	δ 函数	98
3.5.2	点源的 δ 函数表示	98
3.6	格林函数法	99
3.6.1	泊松方程的积分形式解	99
3.6.2	格林函数法	102
	习题	107
第4章	稳恒磁场	111
4.1	安培定律和磁感应强度 B	111
4.1.1	安培定律	111
4.1.2	毕奥-萨伐尔定律	112
4.1.3	洛伦兹力	114
4.2	磁场的高斯定律和安培环路定律	116
4.2.1	磁场的高斯定律	116
4.2.2	安培环路定律	116
4.3	稳恒磁场的矢量磁位	121
4.3.1	矢量磁位 A 的引入	121
4.3.2	矢量磁位 A 所满足的微分方程	122
4.4	物质的磁化和磁化强度	125
4.4.1	磁介质的分类和磁化强度	125
4.4.2	空中存在磁介质时对任一点磁感应强度的影响	126
4.4.3	磁场强度 H , 磁化率 χ_m , 相对磁导率 μ_r	127
4.5	磁场的边界条件	130
4.5.1	磁感应强度 B 的法线分量	130
4.5.2	磁场强度 H 的切线分量	131
4.5.3	磁化强度 M 的切线分量	131
4.5.4	矢量磁位 A 所满足的边界条件	132
4.6	标量磁位	132
4.7	磁场的边值问题	135

习题	139
第 5 章 准静态场、电感和磁场能	142
5.1 法拉弟电磁感应定律	142
5.1.1 电磁感应定律	142
5.1.2 静止系统中的感生电动势	142
5.1.3 运动系统中的感生电动势	143
5.2 电荷守恒定律	146
5.3 准静态场	146
5.4 作为准静态近似的电路理论	148
5.5 电感	149
5.6 磁场的能量与磁场力	152
5.6.1 磁场中储存的能量	152
5.6.2 磁场力	154
习题	157
第 6 章 时变电磁场	160
6.1 麦克斯韦方程组	160
6.1.1 位移电流和麦克斯韦方程组的提出	160
6.1.2 麦克斯韦方程组的微分形式和场结构关系	161
6.1.3 麦克斯韦方程组的积分形式	162
6.1.4 时谐电磁场和麦克斯韦方程组的复数形式	163
6.1.5 边界条件	164
6.1.6 磁流、磁荷和麦克斯韦方程组的广义形式	164
6.2 时变电磁场的位函数	167
6.2.1 矢量磁位 \mathbf{A} 、标量电位 φ 与规范不变性	167
6.2.2 矢量电位 \mathbf{A}_m 与标量磁位 φ_m	169
* 6.2.3 赫兹位 Π_e 和 Π_m	170
6.3 时变电磁场的波动性和波动方程	171
6.3.1 波动方程的导出	171
6.3.2 标量波动方程的解和标量波函数	173
* 6.3.3 矢量波动方程的解和矢量波函数	176
6.4 非齐次波动方程的解和时变场的格林函数	178
* 6.4.1 非齐次波动方程的格林函数解法	178
* 6.4.2 时变场的标量格林函数和推迟位	180
6.4.3 时谐场的并矢格林函数	183
6.5 时变场的坡印亭定理	184
6.5.1 一般时变场的坡印亭定理	184
6.5.2 时谐场的坡印亭定理	186

6.6	解的唯一性定理与辐射条件	188
6.6.1	解的唯一性定理	188
*6.6.2	辐射条件	188
	习题	189
第7章	平面电磁波	191
7.1	无限大无损媒质中的均匀平面波	191
7.1.1	无损媒质中均匀平面波的传播特点	191
7.1.2	沿任意方向传播的平面波	197
7.2	有损媒质中均匀平面波的传播特性	198
7.3	电磁波的极化	201
7.4	电磁波在各向异性媒质中的传播	204
7.4.1	等离子体中的电磁波	204
7.4.2	铁氧体中的电磁波	210
7.5	媒质的色散与波的色散、相速、群速	213
7.5.1	介质的色散	213
7.5.2	导体的色散	214
7.5.3	相速与群速	215
7.6	非均匀平面波	218
7.7	平面电磁波的反射与折射	219
7.7.1	反射定律和折射定律	219
7.7.2	反射系数与折射系数	220
7.7.3	无反射与全反射	223
7.8	分层媒质中的波	224
7.8.1	法向波阻抗	224
7.8.2	单层介质的反射与折射	225
*7.8.3	任意多层介质的反射与折射	228
7.9	平面电磁波对导体平面的投射	229
7.9.1	对理想导体平面的投射	229
7.9.2	对非理想导体平面的投射	231
	习题	234
第8章	波导与谐振腔	237
8.1	柱形传输结构中场的关系——纵向分量法	238
8.2	双导体传输线——同轴线	240
8.3	空心波导——金属矩形波导	242
8.3.1	横磁波(TM模)	242
8.3.2	横电波(TE模)	244
8.3.3	波导的截止频率	245

