高等微积分

第一册

微分学

潘闻天 杨兴东 王顺凤 编著

气象出版社

高等微积分

第一册

微分学

潘闻天　杨兴东　王顺凤　编著

气象出版社

内 容 简 介

本书对微积分所有的重要概念、理论及方法，都详尽介绍了其物理背景和几何意义，力求使读者理解其实质，学会用它们去分析和解决实际问题；还对微积分的主要概念进行较高程度的抽象，为读者今后接触近代数学打下较好的基础。另外，本书在适应计算机已经进入微积分这一潮流，鼓励读者使用计算机进行微积分运算，简要介绍了有关的计算机软件，为把读者从过伤繁琐的计算中摆脱出来，本书采集了若干综合练习题，使读者更多地思考如何运用所学的知识和方法解决实际问题、分析所得计算结果的实际意义，较好地处理了微积分理论的抽象性和实践性。本书可借理工科（非数学）各专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等微积分　第1册：微分学/潘闻天等编著．—北京：气象出版社，1999.10
ISBN 7-5029-2692-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.潘…　Ⅲ.微分学　Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第24289号

高等微积分
第一册
微分学
潘闻天　杨兴东　王顺凤　编著
责任编辑：崔晓军　终审：周诗健
封面设计：华艺　责任技编：刘祥玉　责任校对：成秋影
气象出版社出版
（北京市海淀区白石桥路46号　邮政编码：100081）
北京市京东印刷厂印刷
新华书店总店北京发行所发行　全国各地新华书店经销
开本：787×1092　1/16　印张：12.5　字数：320千字
1999年10月第一版　1999年10月第一次印刷
印数1～5000　定价：18.70元
ISBN 7-5029-2692-5/O・0059

前　言

本书是在数学教学进行教学改革试点的基础上编写的。与时下流行的高等数学教材相比，本书在以下几个方面作了一些改变：①本书采用单循环体系，并且将复变函数的内容溶入微积分中；②本书在着重讨论一元函数及二元函数的基础上，把微积分的主要概念扩展到n元m维向量函数；③本书在相关章节介绍了用计算机实施微积分学中的主要计算的方法；④本书力求使读者了解微积分的概念与方法怎样从实践中产生和形成，并引导读者运用这些概念与方法去解决更多的实际问题；同时，作者绝不轻视高度的抽象、严格的逻辑论证、独特的符号语言等数学的基本特点。以上做法反映了作者对数学教学改革的基本观点及初步实践。这些做法的正确性有待实践的进一步检验，也希望使用本教材的老师们共同进一步探讨。

本书可供物理类、通讯及计算机类各种专业使用，如果删去＊号及＊＊号的章节，也可供理工科非数学的各种专业使用。

本书分上、下两册出版，上册包括微积分基础知识及微分学，下册包括积分学、无穷级数、积分变换及常微分方程。全书由潘闻天主编，上册由潘闻天执笔，下册由杨兴东、王顺凤执笔。

感谢南京气象学院数学教研室的老师们在本书编写中给予的各种支持，特别是雷旭波老师帮助制作了全部插图、朱建老师在习题的配置中做了许多工作。

感谢气象出版社二编室在本书出版工作中的支持，在书稿的编审、校对等方面做了非常细致的工作。

作　者

1999 年 8 月

目　　录

第一编　微积分的基础概念

第二编 微分学

第一编　微积分的基础概念

第一章　点集及有关概念

§1.1　实数与数轴（R）

一、数的概念的产生与发展简述

据考古发现及史料记述，在远古时代，人类就有了记数的符号及计数的方法. 数的概念产生于人类的生产与生活实践，数的计算是数的伴生物，同时，数的计算又推动了数的概念的发展. 人们最早形成的概念是正整数，由于四则运算的推动，又产生了分数（有理数）、负数及零的概念；由于开方运算的推动，又先后形成了无理数①、虚数的概念. 如果不过分追究时间的先后及间隔的短长，从逻辑的角度，数的概念的发展可以用图 1.1.1 简述：

