高等学校教学用書

積分学

H. H. 魯金 著

高等教育出版社

2157

高等学校教学用書

積　分　学

H. H. 魯　金　著
譚家岱　張理京譯

高等教育出版社

本書系根据苏联國立“苏維埃科学”出版社（Государственное издательство “Советская наука”）出版的魯金（Н. Н. Лузин）著“積分学”(Интегральное исчисление) 1953 年版譯出。原書經苏联高等教育部批准为高等学校教科書。

積　　分　　学

Н. Н. 魯　金　著

譚家岱　張理京譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海集成印制厂印刷　新華書店總經售

書號 13010·229　開本 850×1168 1/32　印張 12 14/16　字數 340,000

一九五四年七月上册初版（共印 57,000）

一九五四年七月下册初版（共印 54,000）

一九五六年十一月合訂本第一版

一九五六年十二月上海第二次印刷

印數 15,001—33,000　　定價(8) ¥ 1.50

目 次

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　積分法.直接積分的各種法則

§1. 積分法

讀者早已熟知：數學的運算常常是一對一對出現的，每一對是由兩個彼此相反的運算組成的。例如，加法和減法（+，−）、乘法和除法（×，÷）、連乘 n 次以及開 n 次方[$(\quad)^n$，$\sqrt[n]{\quad}$]等。

此外，讀者尙知道：函數結構的符號也可以當作是一種運算，這種運算也是成雙的：有正函數與反函數。如果已給的函數記爲 $f(x)$，那麼爲了求 f 的反函數結構 φ，應在等式 $y=f(x)$ 中將字母 y 及 x 的位置互換，得 $x=f(y)$，然後再解所得方程中的 y，得 $y=\varphi(x)$。函數結構 φ 是跟 f 相反的。例如下面右邊一行中的函數是另一行中函數的反函數：

$$\begin{array}{ll} x^2+1, & \pm\sqrt{x-1}, \\ a^x, & \lg_a x, \\ \sin x, & \operatorname{arc}\sin x。\end{array}$$

這裏，我們要注意一件事，正運算差不多總是單值的，而反運算就常常是多值的。這可以由上面右邊一行的函數看出來，其中第一個 $\pm\sqrt{x-1}$，同時有兩個數值；最末一個 $\operatorname{arc}\sin x$，甚至同時具有無窮多的數值。

讀者還遇到過另外一對函數

$$f(x),\quad \Phi(x),$$

其中左邊的一個是原函數，右邊的是它的導函數(平常都簡稱導數——譯者)。這種情況，人們把它寫成一個等式

$$f'(x)=\Phi(x)。$$

微分學就是以下述正課題爲其基本課題的：

由給定的原函數 $f(x)$，導出它的導數 $\Phi(x)$ 來。

這個課題，可以用符號表示爲：

$$f(x)\to\Phi(x)。$$

微分學，利用它的基本運算——微分法(求導數的方法)，來解決這個課題。

積分學則是以下述逆課題爲其基本課題的：

按給定的導數 $\Phi(x)$，找出它的原函數 $f(x)$ 來。

這個課題可以用符號表示爲：

$$f(x)\leftarrow\Phi(x)。$$

積分學利用它的基本運算——積分法，來解決這個課題。已知導數 $\Phi(x)$，求其原函數的運算，稱爲積分法。因此，就廣義而言：

積分運算是反微分運算。

求原函數的運算旣然叫做積分法，從所給導數 $\Phi(x)$ 求得的每一個原函數 $f(x)$，就叫做函數 $\Phi(x)$ 的(個別的)積分。

§2. 積分運算的多值性：附加的任意常量．不定積分

微分法是一個單值的正運算，因爲連續函數 $f(x)$ 不可能具有兩個不同的導數 $\Phi(x)$。積分法則是一個反運算，像大多數反運算一樣，它是一個多值的運算：對於給定的導數 $\Phi(x)$，它給出的不只一個結果 $f(x)$，而有無窮多個結果。

