清华大学
电子与信息技术系列教材

电磁场理论基础

王 蔷 李国定 龚 克 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

清华大学电子与信息技术系列教材

电磁场理论基础

王 蔷 李国定 龚 克 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书系统地介绍了电磁场理论的基本内容，包括静电场、恒定磁场、准静态场、时变场、电磁波在无界空间的自由传播、导波和电磁波的激励。比较系统地介绍了求解电磁问题的几种严格的解析方法，也讨论了近年来出现的计算电磁学中常用的几种数值计算方法的基本原理，并介绍了电磁场理论在电磁兼容性中的应用。为便于读者掌握基本理论，对重要的物理概念从不同的角度加以阐述，并在各章中都列出了较多的典型例题和习题。

该书适于作为高等院校无线电技术专业本科生的教材，也可供从事电磁场理论、微波技术、天线和电磁兼容性领域工作的科技人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论基础/王蔷编著．—北京：清华大学出版社，2001

清华大学电子与信息技术系列教材

ISBN 7-302-04251-9

Ⅰ．电…　Ⅱ．王…　Ⅲ．电磁场-高等学校-教材　Ⅳ．O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 07498 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

印刷者：清华大学印刷厂

发行者：新华书店总店北京发行所

开　本：787×1092 1/16　印张：21.5　字数：532 千字

版　次：2001 年 2 月第 1 版　2001 年 2 月第 1 次印刷

书　号：ISBN 7-302-04251-9/TN・117

印　数：0001～3000

定　价：24.00 元

前　　言

1865 年英国学者麦克斯韦总结和概括了物理学家法拉第、安培和高斯等前人的工作，创造性地提出位移电流的概念，建立了宏观电磁现象满足的基本规律——麦克斯韦方程组及光的电磁波学说，至今已有一百多年。在这期间，随着科学技术的发展，电磁场理论得到了广泛的应用和发展。尤其近三十年来，无线电电子学、计算机和网络技术的飞速发展，生物电磁学、环境电磁学和电磁兼容性等学科的建立，向电磁场理论提出了许多新的研究课题，使现代电磁场理论得到了迅速的发展。以无线电电子学领域为例，近代发展起来的新技术如雷达、通信、导航、遥感等，均与电磁波的产生、辐射、传播和接收有关，作为微波技术与无线技术的理论基础的电磁场理论，在这些新技术中起着极其重要的作用，同时也得以丰富和发展。反过来，电磁场理论的研究成果又不断地促进了其他学科的发展。因此，"电磁场理论"成为世界各国大学电类专业学生必修的一门技术基础课，本书就是总结了多年来在清华大学电子工程系讲授此课程的经验编写而成的。

由于电磁场理论中的物理量大多是矢量，在定量分析时要用到许多矢量公式、定义和定理，为便于读者查阅，书中第 1 章概略地介绍了矢量的运算规则、相关的定义和几个在以后相关的章节中要用到的矢量积分定理。

第 2 章至第 4 章讨论静电场和恒定磁场。静电场和恒定磁场是电磁场理论的基本内容，它包含了电磁学的基本定理、定律以及求解电磁问题的基本方法。这 3 章涉及的物理概念多，利用的数学工具多，这些概念和处理问题的方法在一定的条件下对时变场也是有效的。

分析求解一个物理系统中的时变电磁问题严格地说都应采用电磁场理论的方法，即通常称为"场"的方法，但在很多情况下人们采用电路理论的方法，简称为"路"的方法。"路"的方法比"场"的方法要简单得多，但"场"的方法具有普遍性，"路"的方法具有局限性，电路理论只在所研究的场满足准静态的条件下成立，"路"的方法是"场"的方法的特例。作为讨论时变场的过渡，书中第 5 章讨论准静态场。在该章中，利用准静态条件从电磁场理论的基本方程——麦克斯韦方程，导出了电路理论的基本方程——环路电压定理和节点电流定理。

第 6 章至第 8 章讨论时变场，内容涉及时变场满足的基本方程式和时变场的波动特性，包括各种位函数、麦克斯韦方程组、波动方程，电磁波在各种媒质中自由传播的特性和导波。第 10 章则讨论电磁波的激励。这 4 章是电磁场理论的核心内容，它是正确理解各种宏观电磁现象和正确解决工程电磁问题必备的基本知识。

