卫生部规划教材

高等医药院校教材

供医学、儿科、口腔、卫生类专业用

医用高等数学

第 二 版

罗泮祥 主编

人 民 卫 生 出 版 社

高等医药院校教材

供医学、儿科、口腔、卫生类专业用

医用高等数学

第二版

罗洋祥 主编

郭必贵 冯耀庭 李飞宇 何穗智 李 海

孙伟民 石中陆 张 仲 罗洋祥 编写

（按章序第一作者排列）

人民卫生出版社

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学/罗泮祥主编. —2 版. —北京：人民卫生出版社，1996. 6

ISBN 7-117-00248-4

Ⅰ. 医… Ⅱ. 罗… Ⅲ. 医用数学：高等数学 Ⅳ. R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 18429 号

医用高等数学

第二版

罗泮祥 主编

人民卫生出版社出版

(100078 北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼)

三河市宏达印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092 毫米 16 开本　16 $\frac{3}{4}$ 印张　388 千字

1987 年 6 月第 1 版　1998 年 5 月第 2 版第 12 次印刷

印数：101 371—126 370

ISBN 7-117-00248-4/R·249　定价：14.60 元

全国高等医学院校临床医学专业
第四轮教材修订说明

为适应我国高等医学教育的改革和发展，卫生部临床医学专业教材评审委员会，在总结前三轮教材编写经验的基础上，于1993年5月审议决定，进行第四轮修订，根据临床医学专业培养目标，确定了修订的指导思想和教材的深度及广度，强调临床医学专业五年制本科是培养临床医师的基本医学教育，全套教材共46种，第四轮修订38种，另8种沿用原版本。

必　修　课　教　材

1.《医用高等数学》第二版		罗泮祥主编
2.《医用物理学》第四版		胡纪湘主编
3.《基础化学》第四版		杨秀岑主编
4.《有机化学》第四版		徐景达主编
5.《医用生物学》第四版		李　璞主编
6.《系统解剖学》第四版		于　频主编
7.《局部解剖学》第四版		徐恩多主编
8.《解剖学》第二版		余　哲主编
9.《组织学与胚胎学》第四版		成令忠主编
10.《生物化学》第四版	顾天爵主编	冯宗忱副主编
11.《生理学》第四版	张镜如主编	乔健天副主编
12.《医用微生物学》第四版		陆德源主编
13.《人体寄生虫学》第四版		陈佩惠主编
14.《医学免疫学》第二版		龙振洲主编
15.《病理学》第四版		武忠弼主编
16.《病理生理学》第四版		金惠铭主编
17.《药理学》第四版		江明性主编
18.《医学心理学》第二版		龚耀先主编
19.《法医学》第二版		郭景元主编
20.《诊断学》第四版	戚仁铎主编	王友赤副主编
21.《影像诊断学》第三版		吴恩惠主编
22.《内科学》第四版	陈灏珠主编	李宗明副主编
23.《外科学》第四版	裘法祖主编	孟承伟副主编
24.《妇产科学》第四版		乐　杰主编
25.《儿科学》第四版		王慕逖主编
26.《神经病学》第三版		侯熙德主编

27.《精神病学》第三版 沈渔邨主编
28.《传染病学》第四版 彭文伟主编
29.《眼科学》第四版 严　密主编
30.《耳鼻咽喉科学》第四版 黄选兆主编
31.《口腔科学》第四版 毛祖彝主编
32.《皮肤性病学》第四版 陈洪铎主编
33.《核医学》第四版 周　申主编
34.《流行病学》第四版 耿贯一主编
35.《卫生学》第四版 王翔朴主编
36.《预防医学》第二版 陆培廉主编
37.《中医学》第四版 贺志光主编

选 修 课 教 材

38.《医学物理学》 刘普和主编
39.《医用电子学》 刘　骥主编
40.《电子计算机基础》 华蕴博主编
41.《医学遗传学基础》第二版 杜传书主编
42.《临床药理学》 徐叔云主编
43.《医学统计学》 倪宗瓒主编
44.《医德学概论》 丘祥兴主编
45.《医学辩证法》 彭瑞骢主编
46.《医学细胞生物学》 宋今丹主编