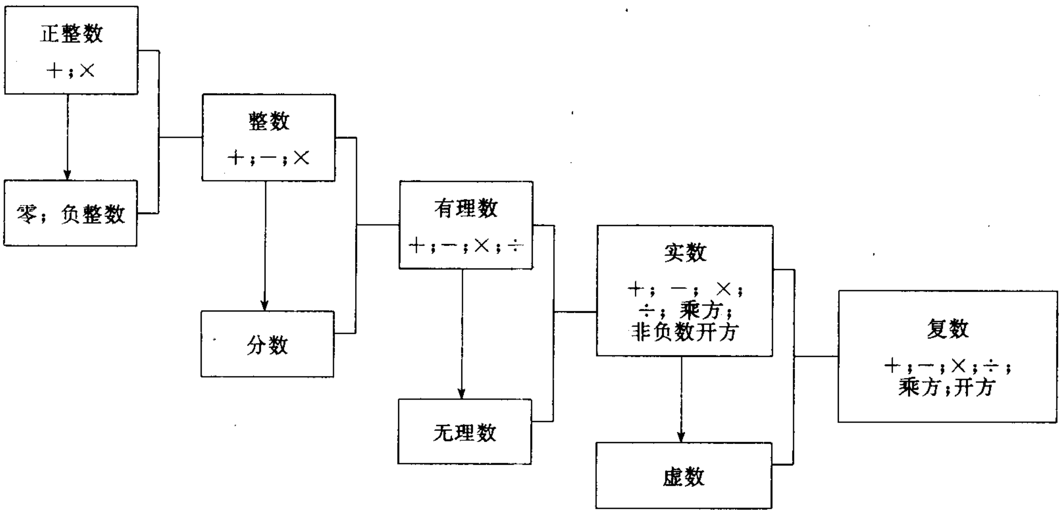

图 1.1.1

二、实数的定义

1. *两线段可公度与不可公度的概念*

设有线段 AB 与 CD，若将 AB 等分成 n 等份后，用 $\frac{1}{n}AB$ 作单位可将 CD 量尽（即 $CD=m\cdot\frac{1}{n}AB$，m 为正整数），则称 AB 与 CD 是可公度的. 此时，若以 AB 为单位（$AB=1$），则

① 可以证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 用反证法：设 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$，n、m 是整数且没有公因数，则 $\frac{n^2}{m^2}=2$，n^2 为偶数，故 n 为偶数，设 $n=2p$，则 $m^2=2p^2$，m^2 为偶数，故 m 为偶数. 由此推得 m 与 n 有公因数. 与所设矛盾. 可见，$\sqrt{2}$ 不是有理数.

CD 的长度为$\frac{m}{n}$，是有理数. 事实上，两线段不可公度的情况是客观存在的，例如：正方形的边与对角线是不可公度的（证明见上一段的脚注）；圆周与它的半径是不可公度的（本书不予证明）.

2. 实数的定义

定义 1 在取定线段 AB 为单位长之后，任一条与 AB 可公度的线段的长度的值称为正有理数，它可表示为有限小数或无限循环小数；任一条与 AB 不可公度的线段的长度的值称为正无理数，它是一个无限不循环小数. 正有理数与正无理数统称为正实数. 正实数的相反数称为负实数. 正、负实数及零，统称实数.

三、实数的性质

1. 实数所对应的点填满整个数轴

在一条直线上取定原点 O、正方向及单位长，称为数轴. 由实数的定义，在数轴上任取一点 P，对应地可确定一个实数（有向线段 OP 的值），反之，对应于任一个实数，可以在数轴上找到一个点. 实数与数轴上的点具有一一对应的关系. 在本书中，把全体实数构成的数集与数轴上所有的点构成的点集，认为是同一个对象，称为一维实空间，记作 $\mathbf{R}$.

2. 有序性

任意二个实数 x 与 y，必有 $x>y$ 或 $x=y$ 或 $x<y$，这个性质称为实数的有序性.

3. 实数的运算及运算律

有理数的所有运算及所满足的运算律，都可以推广到实数（不予细述）.

4. 有界实数集必存在确界

设 A 是一个有上界的实数集，即，$\exists m$，使对 $\forall\ x\in A$，都有 $x\leqslant m$，则称 m 是集合 A 的一个上界.

显然，如果 A 有上界 m，则必有无穷多个上界. 这无穷多个上界中，有没有“最小的”？如果有，则把 A 的最小的上界 m^* 称为 A 的上确界.

定义 2 设 A 是有界的数集，若 m^* 是 A 的上界，但 $\forall\ \varepsilon>0$，$m^*-\varepsilon$ 不是 A 的上界，则称 m^* 是 A 的上确界. 其数学化的表达方式是：

若 i） $\forall\ x\in A$，有 $x\leqslant m^*$，

ii） $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists x'\in A$，使 $x'>m^*-\varepsilon$.

则称 m^* 为集合 A 的上确界，记作 $\sup A$.

