材料力学

下册

成都科技大学　昆明工学院
云南工学院　四川工业学院
合编

成都科技大学出版社

材 料 力 学

下 册

成都科技大学　昆明工学院
云南工学院　四川工业学院　合编

成都科技大学出版社

一九八八年十二月

本书系参照国家教育委员会1986年 1月颁发的高等工业学校材料力学课程教学基本要求，编写的适于70至100学时用的《材料力学》教材。全书分上、下两册。上册包括概论、轴向拉伸与压缩、材料的力学性质、扭转、梁的内力、梁的应力、梁的变形、平面图形的几何性质。下册包括应力状态理论和强度理论、组合变形、连接件的实用计算、能量法与超静定系统、压杆稳定、动载荷、交变应力。书中带•号的部分供选读。

本书除作为本科生教材外，还适于夜大和职工大学等选作教材，并可供工程技术人员参考。

材料力学（下）

成都科技大学　昆明工学院
云南工学院　四川工业学院　合编

成都科技大学出版社出版、发行
四川省新华书店经销
简阳县美术印制厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 6.6875
1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷
印数：1-9000 字数：145千字

ISBN7-5616-0272-3/TB•15（课）

定价：1.38元

下 册 目 录

第八章 应力状态和强度理论

§8-1 应力状态的概念

一、一点的应力状态

确切地说明一个应力需要四个要素：应力作用点的位置；过该点所作截面的方向；应力的类型（正应力还是剪应力）；该应力的代数值。一般情况下，构件的不同点处有不同的应力；过一点不同的截面上有不同的应力。所谓一点的应力状态，就是指过一点各个截面上的应力情况。用应力状态的理论可以完整地描述构件上一点处的应力。

二、研究应力状态的目的

在拉压、扭转两章中，我们建立了强度条件

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] \ ; \ \tau_{max} \leqslant [\tau]$$

式中的σ_{max}、τ_{max}都是指构件横截面上的最大工作应力，这样的强度条件是直接利用它们的实验结果建立起来的。然而，事实上构件的破坏并不一定都发生在横截面上。例如，在低碳钢拉伸试验中，试件屈服时(一种破坏现象)，与轴线成45°的方向出现滑移线；铸铁压缩时，试件在与轴线约为45°的斜面上发生破坏；铸铁扭转时，破坏断口是与轴线成约为45°的螺旋面。显然，单由横截面上的应力是无法说明这些破坏现

象的，还需要知道斜截面上的应力情况。对于受力比较复杂的构件，横截面的某些点上同时受到正应力和剪应力的作用，为了解决复杂受力构件的强度计算问题，分析各种破坏现象，就必须应用应力状态理论，它不仅是复杂受力构件强度计算的理论基础，而且在材料强度科学实验、应力分析、断裂力学等许多学科中，都要广泛应用应力状态的理论和有关结论。

三、研究一点应力状态的方法

为了表示一点应力状态，通常总是围绕所讨论的点截取一个正六面体，称之为单元体。当截取的单元体的边长充分小时，它便趋于宏观构件上的“点”。因此单元体上的应力状态就代表构件上一点的应力状态。由于单元体尺寸极小，在忽略高级微量的情况下，可以认为：在它的每个面上的应力都是均匀的，相对平行面上的同类应力大小相等而方向相反。例如，围绕图8-1（a）所示拉伸构件的A点，用横向截面和纵向截面截取的单元体，只有左、右两个横截面上有正应力，$\sigma_x=F/A$，其它上、下、前、后四个面上都没有应力。用类似的方法，由图8-1（b）所示的梁的B和B'点处截取的单元体，也只有两个横截面上有正应力，$\sigma_x=My/I$。又如，圆轴扭转时，若在轴表面C点处截取一个单元体，则横截面上有剪应力，$\tau_x=M_n/W_p$，根据剪应力互等定理，在两个通过轴线的纵向平面（上、下面）上有剪应力$\tau_y=\tau_x$，方向如图8-1（c）所示，另两个环向截面（前、后面）上则没有应力。图8-1（d）表示一个同时产生弯曲和扭转变形的圆杆，若在D点截取一个单元体，则两个横截面上有弯曲产生的正应力σ_x和扭转产生的剪应力τ_x，纵向截面上有$\tau_y=\tau_x$，而环向截面上没有剪力。当上述各单元体侧面上的应力均为