全国高等医学院校临床医学专业
第三届教材评审委员会

主任委员　裘法祖
副主任委员　高贤华

委　　员（以姓氏笔画为序）

方　圻　王廷础　乐　杰　刘湘云　乔健天
沈渔邨　武忠弼　周东海　金有豫　金魁和
南　潮　胡纪湘　顾天爵　彭文伟

前　言

马克思认为，一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步（拉法格：《忆马克思》）。现代医学科学从定性描述日趋定量化、精确化发展的进程，充分证实了这一预见的正确性。基础医学、临床医学和预防医学中已出现或正在出现的实际问题，越来越要求数学提供更多的工具和方法。高等医药院校各专业的学生和研究生都很有必要学习一些高等数学的知识，以改善知识结构，提高逻辑思维能力，增强用数学工具进行医药学定量研究的水平。

根据卫生部的决定，从 1983 年起高等数学作为高等医学院校的必修课。本书是根据胡纪湘教授主编的《医用高等数学》改编而成，内容包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元微积分、常微分方程、概率论初步和矩阵论共七章。以医学基础和科学研究中常用的数学知识为主，力求具有"广而浅"、"重概念和应用"、"结合医学"三大特点。

本书主要阐述基本概念，介绍基本定义、定理和方法以及简单的医学应用，着眼于提高学生的逻辑思维能力。力求文字简洁、说理清晰、视野开阔。编有较多的例题和习题，书后附有答案，便于自学。可作为高等医药院校临床医学及其它各专业的本科生、进修生和研究生的教材，也可供生物和医学科学工作者参考。

本书按教学计划为 72 学时的规划编写，每学时讲授正文版面字数 3500 字左右。对于教学计划为 54 学时的院校，可略去第四、七两章。

本书由罗泮祥、郭必贵、冯耀庭、李飞宇、何穗智、李海、孙伟民、石中陆和张仲等编写。方积乾教授提了宝贵的意见。陈灼权、任月美副教授、段美元老师对全书做了认真细致的审阅，邓卓燊、曾百乐等老师为图表、誊写等做了大量工作，特此致谢。

限于编者水平，本书难免存在缺点和错误，恳请读者指正。

编　者

1995 年 4 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是高等数学研究的主要对象之一。它是对运动变化的客观事物间数量关系的抽象概括。极限是高等数学中又一个重要概念。是否采用极限运算方法，是高等数学与初等数学的根本区别。

第一节　函　　数

一、函 数 概 念

(一)常量与变量

在观察和研究某一变化过程中，会遇到各种不同的量：一类是在变化过程中始终保持不变的，另一类则是变化的。前者称为**"常量"**(constant guantity)，后者称为**"变量"**(variable)。一个量是常量还是变量不是绝对的，而是相对的，这要由当时所考察的具体条件而定。例如自由落体运动中的重力加速度，对某一固定地点来说，它是一个常量，而对不同地点，它将因地点的改变而不同，被视为一个变量。

(二)函数概念

在研究同一个变化过程中，几个变量的变化往往不是孤立、互不相干的，而是相互存在着确定的对应关系。这种关系，在数学上被概括为函数关系。

【定义 1】　在某个变化过程中存在两个变量 x、y，若对于 x 在其取值范围内的每一个值，y 按照一定的规律有确定的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**(function)。x 称为自变量(independent variable)，其取值范围称为函数的定义域(domain of definition)。y 又称为因变量(dependent variable)，其取值范围称为函数值域(domain of functional value)。y 与 x 的函数关系可记为 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$。

当 x 取 x_0 时，若 y 有对应值 $y_0=f(x_0)$ 存在，记作 $y|_{x=x_0}$，并认为在 $x=x_0$ 处函数 y 有定义。

关于函数定义有两个要素：其一是 y 与 x 有确定的"对应关系"；其二是 y 与 x 的上述对应关系只有在 x 的某个取值范围内才存在，即有确定的定义域。

函数的表示可按具体的需要和可能分别用解析法、图示法、表格法中的一种或两种甚至三种相配合来表示。在医学中有时也用函数关系式描述两个量之间的相关关系。

二、初 等 函 数

(一)基本初等函数

幂函数(power function)，指数函数(exponential function)，对数函数(logarithmic function)，三角函数(trigonometric function)和反三角函数(antitrigonometric function)这五种函数是构成一切初等函数的基础，称为**基本初等函数**(basic elementary function)。