例 1 设 $A=\{x|x^2<2,x\in\mathbf{R}\}$，证明 $\sup A=\sqrt{2}$.

证 i） $\forall\ x\in A$，则 $x^2<2$，$\therefore x<\sqrt{2}$.

ii） $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists x'=\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{2}\in A$，而 $x'>\sqrt{2}-\varepsilon$.

$\therefore \sup A=\sqrt{2}$.

对任何一个有上界的实数集 A，如果在数轴上把它的所有上界所对应的点涂上红色，把不是它的上界的点涂成绿色，则在数轴上红色区与绿色区必有一个交界的点，它就是 A 的上确界，可见，在实数范围内，任何有上界的数集必存在上确界.

类似地，任何有下界的数集必存在下确界（最大下界）. 集合 A 的下确界记作 $\inf A$.

在有理数范围内，有界数集不一定存在确界，例如 $B=\{x|x^2<2,x\in\mathbf{Q}\}$ 在有理数范围内不存在上确界（因为$\sqrt{2}$不是有理数）.

* §1.2　二维实空间（$\mathbf{R}^2$）与三维实空间（$\mathbf{R}^3$）

一、概念

平面上全体点组成的集合称为二维实空间. 如果在平面上建立坐标系，平面上的点 P 与有序数组(x,y)可以一一对应，平面上的点 P 与平面向量$\boldsymbol{OP}$也存在一一对应关系. 在本书中，把｛平面上所有点｝、｛所有的平面向量｝、全体二维实数组(x,y)的集合 $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 这三个集合当作同一个数学对象，称为二维实空间，记作 $\mathbf{R}^2$.

现实的空间称为三维实空间，建立了坐标系之后，空间点 P 与有序三维数组(x,y,z)一一对应，与空间向量$\boldsymbol{OP}$也有一一对应关系. 在本书中，我们把｛空间所有点｝、｛空间所有几何向量｝、$\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R},\ z\in\mathbf{R}\}$ 这三个集合当作同一个数学对象，称为三维实空间，记作 $\mathbf{R}^3$.

二、实空间($\mathbf{R}$、$\mathbf{R}^2$、$\mathbf{R}^3$)中的几何结构

从点集的角度，实空间作为一种几何研究的对象，它的基础在于空间中任意二点有“距离”的概念. 当二个点分别用坐标表示时，它们的距离是：

在 $\mathbf{R}$ 中，$P_1(x_1)$，$P_2(x_2)$，$d(P_1,P_2)=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$；

在 $\mathbf{R}^2$ 中，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；

在 $\mathbf{R}^3$ 中，$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

在实空间 $\mathbf{R}^n(n=1,2,3)$，两点间的距离具有以下性质：

i）非负性：$\forall\ P_1$、$P_2\in\mathbf{R}^n$，$d(P_1,P_2)\geqslant 0$，且 $d(P_1,P_2)=0$ 的充要条件是 P_1 和 P_2 相重合，即 $P_1=P_2$；

ii）对称性：$d(P_1,P_2)=d(P_2,P_1)$；

iii）三角不等式：$\forall\ P_1$、P_2、$P_3\in\mathbf{R}^n$，$d(P_1,P_2)+d(P_1,P_3)\geqslant d(P_2,P_3)$.

从向量的角度，实空间的几何属性的基础是：每一个向量都有“长度”(“模”)的概念，若 $\boldsymbol{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\}$，则 $|\boldsymbol{OP}|=\sqrt{\boldsymbol{OP}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

在实空间中，$|\boldsymbol{OP}|=d(O,P)$，因此，向量的模也有非负性、对称性和三角不等式.

三、实空间的代数结构

实空间作为一种代数研究的对象，它的基础在于它们的元素之间可以进行加、减、数与元素相乘这样一些运算，称为线性运算，而且任意二个元素进行上述运算后所产生的结果，仍然是该空间的元素，以 $\mathbf{R}^3$ 为例：

$$[x_1,y_1,z_1]\pm[x_2,y_2,z_2]=[x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2];$$
$$k\cdot[x,y,z]=[kx,ky,kz].$$

显然，$\forall\ P$、$Q\in\mathbf{R}^3$，λ、μ 为任意实数，$\lambda P+\mu Q\in\mathbf{R}^3$，可见，实空间对线性运算是封闭的，这样的空间称为线性空间.

* * §1.3　复空间（C）

一、概念

全体复数的集合称为复空间，记作 **C**，由于复数与有序二维数组（x，y）与平面上的点及平面向量互相之间都有一一对应关系，我们也可以把复空间与二维实空间认为是同一的.