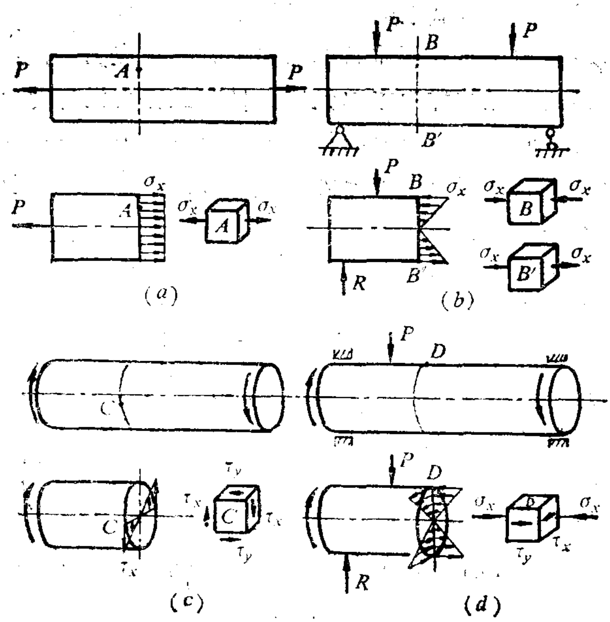


图8-1

已知，这样的单元体称为原始单元体。研究一点的应力状态，首先要从构件的一点处正确截取一个原始单元体，这是关键的第一步，由于前几章中对横截面上的应力分布已研究较多，因而一般情况下，原始单元体是用三对正交截面截取的。在下一节中，我们将从原始单元体出发，再使用截面法，研究其它截面上的应力，这就是研究应力状态的单元体分析法。

四、主应力、应力状态的分类

在一般情况下，由构件中一点处截取的单元体的三对互相垂直的截面上，既有正应力又有剪应力，但可以证明，在

该点处以不同方位截取的诸单元体中，必可找到一个特殊的单元体，它的三对互相垂直的截面上只有正应力而没有剪应力，这样的单元体称为主单元体。只有正应力没有剪应力的面称为主平面，主平面上的正应力称为主应力。根据主应力的情况，可以将应力状态分为单向应力状态（三个主应力中只有一个不为零）、二向应力状态（有两个主应力不为零）和三向应力状态（三个主应力均不为零）。轴向拉压杆件上的各点都是单向应力状态，材料力学中所研究的杆件，除了有单向应力状态外，一般为二向应力状态。在滚珠轴承中，滚珠与内、外套圈接触点处的应力状态乃是三向应力状态的实例，如图8-2所示。