（二）复合函数

事实上，往后所遇到的多数函数在结构上往往是由一些基本初等函数经过有限次的复合叠置而构成的。对于这类函数给出如下定义。

【定义 2】 设 $y=f(u)$ 为变量 u 的基本初等函数，而 $u=\varphi(x)$ 又为自变量 x 的基本初等函数。若 x 在某区间取值时，相应地 u 使 y 有定义，则称 y 为 x 的**复合函数**(compound function)，并称 u 为中间变量(intermediate variable)。函数 $y=f[\varphi(x)]=f[u]=F(x)$ 称为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，简称为 x 的复合函数。

例 1 试将复合函数 $y=\ln\sin(x^2-1)$ 分解为几个基本初等函数的复合函数。

解：分解复合函数是要求所分解出的每一函数都是基本初等函数或基本初等函数的四则运算。若中间的某一结果中的某一项或某一因子又是复合函数时，则可以对其中的这一项或这一因子再进行分解。

本题设 $\upsilon=x^2-1$，$u=\sin\upsilon$，$y=\ln u$。只有当 $0<u\leqslant1$ 即 u 在区间 $(0,1]$ 内时函数 $y=\ln u$ 有定义，所以 u 在区间 $(0,1]$ 内 $y=\ln\sin(x^2-1)$ 可分解为 $y=\ln u$，$u=\sin\upsilon$，$\upsilon=x^2-1$。

（三）初等函数

【定义 3】 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而构成且仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**。

例如 $y=x^3+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=\dfrac{4-x}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ 等都是初等函数。

（四）分段函数

$$\upsilon=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant1;\\ 4-2t。 & 1\leqslant t\leqslant2。\end{cases}$$

上述函数不是由一个解析式子表示，而是由两个表达式表示的。再如 $y=|x|$ 因为它可表成

$$y=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant0;\\ -x。 & 当\ x<0。\end{cases}$$

是两个表达式表示的。上述两例都称为“分段函数”，不是初等函数。

三、生命科学中几个常见的函数曲线

（一）电刺激强度阈值——刺激时间关系曲线

$$i=\frac{a}{t}+b \tag{1-1}$$

对机体通电时，具有电流强度，通电时间和电流强度变化率三个因素，称为电刺激的三要素。

电刺激时，刺激的强弱可用刺激时间和通电电流（电压）的强度来表示。引发神经纤维兴奋所需的最小的电流强度与其通电时间的关系是：通电时间（如为方波电流则指其波宽）越短，所需的电流愈强；通电时间越长时，电流则越弱。此关系可用双曲线函数表示，称为电刺激强度阈值——刺激时间关系曲线，如图 1-1 所示。

在神经、肌肉生理学中 Weiss 定理用下式表示此类关系

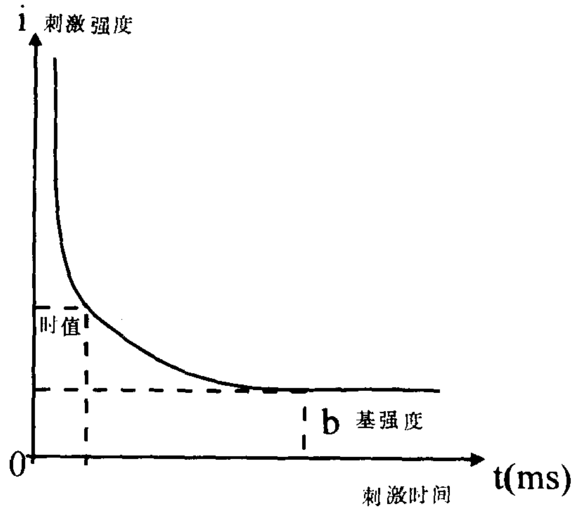

图 1-1

$$i=\frac{a}{t}+b$$

上式中 i 为刺激电流强度，t 为通电时间，a、b 是常数，b 称为基强度或阈强度。

(二)Michaelis 曲线

$$\frac{1}{V}=\frac{1}{V_m}+\frac{K_m}{V_m S} \qquad (1\text{-}2)$$

细胞中的生化反应都涉及到酶的直接参与，酶学家 Michaelis 和 Menten (1913)认为酶(E)和底物(S)的作用开始时可逆地反应生成复合体(C)然后又分解成自由酶和一个或几个生成物(P)。可用反应式示意如下：

$$E+S \rightleftharpoons C \longrightarrow E+P$$

假定上述反应式，前式的反应要比后式的反应迅速得多，那么，E、S、C 之间总是保持平衡，根据质量作用定律可得下列 Michaelis-Menten 方程

$$V=\frac{V_m S}{S+K_m}$$

有时也写成如(1-2)的形式。其中 V 为反应速度，V_m 为最大反应速度，S 为底物浓度，K_m 为 Michaelis 常数，(1-2)式可用一条直角双曲线表示，如图 1-2 所示。随着 S 的增加 V 逐渐逼近于最大值 V_m。