二、C 与 $\mathbf{R}^2$ 的异同

作为集合，**C** 与 $\mathbf{R}^2$ 之间可以建立一一对应关系. 在 **C** 中，几何结构（距离，模）及代数结构（线性运算）也与 $\mathbf{R}^2$ 一致. 从这一点看，**C** 与 $\mathbf{R}^2$ 有类似之处. 但是在 **C** 中还定义了元素之间的乘、除运算，这是 $\mathbf{R}^2$ 中没有的. 另一方面，在 $\mathbf{R}^2$ 中，定义了内积与外积这两种运算. 总之，**C** 作为一个数学研究的对象，与 $\mathbf{R}^2$ 既有联系又有区别，有其独立存在的价值.

* * §1.4　n 维实空间（欧几里德空间）（$\mathbf{R}^n$）

一、概念

在生产与生活实践中，常常出现多个（超过三个，有时甚至达到几百、几千个）量同时变化的情况，为此，我们把点、向量、空间等概念进行推广. n 个实数构成的有序数组（x_1，x_2，…，x_n）称为 n 维点，也可称为 n 维向量，全体 n 维点组成的集合：

$\mathbf{R}^n=\{[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mid x_i\in\mathbf{R},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 称为实 n 维空间，也可称为实 n 维向量空间.

二、$\mathbf{R}^n$ 中的线性运算

定义　任意的 $P=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，$Q=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$，$\forall\ \lambda\in\mathbf{R}$，

$$[x_1,x_2,\cdots,x_n]\pm[y_1,y_2,\cdots,y_n]=[x_1\pm y_1,x_2\pm y_2,\cdots,x_n\pm y_n];$$

$$\lambda\cdot[x_1,x_2,\cdots,x_n]=[\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n].$$

显然，$\forall\ P$、$Q\in\mathbf{R}^n$，λ、$\mu\in\mathbf{R}$，有 $\lambda P+\mu Q\in\mathbf{R}^n$，即实 n 维空间是线性空间.

三、$\mathbf{R}^n$ 中两点间的距离

定义　$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

显然，$\mathbf{R}^n$ 中的距离满足非负性及对称性，为了证明它也满足三角不等式，我们先证明

预备定理　设 x_i 及 y_i 都是任意的实数，$i=1$，$2,\ldots$，n.

则
$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2.\quad\text{（柯西不等式）}$$

证　设 λ 为任意实数，考察二次三项式，

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\lambda^2-\Big(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)\lambda+\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2\lambda^2-2x_iy_i\lambda+y_i^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i\lambda-y_i)^2\geqslant 0.$$

可见，它的判别式
$$\Delta=\Big(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2-4\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)\leqslant 0.$$

∴
$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2.$$

接下来，我们证明三角不等式：

设 $P_1 = (x_1,x_2,\cdots,x_n), P_2 = (y_1,y_2,\cdots,y_n), P_3 = (z_1,z_2,\cdots,z_n)$.

则
$$
\begin{aligned}
[d(P_2,P_3)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(y_i - x_i) + (x_i - z_i)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)(x_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2 + 2\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]} + \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 \\
&= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2}\right]^2 \\
&= [d(P_1,P_2) + d(P_1,P_3)]^2
\end{aligned}
$$

∴ $$d(P_2,P_3) \leqslant d(P_1,P_3) + d(P_1,P_2).$$

四、$\mathbf{R}^n$ 中的内积、模

定义 $P_1 \cdot P_2 = (x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot(y_1,y_2,\cdots,y_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$，称为 $\mathbf{R}^n$ 中的二个元素、P_1、P_2 的内积，也可记作 $\langle P_1 \cdot P_2\rangle$.

定义 $\mathbf{R}^n$ 中元素 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的模为：

$$|P| = \sqrt{P\cdot P} = \sqrt{\langle P,P\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

可见，$|P| = d(O,P)$，因此，元素 P 的模也有非负性、对称性以及三角不等式.

* * §1.5 $\mathbf{R}^n$ 中的点集及有关概念

一、点 P_0 的邻域

设点 $P_0 \in \mathbf{R}^n$，则集合 $\{P | P\in\mathbf{R}^n, d(P,P_0)<\delta\}$ 称为 P_0 点的 δ 邻域，记作 $O(P_0,\delta)$.

在邻域中去掉中心点 P_0，集合 $\{P | P\in\mathbf{R}^n, 0<d(P_1,P_2)<\delta\}$ 称为以 P_0 为中心，δ 为半径的去心邻域，记作 $O^*(P_0,\delta)$.