爲了證明這點，首先記住：常量的導數是零，我們證明一個基本的預備定理。

預備定理 假若連續函數在某個線段上具有恆等於零的導數，則這個函數在該線段上是一個常量。

證明 設函數 $F(x)$ 在線段 $[a,b]$ 上是連續的，並設在該線段上每一點 x 處 $F'(x)=0$。假若函數 $F(x)$ 在該線段上不是一個常量，則

在該線段上存在這樣兩個點 x_1 及 x_2, $x_1<x_2$, 在這兩點，函數 $F(x)$ 的數值 $F(x_1)$ 及 $F(x_2)$ 一定不相等: $F(x_1)\neq F(x_2)$。

另一方面，對於線段 $[x_1, x_2]$，引用拉格蘭日的中值定值，我們可得:

$$F(x_2)-F(x_1)=(x_2-x_1)\cdot F'(\xi),$$

式中 ξ 為介於 x_1 及 x_2 中間的一個數, $x_1<\xi<x_2$。因為 ξ 是線段$[a, b]$的一個點，所以我們應有 $F'(\xi)=0$。由此，前面的等式給出了 $F(x_2)-F(x_1)=0$, 這是和不等式 $F(x_1)\neq F(x_2)$ 相矛盾的。

由此可知: $F(x)$ 在線段$[a, b]$上是一個常量。

現在我們可以證明下面的定理了:

正定理　假若兩個函數相差一個常量，則它們具有同一導數。

證明　因為，假若 $f^*(x)-f(x)=C$, 式中 C 為常量，又 $f(x)$ 是可微分的，則 $f^*(x)=f(x)+C$, 因此就有

$$\frac{df^*(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dC}{dx}=\frac{df(x)}{dx}。$$

逆定理　假若兩個函數具有同一導數，則它們之差為一常量。

證明　因為，假若 $\frac{df^*(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$, 則

$$\frac{d[f^*(x)-f(x)]}{dx}=\frac{df^*(x)}{dx}-\frac{df(x)}{dx}=0。$$

因此，按上面證明了的基本預備定理，我們有:

$$f^*(x)-f(x)=C,$$

其中 C 是一個常量。

由上面這些證明了的定理，立即得出積分運算的多值性。

因為，假若對於給定的導數 $\Phi(x)$, 我們找到了它的任何一個個別的原函數 $f(x)$, 那麼:

第一，每一個表達式 $f(x)+C$, 其中 C 為任意取好的常量，都是這個導數 $\Phi(x)$ 的原函數，因為函數 $f(x)$ 與 $f(x)+C$ 之差為一常量（正

定理);

第二,導數 $\Phi(x)$ 的每一個原函數 $f^*(x)$,不論是哪一個,毫無例外,都可以表達爲 $f(x)+C$ 的形式,其中 C 是一個常量;因爲,兩個原函數 $f^*(x)$ 及 $f(x)$,具有同一導數 $\Phi(x)$,從而 $f^*(x)-f(x)=C$,其中 C 爲一常量(逆定理)。因此 $f^*(x)=f(x)+C$。

這樣。

假若 $f(x)$ 是所給導數 $\Phi(x)$ 的任一個個別的原函數,那麼,$\Phi(x)$ 的所有的原函數的全體,包括在表達式 $f(x)+C$ 中,其中 C 是**任意常量**。

前面,我們把導數 $\Phi(x)$ 的任一個求得的原函數 $f(x)$,稱爲函數 $\Phi(x)$ 的(個別的)積分。

一般表達式 $f(x)+C$ (式中 C 爲任意常量),稱爲函數 $\Phi(x)$ 的不定積分。這個表達式中的首項 $f(x)$,稱爲不定積分的函數項。第二項 C,稱爲積分常量。這個常量與 x (稱爲積分變量)無關,它的數值是可以任意選擇的;因此我們稱它爲附加的任意常量,或不定積分的任意常量。