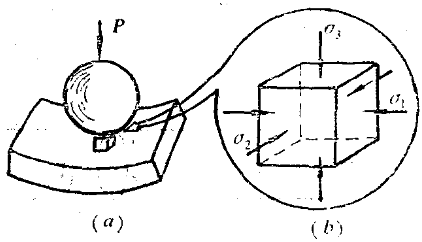


图8-2

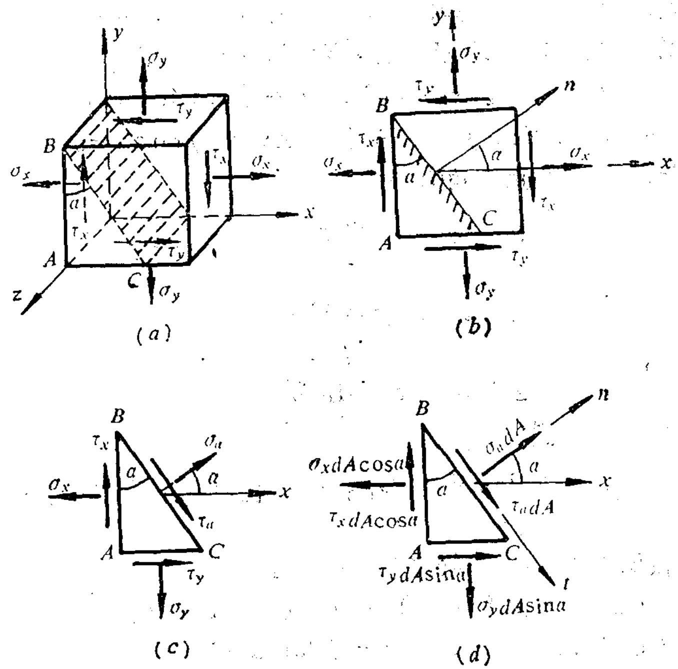
有时将单向应力状态称为简单应力状态，将二向和三向应力状态统称为复杂应力状态。

通常规定，用σ_1、σ_2和σ_3表示三个主应力，并按它们代数值的大小顺序排列，即规定$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$。

§8-2 二向应力状态分析

一、斜截面上的应力

二向应力状态又称为平面应力状态。图8-3（a）所示原始单元体是平面应力状态的最一般情况。已知与x轴垂直的平面（简称x面）上有正应力σ_x和剪应力τ_x；y面上有正应力



8-3

σ_y和剪应力τ_y。由剪应力互等定理知$\tau_y=\tau_x$，因此τ_y不是一个独立量，一个平面应力状态只需要三个应力分量即可表示。现在求单元体上平行于z轴的任意斜截面上的应力。

该单元体的正投影可用图8-3（b）表示，图中任意斜截面BC的外法线与x轴的夹角以α表示，BC简称为α面。为求α面上的应力，假想沿此截面将单元体截开，取图8-3(c)所示的楔形体ABC为研究对象，在α面上作用着正应力σ_α和剪应力τ_α。设斜截面的面积为dA，则AB面的面积为$dA\cos\alpha$；AC面的面积为$dA\sin\alpha$。将各面上的应力乘以作用面积后，可

得楔形体上各合力素，如图8-3（d）所示。以n轴和t轴为参考坐标轴，由n方向的平衡条件$\Sigma N=0$，得

$$\sigma_\alpha dA-(\sigma_x dA\cos\alpha)\cos\alpha+(\tau_x dA\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$-(\sigma_y dA\sin\alpha)\sin\alpha+(\tau_y dA\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

注意到$\tau_y=\tau_x$，并用三角恒等式

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha&=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\\ \sin^2\alpha&=\frac{1-\cos2\alpha}{2}\\ 2\sin\alpha\cos\alpha&=\sin2\alpha\end{aligned}\right\}$$

代入前式，可得到

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha \qquad (8\text{-}1)$$

同理，根据t方向的平衡条件$\Sigma T=0$，有

$$\tau_\alpha dA-(\sigma_x dA\cos\alpha)\sin\alpha-(\tau_x dA\cos\alpha)\cos\alpha$$
$$+(\sigma_y dA\sin\alpha)\cos\alpha+(\tau_y dA\sin\alpha)\sin\alpha=0$$

经类似的简化后，可得

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha \qquad (8-2)$$

（8-1）式和（8-2）式即为斜截面上的应力公式，利用它们可以由原始单元体的已知应力σ_x，σ_y和τ_x求得任意斜截面上的正应力σ_α和剪应力τ_α。

利用（8-1）、（8-2）式进行计算时，应当注意应力和转角都是代数值，它们的符号规定为：正应力以拉应力为正，压应力为负，剪应力对单元体内任一点之矩作顺时针转向时为正，反之为负；α角从x轴以逆时针方向转至斜截面的外法线n时为正，反之为负。图8-3中σ_x、σ_y、τ_x、σ、

τ_x和α角均表示在正方向，而τ_y则为负方向（若按建立公式时的一般规定，也将τ_y画在正方向，则剪应力互等定理应当表示为$\tau_y=-\tau_x$）。

二、求斜截面应力的图解法

（8-1）、（8-2）两式表明，σ_α和τ_α均随α而变，因而它们之间必存在某种函数关系，只要消去参数α，即可得到这种关系。将（8-1）、（8-2）式改写为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}&=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha\\ \tau_\alpha&=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha+\tau_x\cos2\alpha\end{aligned}\right\}\quad\text{(a)}$$

