

高等学校教学用书

积 分 学

H. H. 魯 金 著

高等教育出版社

5152
高等學校教學用書



積 分 學

H. H. 魯 金 著
譚家岱 張理京譯

高等教育出版社

.....

本書系根据苏联國立“蘇維埃科学”出版社（Государственное
издательство “Советская наука”）出版的魯金（Н. Н. Лузин）著
“積分学”（Интегральное исчисление）1953 年版譯出。原書經苏联
高等教育部批准为高等学校教科書。

積 分 学

Н. Н. 魯 金 著

譚家岱 張理家譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海集成印制厂印刷 新華書店總經售

書號 13010·229 開本 850×1168 1/32 印張 12 14/16 字數 340,000

一九五四年七月上册初版（共印 57,000）

一九五四年七月下册初版（共印 54,000）

一九五六年十一月合訂本第一版

一九五六年十二月上海第二次印刷

印數 15,001—33,000

定價（8）¥ 1.50

目 次

第一章 積分法.直接積分的各種法則.....1

- § 1. 積分法 § 2. 積分運算的多值性: 附加的任意常量, 不定積分 § 3. 定積分
§ 4. 關於計算定積分的、積分學的基本定理 § 5. 積分學的基本運算的特徵、定積分與不定積分的記號 § 6. 兩個相反的記號: 微分記號 d 及不定積分記號 $\int$ § 7. 關於不定積分積不積得出來的問題 § 8. 基本積分表及直接積分法 § 9. 公式 I, II 與 III § 10. 公式 IV 與 V § 11. 公式 VI 與 VII § 12. 公式 VIII—XV § 13. 公式 XVI—XIX § 14. 公式 XX 與 XXI § 15. 三角函數的微分式 § 16. 利用三角函數的置換法來積分那含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 或 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 的表達式 § 17. 關於積分答案的多重性 § 18. 分部積分法 § 19. 一個說明

第二章 積分常量.....59

- § 20. 由初始條件決定積分常量 § 21. 積分常量的幾何意義 § 22. 積分常量的物理意義

第三章 定積分.....64

- § 23. 定積分的概念 § 24. 定積分的理論計算法 § 25. 定積分的實際計算法 § 26. 定積分的記號 § 27. 萊博尼茲-牛頓的基本公式及其應用時的條件 § 28. 定積分與不定積分的關係 § 29. 定積分與不定積分中的積分變量 § 30. 積分上下限的對調 § 31. 積分線段的分割 § 32. 定積分的兩個最簡單的性質 § 33. 定積分分部積分法 § 34. 定積分的變量置換法則 § 35. 中值定理 § 36. 定積分作為面積 § 37. 用參量方程表示的曲線下的面積 § 38. 近似積分法問題 § 39. 梯形法 § 40. 辛浦松法(拋物線型公式) § 41. 上下限為無窮大的積分 § 42. 間斷(跑向無窮大)函數的積分

第四章 積分法作為求和法.積分的應用91

- § 43. 引言 § 44. 積分學應用的一般程序 § 45. 直角坐標中平面曲線的面積 § 46. 導出公式時的簡化法 § 47. 面積的質點的意義 § 48. 極坐標中平面曲線的面積 § 49. 旋轉體的體積 § 50. 曲線的長 § 51. 直角坐標中平面曲線的長 § 52. 極坐標中平面曲線的弧長 § 53. 旋轉體的表面 § 54. 平行斷面面積已知的物體的體積 § 55. 積分學在自然科學上的應用 § 56. 重心 § 57. 流體壓力, 功

第五章 公式積分法的各種方法134

- § 58. 引言 § 59. 有理分式的積分法 § 60. 用新變量作置換的積分法; 有理化
§ 61. 二項式微分 § 62. 三角函數微分式的變換 § 63. 各種置換法

第六章 級數151

- § 64. 無窮數列 § 65. 數列極限存在的檢驗法 § 66. 級數 § 67. 收斂的必要條件 § 68. 收斂的充分檢驗法, 級數的比較 § 69. 達蘭白的收斂檢驗法 § 70. 交錯級數 § 71. 絕對收斂 § 72. 歐希的積分檢驗法 § 73. 級數的運算 § 74. 級數的尾巴 § 75. 總結 § 76. 函數項級數 § 77. 均勻收斂 § 78. 均勻收斂的檢驗法 § 79. 均勻收斂級數的性質 § 80. 冪級數的收斂區域, 冪級數 § 81. 冪級數的和 § 82. 冪級數的微分法與積分法 § 83. 馬克勞林的無窮級數 § 84. 馬克勞林無窮級數與馬克勞林有限公式的比較 § 85. 二項式級數 § 86. 對數級數 § 87. $[\arctan x]$ 的展開式 § 88. $[\arcsin x]$ 的展開式 § 89. 冪級數的運算 § 90. 台勞級數