例 因 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right)=x^3$,函數 $\frac{x^4}{4}$ 便是 x^3 的原函數。所以 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的一個個別積分。x^3 的個別積分也可以是 $\frac{x^4}{4}+2$, $\frac{x^4}{4}-7$ 等等。表達式 $\frac{x^4}{4}+C$ (式中 C 爲任意常量),是 x^3 的不定積分。首項 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的不定積分的函數項。第二項 C 是積分常量,它的數值可以任意選取。

如果我們要自某所給導數 $\Phi(x)$ 的所有的原函數中,尋找某個原函數,使他具有某預先規定的性質,那麼我們就用得着積分常量的任意性了。

例如在實用上,常要解下面的問題:

要選擇積分常量的數值,使我們得到一個原函數,它在指定的 x_0 處取得預先規定的數值 y_0。

解　設 $\Phi(x)$ 是所給的導函數，$f(x)+C$ 是 $\Phi(x)$ 的不定積分。常量 C 的數值應當選擇得，使原函數 $f(x)+C$ 在 $x=x_0$ 時等於 y_0。就是說，我們應有 $f(x_0)+C=y_0$。由這個方程決定 C，我們求得 $C=-f(x_0)+y_0$。由此而知，所找尋的原函數是

$$f(x)-f(x_0)+y_0。$$

例　求 x^3 的原函數，使它在 $x=2$ 點的數值爲 17。

解　x^3 的不定積分爲 $\frac{x^4}{4}+C$。現在要取 C 的數值，使原函數 $\frac{x^4}{4}+C$ 在 $x=2$ 時等於 17。這就是說，我們應有等式

$$\frac{2^4}{4}+C=17 \text{ 或 } 4+C=17,$$

由此知，$C=13$。當 $x=2$ 時，原函數 $\frac{x^4}{4}+13$ 的確具有數值 17。

讀者應該注意，這種問題的解，是唯一的，完全確定了的，因爲在函數 $\Phi(x)$ 的所有原函數 $f^*(x)$ 中，有一個也只有一個原函數 $f(x)+C$ 在 x_0 點取得數值 y_0。這是因爲，當我們解這個問題時，只得到給出這個原函數的常量 C 的一個數值，$C=-f(x_0)+y_0$。

§3.　定積分

雖然每一個所給導數 $\Phi(x)$，具有無窮多的原函數，但是這些原函數都具有下面的公共性質：

在任意一個給定的線段 $[a, b]$ 的兩個端點處，這些原函數所得到的增量，都彼此相等㊀。

證明　事實上，若 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 是 $\Phi(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上的兩個任意的原函數，則它們之差 $f_2(x)-f_1(x)$ 在這個線段上是一個常量。所以，在 $[a, b]$ 上，我們有等式 $f_2(x)-f_1(x)=C$，其中 C 爲一常量。由此而得 $f_2(x)=f_1(x)+C$。隨之而有 $f_2(b)=f_1(b)+C$ 及 $f_2(a)=f_1(a)+C$。

㊀ 譯者註：這句話容易引起誤解，實際上著者想說的是：原函數在端點 b 的數值減去它在端點 a 的數值所得差，與原函數的選擇無關。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

由第一個等式減去第二個等式，即得

$$f_2(b)-f_2(a)=f_1(b)-f_1(a)。$$

因此，當自變量 x 由數值 a 變到數值 b 時，$\Phi(x)$ 的一切原函數所得到的一切增量，彼此相等。證明完畢。

由此我們可以得到一個很重要的推論：

原函數的增量 $f(b)-f(a)$，是一個與原函數的選擇沒有關係的數量，它只依賴於導數 $\Phi(x)$ 的本性以及兩個數 a 和 b。

由於這個緣故，我們把增量 $f(b)-f(a)$ 直接記爲 I_a^b，而不指出原函數 $f(x)$（因爲這個增量與原函數的選擇完全沒有關係），並稱之爲函數 $\Phi(x)$ 在 a, b 限之間的**定積分**；同時，數 a 寫在下面，稱爲下限；數 b 寫在上面，稱爲上限。

