计算数学丛书

奇异摄动中的边界层校正法

苏煜城 上海科学技术出版社

计算数学丛书

奇异摄动中的边界层校正法

苏 煜 城

上海科学技术出版社

计算数学丛书

奇异摄动中的边界层校正法

苏 煜 城

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　江苏溧水印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 8.25　字数 180,000

1983 年 5 月第 1 版　1983 年 5 月第 1 次印刷

印数：1— 5,000

统一书号：13119·1068　定价：(科四) 0.78 元

出 版 说 明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

目　　录

引　言

在实际问题中存在大量的含有小参数 ε 的微分方程问题，这类问题的解 u 除与变量 x 有关外，还与小参数 ε 有关，因此 $u=u(x, \varepsilon)$，或表示为 $u=u_\varepsilon(x)$. 在这类问题中小参数有的包含在微分方程的低阶导数项中(包括方程的右端)，有的包含在高阶导数项中，还有包含在边界条件和所讨论区域的边界中，由于包含小参数的形式不同，相应定解问题的解 u_ε 也具有不同的性质. 这类问题统称为**摄动问题**，我们用 A_ε 来表示它. 由于问题 A_ε 与小参数 ε 有关，所以我们讨论的不是单个定解问题，而是一族定解问题. 当 $\varepsilon=0$ 时相应地有定解问题 A_0，它的解我们用 u_0 来表示，定解问题 A_0 称为**退化问题**. 在一定条件下摄动问题 A_ε 的解 u_ε 可以借助于退化问题 A_0 的解 u_0 作为首项利用摄动方法构造起来，即展开为 ε 的幂级数. 例如，设 $L_0, L_1, \cdots, L_s$ 是空间 U 的线性微分算子. 我们构造摄动算子

$$L_\varepsilon=L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2 L_2+\cdots+\varepsilon^s L_s, \tag{1}$$

其中 L_0 是 L_ε 的主要部分，$\varepsilon L_1+\varepsilon^2 L_2+\cdots+\varepsilon^s L_s$ 是它的摄动部分，$\varepsilon>0$ 是小参数.

摄动问题 A_ε: 在 n 维空间的有界区域 $Q+\Gamma$ 内求方程

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=h(x), \quad x=(x_1, \cdots, x_n)\in Q \tag{2}$$

在一定边界条件下的解，Γ 是区域 Q 的边界.

退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$: 在 $Q+\Gamma$ 内求方程

$$L_0u_0=h(x),\ x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in Q \tag{3}$$

在一定边界条件下的解.

现在来讲一下用一般摄动方法构造问题 A_ε 级数解的过程. 假定此解有以下展开式:

$$u_\varepsilon(x)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\cdots+\varepsilon^n u_n(x)+\cdots, \tag{4}$$

这是关于 ε 的幂级数. 为了确定级数(4)中的系数 $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\cdots$, $u_n(x)$, $\cdots$, 将此级数代入方程(2), 合并 ε 的同幂项, 并令其系数为零, 则得到一组递推方程:

$$\begin{aligned} &L_0u_0=h,\\ &L_0u_1=-L_1u_0,\\ &L_0u_2=-L_1u_1-L_2u_0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{5}$$

其中第一个方程就是退化方程(3), 其余方程和第一个方程的差别只在于右端项. 将级数(4)再代入给定的边界条件, 可以得到 u_i 应满足的边界条件. 在相应边界条件下逐次解方程(5)即可求得展开式(4)的系数 u_i(当然, 这些方程在相应边界条件下必须满足可解条件). 最后, 还需研究级数(4)的收敛性, 或者取其有限项之和, 估计其余项. 在摄动方法中级数(4)一般是 ε 的渐近级数, 即对于任意正整数 N 有

$$u_\varepsilon(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i u_i(x)+R_N(x,\ \varepsilon), \tag{6}$$

其中 $R_N(x,\ \varepsilon)$是余项:

$$R_N(x,\ \varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})\ (\varepsilon\to 0). \tag{7}$$

幂级数(4)称为 u_ε 的渐近展开式, 简称为问题 A_ε 的渐近解.

应指出, 收敛级数是渐近级数, 而渐近级数一般是发散的, 但它的前有限项之和在一定精度范围内可用来近似表示摄动问题的真解, 因此摄动方法是一种近似方法.