第七章 複數, 複變量及複變函數215

- § 91. 複數的算術及代數 § 92. 複數的幾何表示法 § 93. 複變量 § 94. 複數項級數的理論 § 95. 複變量函數的概念 § 96. 複變量函數的連續性 § 97. 導數及解析性 § 98. 複變量函數的微分法公式 § 99. 冪級數 § 100. 台勞級數及其收斂圓 § 101. 複變量指數函數與三角函數 § 102. 雙曲函數 § 102a. 保角變換的概念

第八章 微分方程254

- § 103. 微分方程, 它的階數及次數 § 104. 微分方程的解, 積分常量 § 105. 微分方程解的驗證 § 106. 一階一次微分方程 § 107. 高階微分方程的兩個特殊類型 § 108. 降階法 § 109. 二階線性齊次方程的一般積分的形式 § 110. 非齊次(帶右邊部分的)方程 § 111. 拉格朗日的變化常量法 § 112. 常係數二階線性方程 § 113. 一般情形下, 特殊解 y^* 的求法 § 114. 力學問題上的應用 § 115. 常係數 n 階線性微分方程 § 116. 拉格朗日的變化常量法

第九章 重積分309

- § 117. 二元積分和 § 118. 二元積分和的幾何意義 § 119. 二重(定)積分 § 120. 二重積分的幾何意義 § 121. 二重積分的計算法, 矩形區域的情形 § 122. 二重積分的計算法, 由曲線圍成的區域的一般情形 § 123. 極坐標二重積分 § 124. 柱體的體積 § 125. 平面曲線所圍成的面積 § 126. 平面圖形的重心 § 127. 平面圖形面積的慣性矩 § 128. 曲面面積的一般計算法 § 129. 利用三

重積分求體積的方法

第十章 線積分346

§ 130. 線積分的記號 § 131. 線積分的來源 § 132. 線積分的計算 § 133. 當
線積分 $\int P dx + Q dy$ 不依賴於積分路徑而只依賴於端點的位置時的情形 § 134.
全微分的解析檢驗法 § 135. 線積分依賴於路徑的情形. 力所作的功 § 136. 奧
斯特羅格勒斯基公式 § 137. 左邊爲全微分的微分方程 § 138. 積分因子

第十一章 福里哀級數372

§ 139. 三角級數 § 140. 福里哀公式 § 141. 預備定理 § 142. 福里哀級數的
首 $n+1$ 項和的表達式 § 143. 福里哀級數的收斂 § 144. 諧量分析 § 145. 關
於誤差的最小平均二乘方值

第十二章 賈普利金院士的微分方程近似積分法392

§ 146. 賈普利金微分不等式 § 147. 賈普利金法 § 148. 無限近似法 § 149. 賈
普利金法收斂的快慢程度

第一章 積分法. 直接積分的各種法則

§1. 積分法

讀者早已熟知: 數學的運算常常是一對一對出現的, 每一對是由兩個彼此相反的運算組成的。例如, 加法和減法 $(+, -)$ 、乘法和除法 $(\times, \div)$ 、連乘 n 次以及開 n 次方 $[(\quad)^n, \sqrt[n]{\quad}]$ 等。

此外, 讀者尚知道: 函數結構的符號也可以當作是一種運算, 這種運算也是成雙的: 有正函數與反函數。如果已給的函數記爲 $f(x)$, 那麼爲了求 f 的反函數結構 φ , 應在等式 $y=f(x)$ 中將字母 y 及 x 的位置互換, 得 $x=f(y)$, 然後再解所得方程中的 y , 得 $y=\varphi(x)$ 。函數結構 φ 是跟 f 相反的。例如下面右邊一行中的函數是另一行中函數的反函數:

$$\begin{array}{ll} x^2+1, & \pm\sqrt{x-1}, \\ a^x, & \lg_a x, \\ \sin x, & \arcsin x. \end{array}$$