不要忘記，在討論中我們假定了函數 $\Phi(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上是連續的；隨之，它的曲線在這個線段之上沒有任何間斷及跑到無窮遠等等反常現象。

例 試計算下上限 1 與 5 之間函數 x^3 的定積分。

解 函數 x^3 的不定積分是 $\frac{x^4}{4}+C$。任意取 x^3 的一個原函數，例如取 $\frac{x^4}{4}$。可得 $I_1^5=$ $=\frac{5^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{625}{4}-\frac{1}{4}=\frac{624}{4}=156$。所以，函數 x^3 的定積分 I_1^5 是 156。

當我們已經給好了在線段 $[A, B]$ 上連續的導數 $\Phi(x)$ 時，又當 a 及 b 是該線段的兩個任意指定的點時，那麼定積分 I_a^b 只是一個數。假若下限 a 是常量，而上限 b 是變量，但 b 不超出 $[A, B]$ 範圍之外，則定積分 I_a^b 就變成其上限 b 的一個函數。我們應當搞清楚這個函數的性質。爲此目的，我們以 x 表示定積分 I_a^b 的上限 b，就是令 $b=x$，然後研究以變量 x 爲上限的定積分 I_a^x。

因爲按照定積分 I_a^b 的原義，我們有等式：

$$I_a^b=f(b)-f(a),$$

式中 $f(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的任何一個原函數——是任意選擇的，所以在該等

式中令 $b=x$, 即得

$$I_a^x=f(x)-f(a)。$$

因此,取這個等式兩邊對 x 的導數,即得

$$\frac{dI_a^x}{dx}=\frac{df(x)}{dx}-\frac{df(a)}{dx}=\Phi(x)-0=\Phi(x)。$$

因此,以變量 x 爲上限的定積分 I_a^x,是 $\Phi(x)$ 的一個原函數。當 $x=a$ 時,這個原函數等於零,因爲:

$$I_a^a=f(a)-f(a)=0。$$

由前面所述各點,即知:定積分 I_a^x,是 $\Phi(x)$ 的所有原函數中在 a 點等於零的一個唯一的原函數。

表達式

$$I_a^x+C,$$

(式中 C 是任意常量),顯然是 $\Phi(x)$ 的不定積分;因爲當 C 變化時,它給出了 $\Phi(x)$ 的所有的原函數。

當 C 給定時,式子 I_a^x+C 給出了在 $x=a$ 點等於 C 的原函數。

§4. 關於計算定積分的、積分學的基本定理

在前節中我們看到,函數 $\Phi(x)$ 在上下限 a, b 之間的定積分 I_a^b 等於 $\Phi(x)$ 的任意一個原函數 $f(x)$ 的增量 $f(b)-f(a)$,因此它實際上與原函數沒有關係,而只依賴於導函數 $\Phi(x)$ 與上下限 a 及 b。可是,定積分 I_a^b 對於函數 $\Phi(x)$ 及數 a 與 b 的這個依賴關係,是非常隱蔽的,因此,積分學首先要指出:爲了求定積分

$$I_a^b=f(b)-f(a), \tag{1}$$

應對線段[a, b]及該線段上的連續函數 $\Phi(x)$ 作什麽運算。

乍看起來,這樣直接從線段[a, b]及函數 $\Phi(x)$ 求定積分 I_a^b 是很容易的,因爲這只要應用拉格蘭日的中値定理(第一册, §149)寫出下面的等式就行了:

$$f(b)-f(a)=(b-a)\Phi(\xi), \qquad (2.$$

式中 ξ 表示某個介於 a 和 b 之間的數(圖 1)。

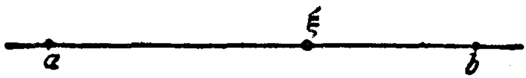

圖 1.