若渐近展开式(4)在 $Q+\Gamma$ 内一致有效成立，即余项 $R_N(x,\ \varepsilon)$在 $Q+\Gamma$ 内关于 x 一致满足(7)，则称展开式(4)为 $u_\varepsilon(x)$在 $Q+\Gamma$ 内的**一致有效渐近展开式**．此时摄动问题称为**正则摄动问题**，处理这类问题的摄动方法称为**正则摄动方法**．

因此，正则摄动问题的解 $u_\varepsilon(x)$可以利用正则摄动方法借助于退化问题的解 $u_0(x)$表示成关于小参数 ε 的一致有效渐近展开式，但不是所有摄动问题的解都能用正则摄动方法求得它的一致有效渐近展开式．若摄动问题的解 $u_\varepsilon(x)$当 $\varepsilon\to 0$ 时不存在关于变量 x 一致收敛的极限，则称摄动问题为**奇异摄动问题**，处理奇异摄动问题的方法称为**奇异摄动方法**，如果用正则摄动方法去解奇异摄动问题是一定要失败的．

下面我们列举一些例题来阐明奇异摄动问题解的性质．

例 1 摄动问题 A_ε：在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内求下面初值问题的解：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv u''+(1+\varepsilon)u=0, \tag{8}$$

$$u(0)=0,\ u'(0)=1. \tag{9}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0：在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内求下面初值问题的解：

$$L_0 u_0 \equiv u_0''+u_0=0, \tag{10}$$

$$u_0(0)=0,\ u_0'(0)=1. \tag{11}$$

退化问题 A_0 的解是：$u_0(x)=\sin x$.

我们可以形式上来构造摄动问题 A_ε 的解 u_ε 的幂级数展开式：

$$\widetilde{u}_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j u_j(x). \tag{12}$$

将它代入方程(8)和初始条件(9)，令 ε 的同幂项系数为零，则

得到确定函数 $u_0(x)$, $u_1(x)$, ⋯ 的递推方程和初始条件:

$$u_0''+u_0=0,\ u_0(0)=0,\ u_0'(0)=1. \tag{13}$$

$$u_j''+u_j=-u_{j-1},\ u_j(0)=u_j'(0)=0\quad(j\geqslant 1). \tag{14_j}$$

初值问题 (13) 就是退化问题 A_0, 逐次解问题 (14_j) 即求得函数$u_j(x)$ $(j\geqslant 1)$. 当 $j=1$ 时,

$$u_1(x)=\frac{1}{2}(x\cos x-\sin x). \tag{15}$$

摄动问题(8), (9)的精确解是:

$$u_\varepsilon(x)=(1+\varepsilon)^{-1/2}\sin((1+\varepsilon)^{1/2}x). \tag{16}$$

为了同 $\tilde{u}_\varepsilon(x)$的部分和进行比较, 对于充分小的 ε 我们展开 $(1+\varepsilon)^{1/2}$:

$$(1+\varepsilon)^{1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varepsilon^k=1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2+\cdots,$$

并利用中值定理, 当 $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon^{N+1}x=O(1)$时我们有

$$u_\varepsilon(x)=\left(\sum_{k=0}^{N}c_k\varepsilon^k\right)^{-1}\sin\left(\left(\sum_{k=0}^{N}c_k\varepsilon^k\right)x\right)+O(\varepsilon^{N+1}).$$

再利用 Taylor 展开式, 上式可写为

$$u_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x)+O(\varepsilon^{N+1}), \tag{17}$$

其中 x 只限于: $\varepsilon^{N+1}x=O(1)$ $(\varepsilon\to 0)$, 特别是, x 只在有限区间内变化, 函数 $u_j(x)$就是我们逐次解问题(13)和(14_j) $(j\geqslant 1)$ 得到的函数.