(三)相对生长曲线(幂函数增长率)

$$y=bx^k \qquad (1\text{-}3)$$

Huxley 于 1924 年首先奠定了相对生长定量分析的基础，他以幂函数关系式 $y=bx^k$ 表达整个有机体的生长与其部分或与其器官的生长的相关关系，明确提出相对生长的一般定律。(1-3)式中 x 和 y 可分别表示其重量或长度，b 表示已知初始生长指数，k 表示平衡常数，其函数关系如图 1-3 所示。

(四)指数函数曲线

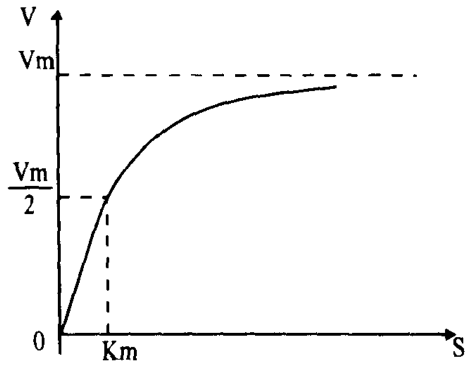

图 1-2

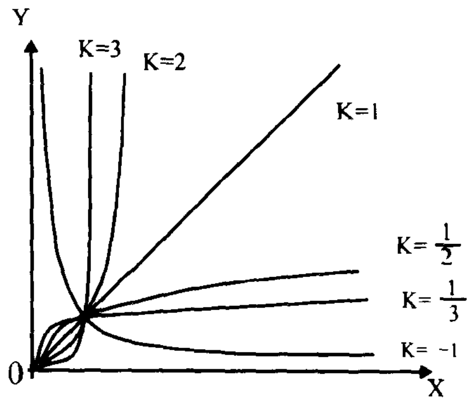

图 1-3

1. 放射性物质的衰减　放射性物质的放射过程中，在任何时间 t，原子粒残存数与原总数之比为 $e^{-\lambda t}$，其中 λ 是一个常数，称为衰变常数。假设初始的原子粒总数为 N，经过时间 t 后，则残存原子粒数 n 可用下式表示

$$n = Ne^{-\lambda t} \tag{1-4}$$

2. 肌注血药浓度——时间曲线　在 1949 年　E. Heinz 进行了一项重要的临床应用的理论研究，他阐明药物经肌肉注入机体后，在时间 t 时，血液中的血药浓度 y 可用下式表示

$$y = \frac{A}{\sigma_2 - \sigma_1}(e^{-\sigma_1 t} - e^{-\sigma_2 t}) \tag{1-5}$$

其中 A、σ_1 和 σ_2 为正的常数，并且 $\sigma_2 > \sigma_1$，函数 y 的图形如图 1-4 所示。

3. Gauss 曲线　在误差理论中，曾出现过下列函数表达式

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad (\sigma \text{ 为正常数}) \tag{1-6}$$

(1-6)式的曲线称为 Gauss 曲线，有时也写成如下形式

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\mu, \sigma \text{ 均为正常数})$$