但是,爲了知道等式(2)右邊的數值,那我們應當知道中值 ξ 的準確位置。然而中值定理並沒有告訴我們這點,它只告訴我們 ξ 是在線段 $[a, b]$ 兩端之間的某一處而已。

爲了減輕 ξ 點在線段 $[a, b]$ 上的不定性,我們將這個線段分爲 n 個小線段,同時對於每一個這種小線段,都施用一次中值定理。照下面的方式來做。

首先,在這線段 $[a, b]$ 上畫一些分點。這些分點都預先取好,是已知的,共有 $n—1$ 個。由 a 到 b,依次用 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots, x_{n-1}$ 記它們。爲了使討論的形式一致起見,以 x_0 表示開頭的一點 a,以 x_n 表示末點 b。

這樣,最左邊的一個線段 $[a, x_1]$,稱爲初始線段;隨後的線段 $[x_1, x_2]$ 稱爲第一個;它後面的線段 $[x_2, x_3]$ 稱爲第二個;等等,依此類推。一般說來,線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 稱爲第 i 個線段;最後的一個線段 $[x_{n-1}, b]$ 稱爲第 $n—1$ 個線段(圖 2)。

圖 2.

假若,在線段 $[a, b]$ 上,由 a 點到 b 點,我們把 x_i 當作初值,x_{i+1} 當作新值,那麽,差 $x_{i+1}-x_i$ 就應當稱作橫坐標 x_i 的增量,並應以 Δx_i 記之;就是說,應寫下面的等式:

$$x_{i+1}-x_i=\Delta x_i, \tag{3}$$

其中 i 可以是 0, 1, 2, …, $n-1$ 中的任意一個數。另一方面，差 $x_{i+1}-x_i$ 顯然等於線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 的長；因此，Δx_0 是初始線段的長，Δx_1 是第一個線段的長，Δx_2 是第二個線段的長，等等，一直到最後一個線段，它的長是 Δx_{n-1}。

現在，中值定理給出了下面的許多等式：

對於初始線段：

$$f(x_1)-f(a)=(x_1-a)\Phi(\xi_0)=\Phi(\xi_0)\cdot\Delta x_0。$$

對於第一個線段：

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\Phi(\xi_1)=\Phi(\xi_1)\Delta x_1。$$

對於第二個線段：

$$f(x_3)-f(x_2)=(x_3-x_2)\Phi(\xi_2)=\Phi(\xi_2)\cdot\Delta x_2。$$

……………………………………………………………………

對於第 i 個線段：

$$f(x_{i+1})-f(x_i)=(x_{i+1}-x_i)\Phi(\xi_i)=\Phi(\xi_i)\Delta x_i。$$

……………………………………………………………………

對於第 $n-1$ 個線段：

$$f(b)-f(x_{n-1})=(b-x_{n-1})\Phi(\xi_{n-1})=\Phi(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1},$$

式中 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_{n-1}$ 都是一些不知道的點，各位於初始，第一，第二，…，第 i，第 $n-1$ 個線段上。

把上面的等式都加起來，我們得到：

$$f(b)-f(a)=\Phi(\xi_0)\Delta x_0+\Phi(\xi_1)\Delta x_1+\Phi(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+\Phi(\xi_i)\Delta x_i+$$
$$+\cdots+\Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}。 \tag{4}$$

讀者應當看到，雖然這個等式是完全準確的，可是，就我們爲計算未知量 $f(b)-f(a)$ 這個最終目的來說，它完全不適用；因爲我們並不知道中值 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \xi_{n-1}$ 在其對應線段上的位置。我們只不過依據中值定理把這些中值寫了寫而已。

假若我們現在取仍然在各個線段之內的另外一些點 $\xi_0^*, \xi_1^*, \xi_2^*, \cdots, \xi_i^*, \cdots, \xi_{n-1}^*$，來代替那些我們不知道的點 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_{n-1}$ 那麼就沒有任何理由期待：形式類似的和：

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1} \qquad (5)$$

是恰好等於 $f(b)-f(a)$ 的。然而，我們可以計算這個新的和與 $f(b)-f(a)$ 究竟差多少。

事實上，寫出差式

$$[f(b)-f(a)]-[\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i+\cdots+ \\ +\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}]。 \qquad (6)$$