8.3.4	波导中的相速度与群速度及波导波长	246
8.3.5	沿波导传输的功率	247
8.4	谐振腔	248
*8.5	光波导简介	250
习题		252
第9章	数值计算方法	253
9.1	有限单元法	253
9.1.1	泛函及泛函的变分	253
9.1.2	与边值问题等价的变分问题	254
9.1.3	区域剖分和插值函数	258
9.1.4	单元分析	261
9.1.5	总体合成	262
9.1.6	引入强加边界条件	265
9.2	矩量法	271
9.2.1	矩量法的基本原理	271
9.2.2	基函数和权函数的选择	275
9.3	有限差分法	278
9.4	时域有限差分法	281
习题		287
第10章	电磁波的辐射	288
10.1	推迟位的多极子展开	288
10.2	电偶极子的辐射场	291
10.2.1	近区场	292
10.2.2	远区场(辐射场)	292
10.3	磁偶极子的辐射场	294
*10.4	惠更斯原理和零值定理	295
习题		300
第11章	电磁场理论在电磁兼容性中的应用	302
11.1	综述	302
11.2	电磁兼容性的基本概念	303
11.2.1	电磁兼容性问题中常用的定义	303
11.2.2	造成干扰的三要素	303
*11.3	分析和解决电磁兼容性问题的方法	306
11.3.1	问题解决法	306
11.3.2	规范法	307
11.3.3	系统法	307

* 11.4	短线天线和小圆环天线的辐射场	307
11.4.1	短线天线和小圆环天线产生的辐射场的一般表示式	308
11.4.2	短线天线和小圆环天线的远区场和近区场	309
11.4.3	近区和远区的转换区	310
11.4.4	高阻抗场和低阻抗场	311
* 11.5	近场的阻抗	311
11.5.1	短线天线近场的波阻抗	312
11.5.2	小圆环天线近场的波阻抗	312
* 11.6	屏蔽的理论和实践	313
11.6.1	静态(或准静态)场的屏蔽	314
11.6.2	屏蔽的等效电路模型	317
11.6.3	屏蔽的平面波或传输线模型	322
11.6.4	平面波模型推广到非理想屏蔽结构	326
习题	329
参考书目	330

第 1 章 矢量分析

“电磁场理论基础”课程的基本任务是研究电磁场作为一种物质形态的运动规律。众所周知,电磁场是一矢量场,其基本量电场强度 E 、电位移矢量 D 、磁感应强度 B 和磁场强度 H 都是矢量函数,研究电磁场运动规律的基本出发点是麦克斯韦方程组,而这一方程组正是矢量函数的微分方程组。因此在本门课程的学习中自始至终都要遇到矢量函数的代数运算、微分运算与积分运算。为了便于本门课程的学习,我们将矢量运算(包括代数运算、微分与积分运算)的基本规律以及与它密切相关的坐标系问题做一扼要的介绍,主要包括梯度、散度和旋度的定义,一些矢量恒等式和几个重要的积分定理,有关并矢及其运算规则。

1.1 矢量及其代数运算

1.1.1 矢量的基本概念

1. 矢量与标量

矢量是既有大小又有方向的量,例如力、位移、速度等。在矢量运算中常用黑体字母如 A 来表示一个矢量,而它的大小(即模)则用符号 $|A|$ 或 A 表示。

标量则是只有大小而无方向的量,例如质量、时间、温度等。

2. 单位矢量与矢量的分量

单位矢量是长度为 1 的矢量,本书中以上方带有“^”符号的黑体字母表示,如 \hat{u} ,显然 $|\hat{u}|=1$ 。由定义可知

$$\hat{u} = A/A \text{ 或 } A = A\hat{u} \quad (1-1)$$

在直角坐标系中有一组基本单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$,它们的方向与右手直角坐标系中 x, y, z 轴方向一致,见图 1-1。当然,也可以定义其他正交坐标系中的基本单位矢量,这将在 1.6 节中介绍。