亦称正态分布曲线，(1-6)式的图形如图 1-5 所示

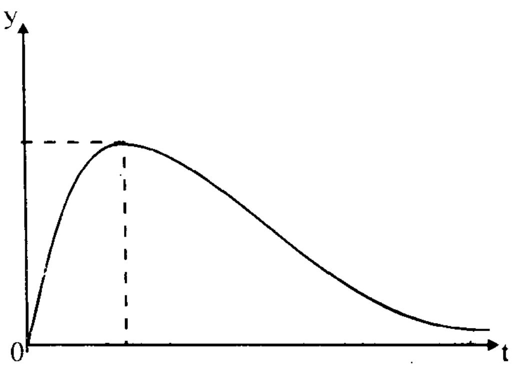

图 1-4

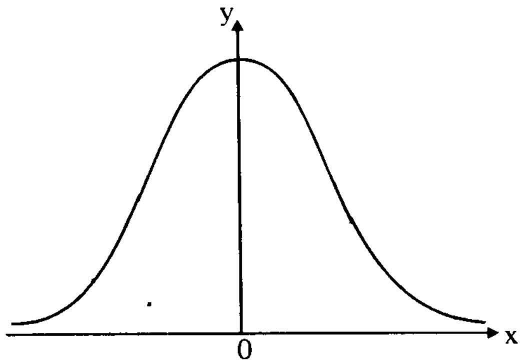

图 1-5

4. "单分子"曲线——饱和曲线　在化学中的单分子反应理论中，获得下列函数

$$W = \frac{W_0}{1-b}(1 - be^{-kt}) \tag{1-7}$$

上式中 W_0，b 和 k 为正的常数，并且 b<1，所对应的曲线称为"单分子"曲线或称饱和曲线，如图 1-6 所示。

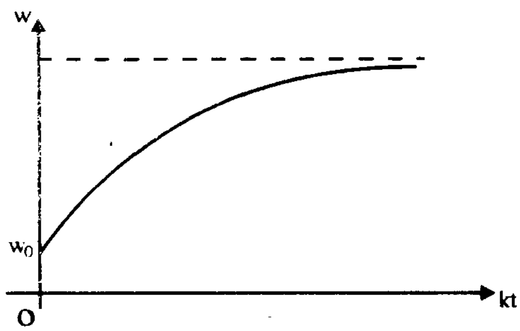

图 1-6

(五)Logistic **曲线**

荷兰生物数学家 Verhulst 在 1939 年首先研究了生物群体总数的生长规律，用下列方程表示

$$W = W_0 \frac{1+b}{1+be^{-kt}} \quad (b>0) \tag{1-8}$$

上述方程称为 Logistic 方程又称 Logistic 生长模型，其函数曲线如图 1-7 所示。

(六)Gompertz **曲线**

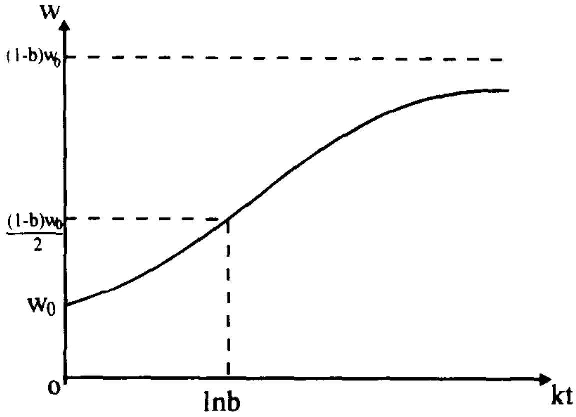

图 1-7

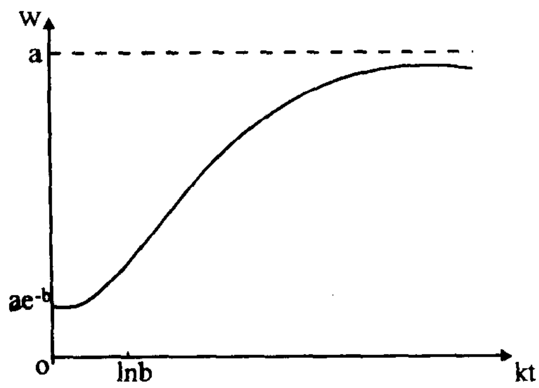

图 1-8

许多学者发现，人和动物的实体瘤只在较短时间内符合指数生长的规律，而在较长的观察时间内，肿瘤的生长曲线逐渐趋向平坦，却按 Gompertz 生长曲线进行，可表示成下列函数关系式

$$W=a^{e^{-be^{-kt}}} \tag{1-9}$$

上式中 a，b 和 k 均为正的常数，(1-9)式图形如图 1-8 所示。

四、曲线直线化

在科学实验中，如果实验数据中的两种量 y_i 和 x_i 呈线性关系时，不妨假设所拟合的直线方程为 $y=a\ bx$，在多元微积分中将会阐明，上式中的 a 和 b 可按下列式子求得