這裏, 我們要注意一件事, 正運算差不多總是單值的, 而反運算就常常是多值的。這可以由上面右邊一行的函數看出來, 其中第一個 $\pm\sqrt{x-1}$, 同時有兩個數值; 最末一個 $\arcsin x$, 甚至同時具有無窮多的數值。

讀者還遇到過另外一對函數

$$f(x), \quad \Phi(x),$$

其中左邊的一個是原函數, 右邊的是它的導函數 (平常都簡稱導數——譯者)。這種情況, 人們把它寫成一個等式

$$f'(x) = \Phi(x).$$

微分學就是以下述正課題爲其基本課題的：

由給定的原函數 $f(x)$ ，導出它的導數 $\Phi(x)$ 來。

這個課題，可以用符號表示爲：

$$f(x) \rightarrow \Phi(x)。$$

微分學，利用它的基本運算——微分法（求導數的方法），來解決這個課題。

積分學則是以下述逆課題爲其基本課題的：

按給定的導數 $\Phi(x)$ ，找出它的原函數 $f(x)$ 來。

這個課題可以用符號表示爲：

$$f(x) \leftarrow \Phi(x)。$$

積分學利用它的基本運算——積分法，來解決這個課題。已知導數 $\Phi(x)$ ，求其原函數的運算，稱爲積分法。因此，就廣義而言：

積分運算是反微分運算。

求原函數的運算既然叫做積分法，從所給導數 $\Phi(x)$ 求得的每一個原函數 $f(x)$ ，就叫做函數 $\Phi(x)$ 的（個別的）積分。

§2. 積分運算的多值性：附加的任意常量. 不定積分

微分法是一個單值的正運算，因爲連續函數 $f(x)$ 不可能具有兩個不同的導數 $\Phi(x)$ 。積分法則是一個反運算，像大多數反運算一樣，它是一個多值的運算：對於給定的導數 $\Phi(x)$ ，它給出的不只一個結果 $f(x)$ ，而有無窮多個結果。

爲了證明這點，首先記住：常量的導數是零，我們證明一個基本的預備定理。

預備定理 假若連續函數在某個線段上具有恆等於零的導數，則這個函數在該線段上是一個常量。

證明 設函數 $F(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上是連續的，並設在該線段上每一點 x 處 $F'(x) = 0$ 。假若函數 $F(x)$ 在該線段上不是一個常量，則

在該線段上存在這樣兩個點 x_1 及 x_2 , $x_1 < x_2$, 在這兩點, 函數 $F(x)$ 的數值 $F(x_1)$ 及 $F(x_2)$ 一定不相等: $F(x_1) \neq F(x_2)$ 。

另一方面, 對於線段 $[x_1, x_2]$, 引用拉格蘭日的中值定值, 我們可得:

$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot F'(\xi),$$

式中 ξ 為介於 x_1 及 x_2 中間的一個數, $x_1 < \xi < x_2$ 。因為 ξ 是線段 $[a, b]$ 的一個點, 所以我們應有 $F'(\xi) = 0$ 。由此, 前面的等式給出了 $F(x_2) - F(x_1) = 0$, 這是和不等式 $F(x_1) \neq F(x_2)$ 相矛盾的。

由此可知: $F(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上是一個常量。

現在我們可以證明下面的定理了:

正定理 假若兩個函數相差一個常量, 則它們具有同一導數。

證明 因為, 假若 $f^*(x) - f(x) = C$, 式中 C 為常量, 又 $f(x)$ 是可微分的, 則 $f^*(x) = f(x) + C$, 因此就有

$$\frac{df^*(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

逆定理 假若兩個函數具有同一導數, 則它們之差為一常量。

證明 因為, 假若 $\frac{df^*(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$, 則

$$\frac{d[f^*(x) - f(x)]}{dx} = \frac{df^*(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} = 0.$$

因此, 按上面證明了的基本預備定理, 我們有:

$$f^*(x) - f(x) = C,$$

其中 C 是一個常量。

由上面這些證明了的定理, 立即得出積分運算的多值性。

因為, 假若對於給定的導數 $\Phi(x)$, 我們找到了它的任何一個個別的原函數 $f(x)$, 那麼:

第一, 每一個表達式 $f(x) + C$, 其中 C 為任意取好的常量, 都是這個導數 $\Phi(x)$ 的原函數, 因為函數 $f(x)$ 與 $f(x) + C$ 之差為一常量(正

定理)；

第二，導數 $\Phi(x)$ 的每一個原函數 $f^*(x)$ ，不論是哪一個，毫無例外，都可以表達為 $f(x) + C$ 的形式，其中 C 是一個常量；因為，兩個原函數 $f^*(x)$ 及 $f(x)$ ，具有同一導數 $\Phi(x)$ ，從而 $f^*(x) - f(x) = C$ ，其中 C 為一常量(逆定理)。因此 $f^*(x) = f(x) + C$ 。

這樣。

假若 $f(x)$ 是所給導數 $\Phi(x)$ 的任一個個別的原函數，那麼， $\Phi(x)$ 的所有的原函數的全體，包括在表達式 $f(x) + C$ 中，其中 C 是任意常量。

前面，我們把導數 $\Phi(x)$ 的任一個求得的原函數 $f(x)$ ，稱為函數 $\Phi(x)$ 的(個別的)積分。

一般表達式 $f(x) + C$ (式中 C 為任意常量)，稱為函數 $\Phi(x)$ 的不定積分。這個表達式中的首項 $f(x)$ ，稱為不定積分的函數項。第二項 C ，稱為積分常量。這個常量與 x (稱為積分變量)無關，它的數值是可以任意選擇的；因此我們稱它為附加的任意常量，或不定積分的任意常量。

例 因 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = x^3$ ，函數 $\frac{x^4}{4}$ 便是 x^3 的原函數。所以 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的一個個別積分。 x^3 的個別積分也可以是 $\frac{x^4}{4} + 2$ ， $\frac{x^4}{4} - 7$ 等等。表達式 $\frac{x^4}{4} + C$ (式中 C 為任意常量)，是 x^3 的不定積分。首項 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的不定積分的函數項。第二項 C 是積分常量，它的數值可以任意選取。

如果我們要自某所給導數 $\Phi(x)$ 的所有的原函數中，尋找某個原函數，使他具有某預先規定的性質，那麼我們就用得着積分常量的任意性了。

例如在實用上，常要解下面的問題：

要選擇積分常量的數值，使我們得到一個原函數，它在指定的 x_0 處取得預先規定的數值 y_0 。

解 設 $\Phi(x)$ 是所給的導函數, $f(x)+C$ 是 $\Phi(x)$ 的不定積分。常量 C 的數值應當選擇得, 使原函數 $f(x)+C$ 在 $x=x_0$ 時等於 y_0 。就是說, 我們應有 $f(x_0)+C=y_0$ 。由這個方程決定 C , 我們求得 $C=-f(x_0)+y_0$ 。由此而知, 所找尋的原函數是

$$f(x)-f(x_0)+y_0。$$

例 求 x^3 的原函數, 使它在 $x=2$ 點的數值為 17。

解 x^3 的不定積分為 $\frac{x^4}{4}+C$ 。現在要取 C 的數值, 使原函數 $\frac{x^4}{4}+C$ 在 $x=2$ 時等於 17。這就是說, 我們應有等式

$$\frac{2^4}{4}+C=17 \text{ 或 } 4+C=17,$$

由此知, $C=13$ 。當 $x=2$ 時, 原函數 $\frac{x^4}{4}+13$ 的確具有數值 17。

讀者應該注意, 這種問題的解, 是唯一的, 完全確定了的, 因為在函數 $\Phi(x)$ 的所有原函數 $f^*(x)$ 中, 有一個也只有一個原函數 $f(x)+C$ 在 x_0 點取得數值 y_0 。這是因為, 當我們解這個問題時, 只得到給出這個原函數的常量 C 的一個數值, $C=-f(x_0)+y_0$ 。

§3. 定積分

雖然每一個所給導數 $\Phi(x)$, 具有無窮多的原函數, 但是這些原函數都具有下面的公共性質:

在任意一個給定的線段 $[a, b]$ 的兩個端點處, 這些原函數所得到的增量, 都彼此相等[⊖]。

證明 事實上, 若 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 是 $\Phi(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上的兩個任意的原函數, 則它們之差 $f_2(x)-f_1(x)$ 在這個線段上是一個常量。所以, 在 $[a, b]$ 上, 我們有等式 $f_2(x)-f_1(x)=C$, 其中 C 為一常量。由此而得 $f_2(x)=f_1(x)+C$ 。隨之而有 $f_2(b)=f_1(b)+C$ 及 $f_2(a)=f_1(a)+C$ 。