20 世纪 60 年代末开始，出现了称之为"计算电磁学"的新学科，它是计算机技术与传统电磁场理论相结合的产物。它的出现大大拓宽了电磁场理论的研究范围，使许多原来不能解决的复杂工程电磁问题能顺利求解。书中第 9 章介绍了计算电磁学中常用的几种数值计算方法的基本原理。

本书最后的第 11 章介绍电磁场理论在电磁兼容性中的应用。由于电子设备的应用已渗透到各个领域，工作时伴有寄生辐射的通信设备和各种信息处理设备往往同时配置在同一个场地中，且场地的空间越来越小(尤其在移动的场地中)，而设备和系统的灵敏度越来越

高，无线通信的频道日趋拥挤，加上有限的频谱资源被非法滥用，使得系统内和系统间的电磁干扰问题变得越来越严重。信息处理设备在运行过程中产生的信息电磁泄漏失密问题已成为主要的安全风险。因此从20世纪60年代中期开始，逐渐形成了一门称之为“电磁兼容性”的学科。电磁兼容性中的许多问题是必须用电磁场理论才能解决的。第11章中除介绍了电磁兼容性的一些基本概念外，还推导了一些在文献中经常被引用的公式。

本书力求比较系统地介绍求解电磁问题的基本方法，在进行严格的数学分析的同时，对重要的物理概念从不同的角度加以阐述，为便于读者理解，每章都有较多的典型例题和习题。

本书在内容安排上，恒定场与时变场相比，时变场为重点；静电场与恒定磁场相比，静电场为重点。本书目录中标注有 * 的内容属于较深的内容，可由任课教师自行选择讲授。

全书第1，5，9，10，11章由李国定编写，第2，3，4章由王蔷编写，第6，7，8章由龚克编写。

阅读本书应具备大学物理电磁学和高等数学中的矢量分析、复变函数、数理方程、特殊函数和线性代数的基础知识。

由于作者水平有限，书中难免存在缺点与不足，欢迎广大读者与同行专家批评指正。

作者于清华大学

2000年8月

目　录

第1章　矢量分析

“电磁场理论基础”课程的基本任务是研究电磁场作为一种物质形态的运动规律。众所周知，电磁场是一矢量场，其基本量电场强度 $\boldsymbol{E}$、电位移矢量 $\boldsymbol{D}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 都是矢量函数，研究电磁场运动规律的基本出发点是麦克斯韦方程组，而这一方程组正是矢量函数的微分方程组。因此在本门课程的学习中自始至终都要遇到矢量函数的代数运算、微分运算与积分运算。为了便于本门课课程的学习，我们将矢量运算（包括代数运算、微分与积分运算）的基本规律以及与它密切相关的坐标系问题做一扼要的介绍，主要包括梯度、散度和旋度的定义，一些矢量恒等式和几个重要的积分定理，有关并矢及其运算规则。

1.1　矢量及其代数运算

1.1.1　矢量的基本概念

1. 矢量与标量

矢量是既有大小又有方向的量，例如力、位移、速度等。在矢量运算中常用黑体字母如 $\boldsymbol{A}$ 来表示一个矢量，而它的大小（即模）则用符号 $|\boldsymbol{A}|$ 或 A 表示。

标量则是只有大小而无方向的量，例如质量、时间、温度等。

2. 单位矢量与矢量的分量

单位矢量是长度为 1 的矢量，本书中以上方带有“ ^ ”符号的黑体字母表示，如 $\hat{\boldsymbol{u}}$，显然 $|\hat{\boldsymbol{u}}|=1$。由定义可知

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}/A \text{ 或 } \boldsymbol{A} = A\hat{\boldsymbol{u}} \tag{1-1}$$

在直角坐标系中有一组基本单位矢量 $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$，它们的方向与右手直角坐标系中 x, y, z 轴方向一致，见图 1-1。当然，也可以定义其他正交坐标系中的基本单位矢量，这将在 1.6 节中介绍。