如果 x 充分大以致 $\dfrac{1}{x}=O(\varepsilon^{N+1})$, 则展开式(17)不再成立. 因此, 如果我们讨论的摄动问题是在有限区间内, 那末它是正则摄动问题; 如果所讨论的区间是$[0,\infty)$, 那末初值问题(8), (9)不能用正则摄动方法求解, 因为表达式(17)最终不再成立. 实际上, 从 $u_1(x)$的表达式(15)可以看到, 当 $x\to$

$+\infty$ 时 $u_1(x)$不能保持有界，表达式(17)成立的一致性已不存在．在此情况下摄动问题(8)，(9)是奇异摄动问题．

例 2　摄动问题 A_ε: 在 $0\leqslant x<+\infty$ 内解边值问题:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv u''-\varepsilon^2 u=0, \tag{18}$$

$$u(0)=1,\ u(\infty)=0. \tag{19}$$

此问题有解

$$u_\varepsilon(x)=e^{-\varepsilon x}, \tag{20}$$

并且

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (\varepsilon x=o(1)),\\ e^{-c} & (\varepsilon x=c+o(1),\ c\text{——任意常数}),\\ 0 & (\varepsilon x\to+\infty).\end{cases} \tag{21}$$

对于有限的 x 显然有 $u_\varepsilon\to 1(\varepsilon\to 0)$，但对于 $x\geqslant 0$ 不存在一致收敛的极限．因此摄动问题(18)，(19)是奇异摄动问题．此外，与其相应的退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$:

$$L_0 u_0\equiv u_0''=0,$$

$$u_0(0)=1,\ u_0(\infty)=0$$

无解．

例 3　摄动问题 A_ε: 在 $0\leqslant x<+\infty$ 内解初值问题:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon u'+u=1, \tag{22}$$

$$u(0)=0. \tag{23}$$

在此问题中小参数 ε 含于方程(22)的高阶导数项中．与问题 A_ε 相应的退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$是:

$$L_0 u_0\equiv u_0=1. \tag{24}$$

退化问题的解 $u_0(x)=1$ 不满足初始条件(23)．因此摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0 时摄动方程(22)降低一阶，失去初始条件(23)．

摄动问题(22)，(23)的精确解为:

$$u_\varepsilon(x)=1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\quad(x\geqslant 0),\tag{25}$$

由此可知

$$u_\varepsilon(x)-1=u_\varepsilon(x)-u_0(x)=-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.\tag{26}$$

当 $x\gg\varepsilon$ 时，函数 $-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ 随 $\varepsilon\to 0$ 而趋近于零，但在 $x=0$ 附近它并不是一个微小的量．因此当 $\varepsilon\to 0$ 时 $u_\varepsilon(x)$ 的非一致收敛性是很明显的，它有间断极限函数，$\varepsilon=0$ 是它的奇点．如果我们将(25)理解为 $u_\varepsilon(x)$ 的级数展开式(只有一项)，那末(25)的第二项是余项，应在所讨论的区间内处处为 $O(\varepsilon)$的量．但根据刚才的分析，它在整个区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内不都是一个微小的量，因此我们不能在整个区间内以 $u_0(x)$ 近似表示 $u_\varepsilon(x)$．按所给定义，摄动问题(22)，(23)属于奇异摄动问题．

例 4 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内解两点边值问题：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon u''+u'=0,\tag{27}$$

$$u(0)=\alpha_0,\ u(1)=\beta_0.\tag{28}$$

小参数 ε 也是包含在微分方程的高阶导数项中，当 $\varepsilon=0$ 时摄动方程(27)退化为方程

$$L_0u_0\equiv u_0'=0.\tag{29}$$

这是一阶常微分方程，只需一个定解条件即可．我们假定保留第二个边界条件，即

$$u_0(1)=\beta_0.\tag{30}$$

因此当 $\varepsilon=0$ 时摄动方程(27)降低一阶，失去一个边界条件：$u(0)=\alpha_0$.

摄动问题(27)，(28)的解可精确地求得：

$$u_\varepsilon(x)=(1-e^{-1/\varepsilon})^{-1}\{(\alpha_0-\beta_0)e^{-x/\varepsilon}-\beta_0-\alpha_0e^{-1/\varepsilon}\}.\tag{31}$$

显然，退化问题的解为：

$$u_0(x)=\beta_0,\tag{32}$$

它不满足第一个边界条件，除非 $\alpha_0=\beta_0$.