⊖ 譯者註: 這句話容易引起誤解, 實際上著者想說的是: 原函數在端點 b 的數值減去它在端點 a 的數值所得差, 與原函數的選擇無關。

由第一個等式減去第二個等式，即得

$$f_2(b) - f_2(a) = f_1(b) - f_1(a)。$$

因此，當自變量 x 由數值 a 變到數值 b 時， $\Phi(x)$ 的一切原函數所得到的一切增量，彼此相等。證明完畢。

由此我們可以得到一個很重要的推論：

原函數的增量 $f(b) - f(a)$ ，是一個與原函數的選擇沒有關係的數量，它只依賴於導數 $\Phi(x)$ 的本性以及兩個數 a 和 b 。

由於這個緣故，我們把增量 $f(b) - f(a)$ 直接記為 I_a^b ，而不指出原函數 $f(x)$ （因為這個增量與原函數的選擇完全沒有關係），並稱之為函數 $\Phi(x)$ 在 a, b 限之間的定積分；同時，數 a 寫在下面，稱為下限；數 b 寫在上面，稱為上限。

不要忘記，在討論中我們假定了函數 $\Phi(x)$ 在線段 $[a, b]$ 上是連續的；隨之，它的曲線在這個線段之上沒有任何間斷及跑到無窮遠等等反常現象。

例 試計算上下限 1 與 5 之間函數 x^3 的定積分。

解 函數 x^3 的不定積分是 $\frac{x^4}{4} + C$ 。任意取 x^3 的一個原函數，例如取 $\frac{x^4}{4}$ 。可得 $I_1^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{1}{4} = \frac{624}{4} = 156$ 。所以，函數 x^3 的定積分 I_1^5 是 156。

當我們已經給好了在線段 $[A, B]$ 上連續的導數 $\Phi(x)$ 時，又當 a 及 b 是該線段的兩個任意指定的點時，那麼定積分 I_a^b 只是一個數。假若下限 a 是常量，而上限 b 是變量，但 b 不超出 $[A, B]$ 範圍之外，則定積分 I_a^b 就變成其上限 b 的一個函數。我們應當搞清楚這個函數的性質。為此目的，我們以 x 表示定積分 I_a^b 的上限 b ，就是令 $b = x$ ，然後研究以變量 x 為上限的定積分 I_a^x 。

因為按照定積分 I_a^b 的原義，我們有等式：

$$I_a^b = f(b) - f(a)，$$

式中 $f(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的任何一個原函數——是任意選擇的，所以在該等

式中令 $b=x$, 即得

$$I_a^x = f(x) - f(a).$$

因此, 取這個等式兩邊對 x 的導數, 即得

$$\frac{dI_a^x}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - \frac{df(a)}{dx} = \Phi(x) - 0 = \Phi(x).$$

因此, 以變量 x 爲上限的定積分 I_a^x , 是 $\Phi(x)$ 的一個原函數。當 $x=a$ 時, 這個原函數等於零, 因爲:

$$I_a^a = f(a) - f(a) = 0.$$

由前面所述各點, 即知: 定積分 I_a^x , 是 $\Phi(x)$ 的所有原函數中在 a 點等於零的一個唯一的原函數。

表達式

$$I_a^x + C,$$

(式中 C 是任意常量), 顯然是 $\Phi(x)$ 的不定積分; 因爲當 C 變化時, 它給出了 $\Phi(x)$ 的所有的原函數。

當 C 給定時, 式子 $I_a^x + C$ 給出了在 $x=a$ 點等於 C 的原函數。

§4. 關於計算定積分的、積分學的基本定理

在前節中我們看到, 函數 $\Phi(x)$ 在上下限 a, b 之間的定積分 I_a^b 等於 $\Phi(x)$ 的任意一個原函數 $f(x)$ 的增量 $f(b) - f(a)$, 因此它實際上與原函數沒有關係, 而只依賴於導函數 $\Phi(x)$ 與上下限 a 及 b 。可是, 定積分 I_a^b 對於函數 $\Phi(x)$ 及數 a 與 b 的這個依賴關係, 是非常隱蔽的, 因此, 積分學首先要指出: 爲了求定積分