特别，在 $\mathbf{R}$ 中，$O(x_0,\delta)$ 就是开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$；

在 $\mathbf{R}^2$ 中，$O((x_0,y_0),\delta)$ 就是圆盘 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$；

在 $\mathbf{R}^3$ 中，$O((x_0,y_0,z_0),\delta)$ 就是球体 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\delta^2$.

二、点集的内点、外点、界点

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若点 $P\in A$，且 $\exists\delta>0$ 使 $O(P,\delta)\subset A$，则称 P 为 A 的一个内点.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若点 $P\notin A$，且 $\exists\delta>0$ 使 $O(P,\delta)\cap A=\varnothing$ 则称 P 是 A 的一个外点.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若点 $P\in\mathbf{R}^n$，且 P 不是 A 的内点，也不是 A 的外点，则称 P 为 A 的界点.

例 1 在 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x | a<x<b\}$（就是开区间 (a,b)），求 A 的全体内点组成的集；全体外点组成的集；全体界点组成的集.

解 $\forall x\in A$，即 $a<x<b$，必存在 $\delta>0$，使 $a<x-\delta<x<x+\delta<b$.

$\therefore x$ 是 A 的内点，即 A 的全体内点的集合就是 A 的自身.

若 $\forall\ x\in B=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$，即 $x<a$，或 $x>b$.

必存在 $\delta>0$，使 $x+\delta<a$ 或 $x-\delta>b$ 即 $O(x,\delta)\cap A=\varnothing$.

$\therefore$集合 B 是 A 的全体外点的集合.

集合 A 的界点只有二个点，它们是 $x=a$ 及 $x=b$.

例 2 在 $\mathbf{R}$ 中，$A=\{x\,|\,x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}\}$，求 A 的内点、外点、界点.

对于 $\mathbf{R}$ 中的点，分别讨论如下：

若 $x\in A$，设 $x=\frac{1}{m}$，$m\in\mathbf{N}$，取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m},\ \frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right\}$，则 $O^*(x,\delta)\cap A=\varnothing$，可见 x 既不是 A 的内点也不是 A 的外点，所以是 A 的界点.

若 $x=0$，则 $\forall\ \delta>0$，$O(0,\delta)$中总是有在 A 中的点，又总是有不在 A 中的点，故 $x=0$ 是 A 的界点.

若 $x\neq 0$，$x\notin A$，则 x 必落在 A 的相邻二点之间，设$\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}$，则$\exists\,\delta>0$，使$\frac{1}{k+1}<x-\delta<x<x+\delta<\frac{1}{k}$，即 $O(x,\delta)\cap A=\varnothing$，故这样的点是 A 的外点.

综上，集合 A 没有内点；A 中所有点及 $x=0$ 是 A 的界点；$\mathbf{R}$ 中其他的点都是 A 的外点.

例 3 $\mathbf{R}^2$ 中的集合 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，则满足 $x^2+y^2<1$ 的点(x,y)是 A 的内点，满足 $x^2+y^2>1$ 的点(x,y)是 A 的外点，满足 $x^2+y^2=1$ 的点(x,y)是 A 的界点.

例 4 $\mathbf{R}^2$ 中的集合 $A=\{(x,0)\,|\,x\in(a,b)\}$，则集合 A 外的任一点都是 A 的外点，集合 A 中的任一点都是 A 的界点，集合 A 没有内点.

三、点集的聚点、孤立点

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，P 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点，若$\forall\ \delta>0$，$O^*(P,\delta)\cap A\neq\varnothing$，则称 P 是 A 的一个聚点. 若 P 是 A 中的点，但不是 A 的聚点，则称 P 为 A 的孤立点.

注意 聚点 P 可以是 A 中的点，也可以不是 A 中的点；A 的内点必是 A 的聚点；A 的外点必定不是 A 的聚点.

例 5 设 $A=\{x\,|\,a<x<b\}$是 $\mathbf{R}$ 中的点集，求它的所有聚点构成的集.

显然，A 中的任一点都是 A 的聚点，又 $x=a$ 及 $x=b$ 两点也满足 A 的聚点的定义，满足 $x<a$ 或 $x>b$ 的点都是 A 的外点，必定不是 A 的聚点.

综上，A 的全体聚点的集合是$\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，此集合没有孤立点.

例 6 $\mathbf{R}$ 中的集合 $A=\{x\,|\,x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}\}$只有一个聚点 $x=0$，因此 A 中每一点都是孤立点.