由表达式(31)我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x)=\beta_0 \quad (0<x\leqslant 1). \tag{33}$$

此极限在区间$(0<x\leqslant 1)$的任何一个闭子区间 $0<\delta\leqslant x\leqslant 1$ 上一致成立，但在整个区间$(0<x\leqslant 1)$内却不是这样. 事实上，表达式(31)可改写为

$$u_\varepsilon(x)=\beta_0+\frac{\alpha_0-\beta_0}{1-e^{-1/\varepsilon}}(e^{-x/\varepsilon}-e^{-1/\varepsilon}). \tag{31'}$$

由此式可知，当 $x\gg\varepsilon$ 时 $u_\varepsilon(x)$ 随 $\varepsilon\to 0$ 而趋近于 β_0(退化问题的解!)，但在 $x=0$ 附近(31′)右端的第二项却不是一个微小的量. 同样，如果我们将(31′)理解为 $u_\varepsilon(x)$ 的级数展开式，那末(31′)的第二项当 $\varepsilon\to 0$ 时在整个区间[0, 1]内应为 $O(\varepsilon)$ 的量，但根据刚才的分析，这是不可能的. 因此我们不能以退化问题的解 $u_0(x)$ 在整个区间$(0\leqslant x\leqslant 1)$内作为 $u_\varepsilon(x)$ 的近似. $u_\varepsilon(x)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时有间断极限函数，$\varepsilon=0$ 是它的奇点. 摄动问题(27)，(28)是奇异摄动问题.

例 5 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内解边值问题:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon u''+u'+u=0, \tag{34}$$

$$u(0)=\alpha(\varepsilon),\ u(1)=\beta(\varepsilon). \tag{35}$$

在此问题中小参数 ε 不但含于微分方程，而且包含在边界条件内.

我们假定，$\alpha(\varepsilon)$ 和 $\beta(\varepsilon)$ 对于任意正整数 N 可展为:

$$\alpha(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\alpha_j+O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (\varepsilon\to 0), \tag{36}$$

$$\beta(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\beta_j+O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (\varepsilon\to 0). \tag{37}$$

摄动问题(34)，(35)的精确解为:

$$u_\varepsilon(x)=\left(\frac{\beta-\alpha e^{\rho_2}}{e^{\rho_1}-e^{\rho_2}}\right)e^{\rho_1 x}+\left(\frac{\alpha e^{\rho_1}-\beta}{e^{\rho_1}-e^{\rho_2}}\right)e^{\rho_2 x}, \tag{38}$$

其中 $\rho_1=\rho_1(\varepsilon)$，$\rho_2=\rho_2(\varepsilon)$ 是特征方程

$$\varepsilon\rho^2+\rho+1=0$$

的两个根，它们有如下的渐近式：

$$\begin{aligned}\rho_1(\varepsilon)&=\frac{1}{2\varepsilon}(-1+(1-4\varepsilon)^{1/2})=-1+O(\varepsilon),\\ \rho_2(\varepsilon)&=\frac{1}{2\varepsilon}(-1-(1-4\varepsilon)^{1/2})=-\varepsilon^{-1}+1+O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{39}$$

由(39)可知，当 $\varepsilon\to0$ 时 $\rho_1\to-1$，$\rho_2\to-\infty$. 利用展开式(36)和(37)可将表达式(38)写为

$$u_\varepsilon(x)=\beta_0e^{1-x}+(\alpha_0-\beta_0e)e^xe^{-x/\varepsilon}+O(\varepsilon). \tag{40}$$

此式对于充分小的 ε 在区间 $0\leqslant x\leqslant1$ 内处处成立．在(40)中函数 $e^{-x/\varepsilon}$ 有如下的估计：

$$e^{-x/\varepsilon}=O(\varepsilon^N)\quad(x>0,\ \varepsilon\to0), \tag{41}$$

其中 N 是任意正整数．因此 $u_\varepsilon(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant1$ 内当 $\varepsilon\to0$ 时的非一致收敛性明显地表现出来，对于区间 $0<x\leqslant1$ 内任意一个闭子区间 $0<\delta\leqslant x\leqslant1$ 下面渐近展开式一致成立：

$$u_\varepsilon(x)=\beta_0e^{1-x}+O(\varepsilon). \tag{42}$$

在 $x=0$ 附近表达式(40)中的第二项当 $\varepsilon\to0$ 时不是一个微小的量，其中第一项 β_0e^{1-x} 是退化问题($\varepsilon=0$)

$$\begin{aligned}&L_0u_0\equiv u_0'+u_0=0,\\ &u_0(1)=\beta_0\end{aligned} \tag{43}$$

的解，但它不满足条件 $u_0(0)=\alpha_0$(除非 $\alpha_0=\beta_0e$)，我们不能在整个区间内以 β_0e^{1-x} 作为 $u_\varepsilon(x)$ 的近似，因此摄动问题(34)，(35)是奇异摄动问题.