$$I_a^b = f(b) - f(a), \quad (1)$$

應對線段 $[a, b]$ 及該線段上的連續函數 $\Phi(x)$ 作什麼運算。

乍看起來, 這樣直接從線段 $[a, b]$ 及函數 $\Phi(x)$ 求定積分 I_a^b 是很容易的, 因爲這只要應用拉格蘭日的中值定理(第一冊, §149) 寫出下面的等式就行了:

$$f(b) - f(a) = (b-a)\Phi(\xi), \quad (2)$$

式中 ξ 表示某個介於 a 和 b 之間的數(圖 1)。



圖 1.

但是,爲了知道等式(2)右邊的數值,那我們應當知道中值 ξ 的準確位置。然而中值定理並沒有告訴我們這點,它只告訴我們 ξ 是在線段 $[a, b]$ 兩端之間的某一處而已。

爲了減輕 ξ 點在線段 $[a, b]$ 上的不定性,我們將這個線段分爲 n 個小線段,同時對於每一個這種小線段,都施用一次中值定理。照下面的方式來做。

首先,在這線段 $[a, b]$ 上畫一些分點。這些分點都預先取好,是已知的,共有 $n-1$ 個。由 a 到 b , 依次用 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}$ 記它們。爲了使討論的形式一致起見,以 x_0 表示開頭的一點 a , 以 x_n 表示末點 b 。

這樣,最左邊的一個線段 $[a, x_1]$, 稱爲初始線段; 隨後的線段 $[x_1, x_2]$ 稱爲第一個; 它後面的線段 $[x_2, x_3]$ 稱爲第二個; 等等, 依此類推。一般說來,線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 稱爲第 i 個線段; 最後的一個線段 $[x_{n-1}, b]$ 稱爲第 $n-1$ 個線段(圖 2)。



圖 2.

假若,在線段 $[a, b]$ 上,由 a 點到 b 點,我們把 x_i 當作初值, x_{i+1} 當作新值,那麼,差 $x_{i+1} - x_i$ 就應當稱作橫坐標 x_i 的增量,並應以 Δx_i 記之;就是說,應寫下面的等式:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i, \quad (3)$$

其中 i 可以是 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 中的任意一個數。另一方面, 差 $x_{i+1} - x_i$ 顯然等於線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 的長; 因此, Δx_0 是初始線段的長, Δx_1 是第一個線段的長, Δx_2 是第二個線段的長, 等等, 一直到最後一個線段, 它的長是 Δx_{n-1} 。

現在, 中值定理給出了下面的許多等式:

對於初始線段:

$$f(x_1) - f(a) = (x_1 - a)\Phi(\xi_0) = \Phi(\xi_0) \cdot \Delta x_0.$$

對於第一個線段:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_1) \Delta x_1.$$

對於第二個線段:

$$f(x_3) - f(x_2) = (x_3 - x_2)\Phi(\xi_2) = \Phi(\xi_2) \cdot \Delta x_2.$$

.....

對於第 i 個線段:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i)\Phi(\xi_i) = \Phi(\xi_i) \Delta x_i.$$

.....

對於第 $n-1$ 個線段:

$$f(b) - f(x_{n-1}) = (b - x_{n-1})\Phi(\xi_{n-1}) = \Phi(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1},$$

式中 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}$ 都是一些不知道的點, 各位於初始, 第一, 第二, $\dots$, 第 i , 第 $n-1$ 個線段上。

把上面的等式都加起來, 我們得到:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \Phi(\xi_0)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1)\Delta x_1 + \Phi(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + \Phi(\xi_i)\Delta x_i + \\ &\quad + \dots + \Phi(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

讀者應當看到, 雖然這個等式是完全準確的, 可是, 就我們為計算未知量 $f(b) - f(a)$ 這個最終目的來說, 它完全不適用; 因為我們並不知道中值 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \xi_{n-1}$ 在其對應線段上的位置。我們只不過依據中值定理把這些中值寫了寫而已。

假若我們現在取仍然在各個線段之內的另外一些點 $\xi_0^*, \xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_i^*, \dots, \xi_{n-1}^*$, 來代替那些我們不知道的點 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}$ 那麼就沒有任何理由期待: 形式類似的和:

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_i^*)\Delta x_i + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1} \quad (5)$$

是恰好等於 $f(b) - f(a)$ 的。然而, 我們可以計算這個新的和與 $f(b) - f(a)$ 究竟差多少。

事實上, 寫出差式

$$[f(b) - f(a)] - [\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_i^*)\Delta x_i + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}] \quad (6)$$

後, 我們看到, 它可以從等式 (4) 的兩邊減去和式 (5) 而得到; 就是說, 這個差是等於下面的表達式的:

$$[\Phi(\xi_0) - \Phi(\xi_0^*)]\Delta x_0 + \dots + [\Phi(\xi_i) - \Phi(\xi_i^*)]\Delta x_i + \dots + [\Phi(\xi_{n-1}) - \Phi(\xi_{n-1}^*)]\Delta x_{n-1} \quad (7)$$

爲了要估計這個表達式的數值, 我們注意: 兩個點 ξ_i 及 ξ_i^* 都是在線段 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的。函數 $\Phi(x)$ 是假定在線段 $[a, b]$ 上連續的。這意味着, 對每一個任意小的正數 ε , 恆存在這種正數 η , 使得, 當不等式,

$$|\Phi(x'') - \Phi(x')| < \varepsilon, \quad (I)$$

成立時, 下面的不等式即成立:

$$|x'' - x'| < \eta. \quad (II)$$

由此而知, 假若 $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ 這些線段之中, 最大的一個之長小於 η 的話, 則對於每一個 i , 都有不等式

$$|\xi_i - \xi_i^*| < \eta, \quad (II^*)$$

因此, 就必然有對於一切 i 值都成立的不等式

$$|\Phi(\xi_i) - \Phi(\xi_i^*)| < \varepsilon, \quad (I^*)$$

由不等式 (I^*) 即知, 表達式 (7) 的絕對值不能超過下面的和:

$$\varepsilon \Delta x_0 + \varepsilon \Delta x_1 + \dots + \varepsilon \Delta x_i + \dots + \varepsilon \Delta x_{n-1},$$

而這個和顯然等於 $\varepsilon(b-a)$ 。當 ε 的極限是零時, 它是一個無窮小; 這

表示了差式(6)必定是個無窮小量, 由此而知: $f(b) - f(a)$ 是和式(5)的極限。

這樣, 我們就得到了最重要的一個定理:

積分學的基本定理. 設函數 $\Phi(x)$ 是在所給線段 $[a, b]$ 上連續的, 具有原函數 $f(x)$ 。我們將該線段分為 n 個小線段, 其長各為 $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}$, 又在每一個小線段上任取一點: $\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*$ 。則當小線段的數目無限增加, 而且每一個小線段的長都趨近於零的時候, 差 $f(b) - f(a)$ 就是下面的和的極限:

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}. \quad (5)$$

從這個積分學基本定理, 可推出下面的求定積分的一般法則。

爲了求線段 $[a, b]$ 上所給連續函數 $\Phi(x)$ 的定積分 I_a^b , 我們應按下面幾個步驟來做。

第一步 把線段 $[a, b]$ 分為 n 個小線段, 其長各為 $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$ (按從 a 到 b 的次序)。

第二步 在每一個小線段上, 各任意選擇一點: $\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_{n-1}^*$ 。

第三步 對於每一個小線段 $[x_i, x_{i+1}]$, 都做一個乘積 $\Phi(\xi_i^*)\Delta x_i$, 這就是所給函數 $\Phi(x)$ 在所取點 ξ_i^* 處的數值乘上該線段的長 Δx_i 。把這 n 個乘積都加起來得:

$$\Phi(\xi_0^*)\Delta x_0 + \Phi(\xi_1^*)\Delta x_1 + \dots + \Phi(\xi_{n-1}^*)\Delta x_{n-1}. \quad (5)$$

第四步 當 n 無限增加, 並且 Δx_i 中最長的一個趨近於零的時候, 求這樣做成的 n 個乘積的和的極限。這個極限就是所要求的定積分 $I_a^b = f(b) - f(a)$ 。

§5. 積分學的基本運算的特徵、定積分與不定積分的記號。

我們都知道, 一般微分法則(第一冊 §60)分為四個步驟; 其中前三個步驟的目的, 只在於建立 Δx 爲有限時的表達式 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 只有第四個步