後，我們看到，它可以從等式（4）的兩邊減去和式（5）而得到；就是說，這個差是等於下面的表達式的：

$$[\Phi(\xi_0)-\Phi(\xi_0^*)]\Delta x_0+\cdots+[\Phi(\xi_i)-\Phi(\xi_i^*)]\Delta x_i+\cdots+ \\ +[\Phi(\xi_{n-1})-\Phi(\xi_{n-1}^*)]\Delta x_{n-1}。 \qquad (7)$$

為了要估計這個表達式的數值，我們注意：兩個點 ξ_i 及 ξ_i^* 都是在線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的。函數 $\Phi(x)$ 是假定在線段 $[a, b]$ 上連續的。這意味着，對每一個任意小的正數 ε，恆存在這種正數 η，使得，當不等式，

$$|\Phi(x'')-\Phi(x')|<\varepsilon, \qquad (\mathrm{I})$$

成立時，下面的不等式即成立：

$$|x''-x'|<\eta。 \qquad (\mathrm{II})$$

由此而知，假若 $[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, b]$ 這些線段之中，最大的一個之長小於 η 的話，則對於每一個 i，都有不等式

$$|\xi_i-\xi_i^*|<\eta, \qquad (\mathrm{II}^*)$$

因此，就必然有對於一切 i 值都成立的不等式

$$|\Phi(\xi_i)-\Phi(\xi_i^*)|<\varepsilon, \qquad (\mathrm{I}^*)$$

由不等式 (I^*) 即知，表達式（7）的絕對值不能超過下面的和：

$$\varepsilon\Delta x_0+\varepsilon\Delta x_1+\cdots+\varepsilon\Delta x_i+\cdots+\varepsilon\Delta x_{n-1},$$

而這個和顯然等於 $\varepsilon(b-a)$。當 ε 的極限是零時，它是一個無窮小；這

表示了·差式（6）必定是個無窮小量，由此而知：$f(b)-f(a)$ 是和式（5）的極限。

這樣，我們就得到了最重要的一個定理：

積分學的基本定理。設函數 $\Phi(x)$ 是在所給線段 $[a, b]$ 上連續的，具有原函數 $f(x)$。我們將該線段分爲 n 個小線段，其長各爲 $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_{n-1}$，又在每一個小線段上任取一點：$\xi_0^*, \xi_i^*, \cdots, \xi_{n-1}^*$。則當小線段的數目無限增加，而且每一個小線段的長都趨近於零的時候，差 $f(b)-f(a)$ 就是下面的和的極限：

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}. \qquad (5)$$

從這個積分學基本定理，可推出下面的求定積分的一般法則。

爲了求線段 $[a, b]$ 上所給連續函數 $\Phi(x)$ 的定積分 I_a^b，我們應按下面幾個步驟來做。

第一步　把線段 $[a, b]$ 分爲 n 個小線段，其長各爲 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n-1}$（按從 a 到 b 的次序）。

第二步　在每一個小線段上，各任意選擇一點：$\xi_0^*, \xi_1^*, \cdots, \xi_{n-1}^*$。

第三步　對於每一個小線段 $[x_i, x_{i+1}]$，都做一個乘積 $\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i$，這就是所給函數 $\Phi(x)$ 在所取點 ξ_i^* 處的數值乘上該線段的長 Δx_i。把這 n 個乘積都加起來得：

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0+\Phi(\xi_1^*)\Delta x_1+\cdots+\Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}. \qquad (5)$$

第四步　當 n 無限增加，並且 Δx_i 中最長的一個趨近於零的時候，求這樣做成的 n 個乘積的和的極限。這個極限就是所要求的定積分 $I_a^b=f(b)-f(a)$。

§5. 積分學的基本運算的特徵、定積分與不定積分的記號。

我們都知道，一般微分法則（第一册 §60）分爲四個步驟；其中前三個步驟的目的，只在於建立 Δx 爲有限時的表達式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 只有第四個步

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com