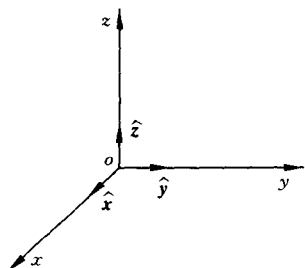


图 1-1 直角坐标系中的单位矢量

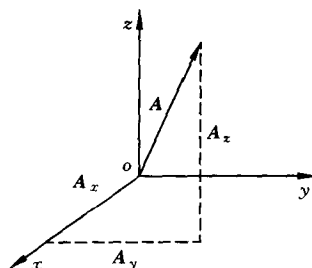


图 1-2 矢量的分量

三维空间中任何矢量 A 都可以在一直角坐标系中用始于原点 o 的矢量来表示,见

图 1-2。设起点为 o 的矢量 A 的终点坐标是 (A_x, A_y, A_z) , 则有

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (1-2)$$

式中 A_x, A_y, A_z 是矢量 A 在 x, y, z 方向的分量。显然 A 的大小为

$$|\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1-3)$$

3. 位置矢量

设空间中有一点 P , 它的位置在所选择的坐标系下可以用一从原点出发的矢量 r 来表示, 矢量 r 叫做点 P 的位置矢量, 见图 1-3。显然 r 的分量是点 P 的坐标值 (x, y, z) , 即

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1-4)$$

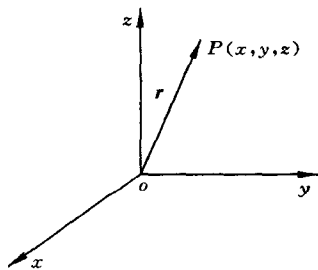


图 1-3 位置矢量

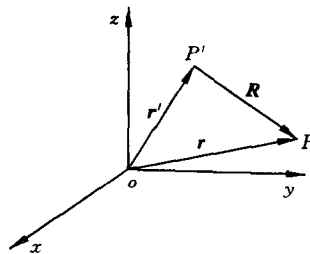


图 1-4 相对位置矢量

类似地, 如另有一点 $P'(x', y', z')$, 则它的位置也可用一位置矢量

$$\mathbf{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$$

来表示, 依此推论, 点 P 相对于点 P' 的位置也可用从 P' 到 P 的矢量 R 来表示(见图 1-4), 矢量 R 称为点 P 相对于点 P' 的相对位置矢量。显然, $\mathbf{r}' + \mathbf{R} = \mathbf{r}$, 所以

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (1-5)$$

矢量 R 用 P 点和 P' 点的坐标值表示时, 为

$$\mathbf{R} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} \quad (1-6)$$

所以 R 的模的平方为

$$R^2 = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] \quad (1-7)$$

1.1.2 矢量函数的代数运算规则

设 A, B, C 都是矢量函数, 则它们满足以下运算规则:

$$(1) \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1-8)$$

$$(2) \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (1-9)$$

$$(3) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = AB \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1-10)$$

$$(4) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-11)$$

(5) 设 \hat{u} 是垂直 A, B 所在平面的单位矢量, 则

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \hat{u} \quad (1-12)$$

$$(6) \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-13)$$

$$(7) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-14)$$

(8) 若 $\mathbf{A} = A_1 \hat{u}_1 + A_2 \hat{u}_2 + A_3 \hat{u}_3, \mathbf{B} = B_1 \hat{u}_1 + B_2 \hat{u}_2 + B_3 \hat{u}_3$, 则

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (1-15)$$

$$(9) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-16)$$

$$(10) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (1-17)$$

$$(11) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \quad (1-18)$$

$$(12) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1-19)$$

以上的运算规则都已在矢量代数中证明过,这里不再重复。应当指出的是,上述运算规则与坐标系的选择无关。在 1.3.1 节中引入微分算子“ ∇ ”后,矢量函数的许多微分运算规则可以从上面列出的代数运算规则直接导出。