例 7 $\mathbf{R}^2$ 中的点集 $A=\{(x,y)\,|\,(x^2+y^2)(x^2+y^2-4)\geqslant 0\}$.

此集合由原点及圆周 $x^2+y^2=4$ 上及圆外面的所有点组成，满足 $x^2+y^2\geqslant 4$ 的点都是 A 的聚点，原点是 A 的孤立点.

四、开集与闭集

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若 A 中的每一点都是 A 的内点，则称 A 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.

例 8 开区间(a,b)是 $\mathbf{R}$ 中的开集，$A=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$也是 $\mathbf{R}$ 中的开集，在 $\mathbf{R}$ 中半开区间$(a,b]$不是开集，闭区间$[a,b]$也不是开集.

例 9 $\mathbf{R}^2$ 中，圆 $x^2+y^2<a^2$ 是开集，圆环 $a^2<x^2+y^2<b^2$ 也是开集，含圆周的圆 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 不是开集.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，$\mathbf{R}^n-A=B$ 称为 A 的补集，若 B 为开集，则称 A 为闭集.

例 10 在 $\mathbf{R}$ 中，闭区间$[a,b]$的补集是$(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$，它是开集，因而$[a,b]$是闭集，半开区间$(a,b]$的补集是$(-\infty,a]\cup(b,+\infty)$，它不是开集，因此$(a,b]$不是闭集.

例 11 在 $\mathbf{R}^2$ 中，集合$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$是闭集，集合$\{(x,y)\mid a^2<x^2+y^2\leqslant b^2\}$既不是开集，也不是闭集.

五、集合的连通性

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若 A 中的任意两点 P、Q 都可用全在 A 中的一条折线相连接，则称 A 是连通集.

例 12 在 $\mathbf{R}$ 中，集合(a,b)是连通的，集合$(0,1)\cup(1,2)$不是连通集.

例 13 在 $\mathbf{R}^2$ 中，集合$\{(x,y)\mid a^2<x^2+y^2\leqslant b^2\}$是连通集，而集合 $A=\{(x,y)\mid xy>0\}$不是连通集.

六、区域与闭区域.

$\mathbf{R}^n$ 中连通的开集称为 $\mathbf{R}^n$ 中的区域，区域加上它的全部界点组成的集合称为闭区域.

在 $\mathbf{R}$ 中，开区间(a,b)是区域，闭区间$[a,b]$是闭区域；在 $\mathbf{R}^2$ 中，$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$是区域，$\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$也是区域，集合$\{(x,y)\mid xy>0\}$是开集但不连通，它不是区域.

七、有界集

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若存在定值 r，使 A 整个落在以原点 O 为中心，r 为半径的“球”内.即：$A\subset B=\{P\mid d(O,P)<r\}$，则称 A 为有界集.

八、点集的直径

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界点集，$D=\{d(P_1,P_2)\mid P_1\in A,P_2\in A\}$是一个有上界的实数集，称 $\sup D$ 为点集 A 的直径. 我们约定，无界点集的直径是无穷大，用记号∞表示. 例如，$\mathbf{R}^2$ 中的点集$\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$直径为$\sqrt{2}$，$\mathbf{R}$ 中的点集$(0,1)\cup(1,2)$的直径是 2.

教 学 要 求

1. 知道无理数概念的由来；知道实数与数轴上点的一一对应关系；知道实数的基本性质.

2. 知道基本集合 $\mathbf{R}$、$\mathbf{R}^2$、$\mathbf{R}^3$、$\mathbf{C}$ 的概念，知道 $\mathbf{R}^n$ 的概念.

3. 知道两点间距离的公式及距离的基本性质.

4. 知道 $\mathbf{R}^n$ 中 n 维向量的线性运算（加法，数与向量相乘）的概念与做法；知道两向量内积的概念与性质.

5. 知道点集的表示方法，会用适当的方法表示给定的点集.

6. 知道与点集有关的基本概念：有界集；无界集；点集的直径；邻域；去心邻域；内点、外点、界点、聚点、孤立点、开集、闭集、连通性、区域、闭区域.

练 习 题

1. 在数轴上画出下列点集 A 的图形，并写出 A 的全体内点的集合；A 的全体界点的集合；A 的全体聚点的集合：

(1) $A=\{x\mid 1-x^2\geqslant 0 \text{ 且 } x\neq 0\}$；

(2) $A=\{x\mid \sin x\cdot\cos x=0\}$；