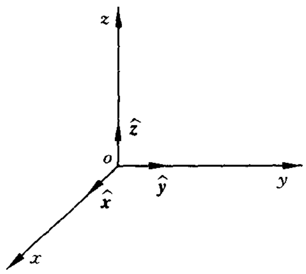

图 1-1　直角坐标系中的单位矢量

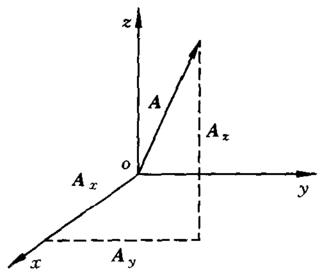

图 1-2　矢量的分量

三维空间中任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以在一直角坐标系中用始于原点 o 的矢量来表示，见

图 1-2。设起点为 o 的矢量 $\boldsymbol{A}$ 的终点坐标是(A_x, A_y, A_z)，则有

$$\boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-2}$$

式中 A_x, A_y, A_z 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x, y, z 方向的分量。显然 $\boldsymbol{A}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{1-3}$$

3. 位置矢量

设空间中有一点 P，它的位置在所选择的坐标系下可以用一从原点出发的矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示，矢量 $\boldsymbol{r}$ 叫做点 P 的位置矢量，见图 1-3。显然 $\boldsymbol{r}$ 的分量是点 P 的坐标值(x, y, z)，即

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-4}$$

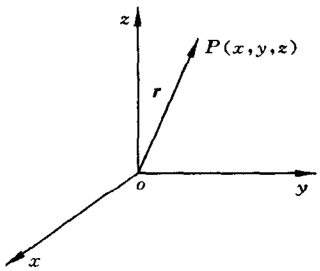

图 1-3 位置矢量

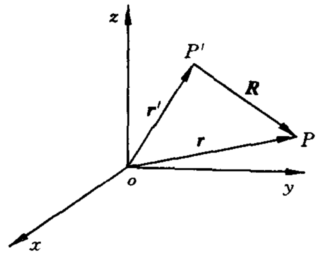

图 1-4 相对位置矢量

类似地，如另有一点 $P'(x', y', z')$，则它的位置也可用一位置矢量

$$\boldsymbol{r}' = x'\hat{\boldsymbol{x}} + y'\hat{\boldsymbol{y}} + z'\hat{\boldsymbol{z}}$$

来表示，依此推论，点 P 相对于点 P' 的位置也可用从 P' 到 P 的矢量 $\boldsymbol{R}$ 来表示（见图 1-4），矢量 $\boldsymbol{R}$ 称为点 P 相对于点 P' 的相对位置矢量。显然，$\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}$，所以

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \tag{1-5}$$

矢量 $\boldsymbol{R}$ 用 P 点和 P' 点的坐标值表示时，为

$$\boldsymbol{R} = (x - x')\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y')\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-6}$$

所以 $\boldsymbol{R}$ 的模的平方为

$$R^2 = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] \tag{1-7}$$

1.1.2 矢量函数的代数运算规则

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是矢量函数，则它们满足以下运算规则：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (1-8)

(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ (1-9)

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=AB\cos\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ (1-10)

(4) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ (1-11)

(5) 设 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 是垂直 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 所在平面的单位矢量，则

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = AB\sin\theta\hat{\boldsymbol{u}} \tag{1-12}$$

(6) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ (1-13)

(7) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ (1-14)

(8) 若 $\boldsymbol{A}=A_1\hat{\boldsymbol{u}}_1+A_2\hat{\boldsymbol{u}}_2+A_3\hat{\boldsymbol{u}}_3$，$\boldsymbol{B}=B_1\hat{\boldsymbol{u}}_1+B_2\hat{\boldsymbol{u}}_2+B_3\hat{\boldsymbol{u}}_3$，则

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}_1 & \hat{\boldsymbol{u}}_2 & \hat{\boldsymbol{u}}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} \tag{1-15}$$

(9) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ (1-16)

(10) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ (1-17)

(11) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ (1-18)

(12) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ (1-19)

以上的运算规则都已在矢量代数中证明过，这里不再重复。应当指出的是，上述运算规则与坐标系的选择无关。在 1.3.1 节中引入微分算子“∇”后，矢量函数的许多微分运算规则可以从上面列出的代数运算规则直接导出。