1.2 矢量函数和微分

我们所研究的电磁场在通常情况下是在一定空间内连续变化又随时间而改变的矢量场,因此在讨论中经常要遇到矢量函数对变量求导的问题。

1.2.1 矢量函数的偏导数

设矢量 \mathbf{A} 是依赖于一个以上变量的矢量函数,如 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$,则定义 \mathbf{A} 对于变量 x, y, z 的偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x, y + \Delta y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x, y, z + \Delta z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta z}$$

上述定义中假定了等式右端的极限必须存在。由于

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{x} + A_y(x, y, z)\hat{y} + A_z(x, y, z)\hat{z}$$

所以

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{z}$$

这样,矢量函数 \mathbf{A} 的全微分 $d\mathbf{A}$ 就是

$$d\mathbf{A} = dA_x\hat{x} + dA_y\hat{y} + dA_z\hat{z}$$

而

$$dA_x = \frac{\partial A_x}{\partial x}dx + \frac{\partial A_x}{\partial y}dy + \frac{\partial A_x}{\partial z}dz$$

对 dA_y, dA_z 亦有类似的表达式,代入前一式得

$$\begin{aligned}
dA &= \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{z} \right\} dx + \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{z} \right\} dy \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \hat{z} \right\} dz \\
&= \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial z} dz
\end{aligned} \tag{1-20}$$

其形式与标量函数 f 的全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \tag{1-21}$$

相类似。

1.2.2 梯度、散度和旋度的定义

1. 梯度

尽管电磁场本质上是一矢量场,但在某些特定条件下亦可定义一个标量函数作为辅助量或作为形式参量以简化问题,此时,标量函数 f 也是一多变量函数,它的全微分为

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

上式可以看成是两个矢量 \mathbf{A} 和 $d\mathbf{r}$ 的点积,其中

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \tag{1-22}$$

于是有

$$d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

如式(1-22)所示, \mathbf{A} 的分量是标量函数 f 随空间坐标方向的变化率,定义矢量 \mathbf{A} 为标量函数 f 的梯度,记为

$$\mathbf{A} = \text{grad } f \tag{1-23}$$

2. 散度

从场论知识可知,一个矢量函数的曲面积分称为此矢量场穿过该曲面的通量 Φ ,即

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{1-24}$$

现将 S 曲面取为闭合曲面,令此闭合曲面所包围的体积为 ΔV ,当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时,若极限

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \text{div } \mathbf{A} \tag{1-25}$$

存在,则称此极限值为矢量函数 \mathbf{A} 在该点的散度。从此定义出发可以证明,在直角坐标系中

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-26}$$

3. 旋度

根据场论中的定义,一矢量函数 \mathbf{A} 的旋度仍为一矢量,它在某方向 \hat{n} 上的投影,等于该矢量 \mathbf{A} 沿垂直于 \hat{n} 的无限小面积 ΔS 的周线 c 的线积分(积分方向与 \hat{n} 成右手关系)与 ΔS 的比值的极限,即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S} = (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (1-27)$$

式中的 $\text{rot } \mathbf{A}$ 称为矢量场 \mathbf{A} 的旋度, 由此定义出发可以证明, 在直角坐标系中

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1-28)$$

1.3 矢量微分算子

1.3.1 微分算子 ∇ 的定义

在电磁场理论中会经常遇到上述的梯度、散度、旋度以及二阶微分的运算, 这些运算虽不困难但都比较繁琐。为了简化运算, 引入了微分算子 ∇ , 它已成为场论分析中不可缺少的工具。 ∇ 算子运算法的优点在于可以把对矢量函数的微分运算转变成矢量代数运算, 从而明显地简化运算过程, 并且推导简明扼要, 易于掌握。

微分算子 ∇ 是一个“符号”矢量, 它在直角坐标系中的定义式为

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (1-29)$$

并规定, 它的各个分量可以像普通矢量的分量一样进行运算, 而 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和标量函数 f 的乘积则理解为对 f 的偏导数, 即 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 。

根据这样的定义和规定, 上面所提到的梯度、散度和旋度就可以以一种更简洁方式来表示, 因为

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

所以梯度、散度和旋度可用微分算子 ∇ 表示成

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} = \nabla f \quad (1-30)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1-31)$$