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\dfrac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\dfrac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2} \\ a=\dfrac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i) \end{cases} \tag{1-10}$$

其中记号"Σ"表示求和；"$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$"表示 $x_1+x_2+\cdots+x_n$；"$\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$"表示 $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$。用(1-10)式所确定的 a 和 b，从理论上可证明使各实测点与理论直线的纵向距离的平方和为最小，此种方法称为**最小二乘法**。

例 2 在血液透析中，肝素用量 D 与活化全血凝固时间 t 有线性关系，测得不同剂量下的活化全血凝固时间数据如表 1-1：

表 1-1

Di(mg)	3	6	8	10	12	15
t_i(min)	155	178	198	225	236	268

试求 t 与 D 的直线方程。

解 设 t 与 D 的直线方程为 $t=a+bD$

按(1-10)式求得

$$b=\frac{\Sigma D_it_i-\frac{1}{n}\Sigma D_i\cdot\Sigma t_i}{\Sigma D_i^2-\frac{1}{n}(\Sigma D_i)^2}=\frac{12219-\frac{1}{6}\times 54\times 1260}{578-\frac{1}{6}\times 54^2}=9.55$$

$$a=\frac{1}{n}(\Sigma t_i-b\Sigma D_i)=\frac{1}{6}(1260-9.55\times 54)=124.05$$

故活化全血凝固时间与给药剂量的经验公式为

$$t=124.05+9.55D。$$

但是，如果两种量之间的关系呈曲线关系时，可先采用曲线直线化，然后，确定属于哪一类函数关系，有利于进一步理论分析。所谓曲线直线化，就是通过坐标变换使旧坐标系中的曲线变换成新坐标系的直线的方法。下面分别介绍在医药学中，最常见的几种函数曲线直线化的一般方法和原理。

(一)双曲线和双曲型饱和曲线的直线化 函数

$$\frac{1}{y}=a+\frac{b}{x} \tag{1-11}$$

在直角坐标系上的图形是一条双曲线如图 1-9 所示。

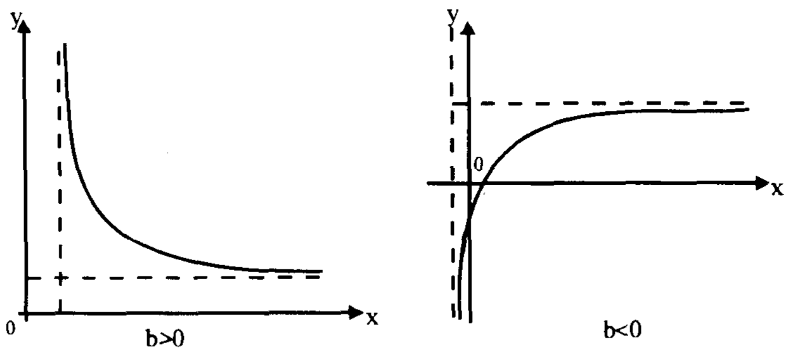

图 1-9

对上式设 $Y=\frac{1}{y}$， $X=\frac{1}{x}$

则得 $Y=a+bX$

在以 X 为横轴、Y 为纵轴的直角坐标系上呈直线关系。

例 3 试将 Michaelis 曲线 $\frac{1}{V}=\frac{1}{V_m}+\frac{K_m}{V_mS}$ 直线化。

解 由前面的 Michaelis 曲线知道它是一条直角双曲线。由双曲线图来求两个重要的酶动力学常数 K_m 和 V_m 是不方便的。现采用曲线直线化，设 $L=\frac{1}{V}$，$B=\frac{1}{S}$ 则得

$$L=\frac{1}{V_m}+\frac{K_m}{V_m}B$$

L-B 图是一条直线。在 L-B 的直角坐标系中，纵截距为 $\frac{1}{V_m}$，斜率为 $\frac{K_m}{V_m}$，横截距为 $-\frac{1}{K_m}$，从而较方便地求得 V_m 和 K_m 的值，如图 1-10 所示。

(二)指数函数与对数函数曲线的直线化 指数函数

$$y=ae^{kx} \tag{1-12}$$

的图形是一条指数曲线。当 $a>0$ 时，对(1-12)式两边取对数得