例 6 在单位圆 $Q:0\leqslant\rho\leqslant1$ 内解椭圆型方程第一边值问题：

$$
\begin{aligned}
&L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 \Delta u - u = h(x, y), \\
&u|_{\rho=1} = 0,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

其中 Δ 是二维 Laplace 算子. 与摄动问题(44)相应的退化问题是:

$$L_0 u_0 \equiv -u_0 = h(x, y). \tag{45}$$

由于右端函数 $h(x, y)$ 是任意给定的, 一般地不满足边界条件 $u|_{\rho=1}=0$. 因此摄动问题(44)当 $\varepsilon=0$ 退化为问题(45)时边界条件完全失去, 它的解 $u_\varepsilon(x, y)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时在整个圆内不存在一致收敛的极限. 事实上,

$$u_\varepsilon = -h(\rho, \varphi) + \psi(\rho) h(1, \varphi) e^{-\frac{1-\rho}{\varepsilon}} + O(\varepsilon), \tag{46}$$

其中 (ρ, φ) 是极坐标, $\psi(\rho)$ 是平滑函数(将在正文中给予定义). 表达式(46)对于充分小 ε 在整个圆 $0\leqslant\rho\leqslant 1$ 内处处成立, 但下面渐近式

$$u_\varepsilon = -h(\rho, \varphi) + O(\varepsilon) \tag{47}$$

只在圆 $0\leqslant\rho<1$ 内的闭子区域 $0\leqslant\rho\leqslant\gamma<1$ 上一致成立, 因此摄动问题(44)也是奇异摄动问题.

以上我们列举了六个奇异摄动的例题, 它们的共同特性是, 这些问题的解 u_ε 作为 ε 的函数, 当 $\varepsilon\to 0$ 时在所讨论的区域内出现了非一致收敛性, 具有间断的极限函数, $\varepsilon=0$ 是 u_ε 的奇点. 但这些问题之所以产生非一致收敛性的原因是不同的, 在例 1 和例 2 中是由于所讨论的区间是半无界区间而产生, 在后面四个例题中是由于小参数 ε 含于微分方程的高阶导数项, 当 $\varepsilon=0$ 时摄动方程降阶, 在边界的一部分, 或者在全部边界上失去边界条件而产生. 后者按 Prandtl[6] 边界层理论属于边界层型奇异摄动问题, 出现非一致收敛性的边界附近称为边界层.

本书主要研究小参数在高阶导数项的微分方程奇异摄动问题，特别是偏微分方程奇异摄动问题．这些问题常产生于流体力学、弹性力学、量子力学、声学、光学、化学反应和最优控制等许多重要领域．在 Friedrichs 文章[7]中详细阐述了数学物理中常出现的这类问题．关于化学反应和最优控制方面 O'Malley 在他的书[8]中作了很好的介绍．

奇异摄动理论和方法的研究自 1935 年以来先后相继在苏联、美国和其它国家蓬勃发展起来，成为应用数学的一个重要领域．处理奇异摄动问题的方法主要是渐近方法，关于渐近展开的基本知识，我们把它写在书末的附录中，供读者参考．近几十年来处理奇异摄动问题的渐近方法有了很大发展，其中关于小参数在高阶导数项的奇异摄动问题(边界层问题)主要有 Люстерник–Вишик 渐近方法(亦称边界层校正法 the method of boundary layer correction)和匹配渐近展开法(the method of matched asymptotic expansions，简称为匹配法)．近年来还有多重尺度法．匹配法亦称为外展开和内展开方法．关于匹配法读者可参看 Van Dyke[9] 和 Eckhaus[10] 专著，这些作者在自己的专著中对该方法的实践和理论性的研究作了详细的介绍．关于多重尺度法请参看 Nayfeh[11]专著．

在本书中我们主要介绍 Люстерник–Вишик 方法．该方法是由 Люстерник 和 Вишик[1~5] 创建的，它是以 Prandtl[6] 的正则化伸长和边界层校正这两个思想为基础的．Люстерник 和 Вишик 不但创建了构造渐近解的方法，而且建立了严格的数学理论基础，对奇异摄动理论的发展产生了重大的影响．现在扼要地叙述一下 Люстерник–Вишик 方法的实质．

假定 Q 是 n 维空间的有限区域，Γ 是其边界．现考虑摄