1.2 矢量函数和微分

我们所研究的电磁场在通常情况下是在一定空间内连续变化又随时间而改变的矢量场，因此在讨论中经常要遇到矢量函数对变量求导的问题。

1.2.1 矢量函数的偏导数

设矢量 $\boldsymbol{A}$ 是依赖于一个以上变量的矢量函数，如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$，则定义 $\boldsymbol{A}$ 对于变量 x，y，z 的偏导数为

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(x,y+\Delta y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(x,y,z+\Delta z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta z}$$

上述定义中假定了等式右端的极限必须存在。由于

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\hat{\boldsymbol{x}}+A_y(x,y,z)\hat{\boldsymbol{y}}+A_z(x,y,z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

所以

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}=\frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}=\frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

这样，矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的全微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 就是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_x\hat{\boldsymbol{x}}+\mathrm{d}A_y\hat{\boldsymbol{y}}+\mathrm{d}A_z\hat{\boldsymbol{z}}$$

而

$$\mathrm{d}A_x=\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_x}{\partial z}\mathrm{d}z$$

对 $\mathrm{d}A_y$，$\mathrm{d}A_z$ 亦有类似的表达式，代入前一式得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{A} &= \left\{\frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{\boldsymbol{z}}\right\}\mathrm{d}x + \left\{\frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{\boldsymbol{z}}\right\}\mathrm{d}y \\
&\quad + \left\{\frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right\}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}
\tag{1-20}
$$

其形式与标量函数 f 的全微分

$$
\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1-21}
$$

相类似。

1.2.2 梯度、散度和旋度的定义

1. 梯度

尽管电磁场本质上是一矢量场，但在某些特定条件下亦可定义一个标量函数作为辅助量或作为形式参量以简化问题，此时，标量函数 f 也是一多变量函数，它的全微分为

$$
\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z
$$

上式可以看成是两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的点积，其中

$$
\boldsymbol{A} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-22}
$$

于是有

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}}
$$

$$
\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z
$$

如式(1-22)所示，$\boldsymbol{A}$ 的分量是标量函数 f 随空间坐标方向的变化率，定义矢量 $\boldsymbol{A}$ 为标量函数 f 的梯度，记为

$$
\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\ f \tag{1-23}
$$

2. 散度

从场论知识可知，一个矢量函数的曲面积分称为此矢量场穿过该曲面的通量 $\boldsymbol{\Phi}$，即

$$
\boldsymbol{\Phi} = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-24}
$$

现将 S 曲面取为闭合曲面，令此闭合曲面所包围的体积为 ΔV，当 $\Delta V\rightarrow 0$ 时，若极限

$$
\lim_{\Delta V\rightarrow 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{A} \tag{1-25}
$$

存在，则称此极限值为矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 在该点的散度。从此定义出发可以证明，在直角坐标系中

$$
\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-26}
$$

3. 旋度

根据场论中的定义，一矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的旋度仍为一矢量，它在某方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 上的投影，等于该矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿垂直于 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的无限小面积 ΔS 的周线 c 的线积分(积分方向与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 成右手关系)与 ΔS 的比值的极限，即

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\Delta S} = (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{1-27}$$

式中的 rot $\boldsymbol{A}$ 称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，由此定义出发可以证明，在直角坐标系中

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1-28}$$

1.3 矢量微分算子

1.3.1 微分算子 ▽ 的定义

在电磁场理论中会经常遇到上述的梯度、散度、旋度以及二阶微分的运算，这些运算虽不困难但都比较繁琐。为了简化运算，引入了微分算子 ▽，它已成为场论分析中不可缺少的工具。▽ 算子运算法的优点在于可以把对矢量函数的微分运算转变成矢量代数运算，从而明显地简化运算过程，并且推导简明扼要，易于掌握。

微分算子 ▽ 是一个“符号”矢量，它在直角坐标系中的定义式为

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1-29}$$

并规定，它的各个分量可以像普通矢量的分量一样进行运算，而 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 和标量函数 f 的乘积则理解为对 f 的偏导数，即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$。

根据这样的定义和规定，上面所提到的梯度、散度和旋度就可以以一种更简洁方式来表示，因为

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right) f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right) \cdot (A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\right) \cdot (A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

所以梯度、散度和旋度可用微分算子 ▽ 表示成

$$\mathrm{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} = \nabla f \tag{1-30}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1-31}$$