把以上两式等号两边平方，然后两式相加，得

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2\quad\text{(b)}$$

若以σ为横坐标，τ为纵坐标，则（b）式是一个以σ_α和τ_α为

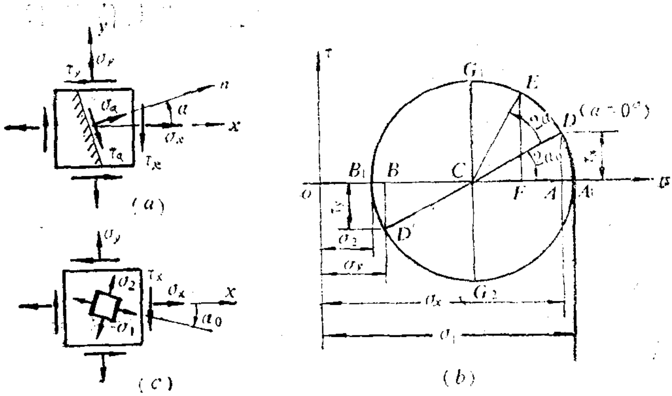


图8-4

变量的圆周方程，其圆心坐标为（$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$，0）；圆的半径为$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$。此圆称为应力圆（或称莫尔应力圆）。

现以图8-4(a)所示的原始单元（同于图8-3(b)）为例，说明应力圆的作法以及如何由应力圆求斜截面上的应力。

1．按适当比例画出σ—τ坐标轴。

2．由原始单元体x面上的一对应力σ_x和τ_x，在σ—τ坐标系中画出D点，即$\overline{OA}=\sigma_x$，$\overline{AD}=\tau_x$；同样，由y面上的一对应力σ_y和τ_y（$=-\tau_x$）画出D'点。

3．连接DD'与横坐标交于C点，以C为圆心，$\overline{CD}$为半径作圆，此圆即为单元体的应力圆。

4．欲求外法线与x轴夹角为α的斜截面上的应力时，在应力圆上从D点（它代表$\alpha=0°$的x面上的应力）开始，按α的转向，沿圆周旋转圆心角2α至E点的纵横坐标值就代表α斜截面上的应力。证明如下

$$\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

$$\overline{CA}=\frac{\overline{OA}-\overline{OB}}{2}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$$

$$\overline{CE}=\sqrt{\overline{C}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=\overline{CD}$$

E点的横坐标

$$\overline{OF}=\overline{OC}+\overline{CE}\cos(2\alpha_0+2\alpha)$$

$$=\overline{OC}+\overline{CF}\cos2\alpha_0\cos2\alpha-\overline{CE}\sin2\alpha_0\sin2\alpha$$

$$=\overline{OC}+(\overline{CD}\cos2\alpha_0)\cos2\alpha-(\overline{CD}\sin2\alpha_0)\sin2\alpha$$

$$=\overline{OC}+\overline{CA}\cos2\alpha-\overline{AD}\sin2\alpha$$

$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha=\sigma_\alpha$$

E点的纵坐标

$$\overline{EF}=CE\sin(2\alpha_0+2\alpha)$$

$$=\overline{CD}\sin2\alpha_0\cos2\alpha+\overline{CD}\cos2\alpha_0\sin2\alpha$$

$$=\overline{AD}\cos2\alpha+\overline{CA}\sin2\alpha$$

$$=\tau_x\cos2\alpha+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha=\tau_\alpha,$$ 证毕。

应力圆与单元体之间有如下关系：

1．应力圆上任一点的坐标值唯一地对应着单元体内某一截面上的正应力和剪应力。例如，D点的坐标值代表x面上的应力；D'点的坐标值代表y面上的应力；E点的坐标值代表α面上的应力等等。这就是应力圆与单元体之间的“点面对应”关系。

2．当单元体上的截面旋转时，应力圆上的点也按同一方向旋转；单元体上的截面旋转α角时，则应力圆上的点将旋转2α圆心角。这就是单元体与应力圆之间的“转向相同、转角两倍”关系。

三、由应力圆得到的结论

1．利用应力圆可以很方便地确定主应力大小。应力圆上A_1及B_1两点的横坐标为最大和最小值、且纵坐标值皆等

于零，因此这两点的横坐标值即代表主平面上的主应力。由图8-4(b)得

$$\overline{OA_1}=\overline{OC}+\overline{CA_1}=\overline{OC}+\overline{CD}$$

$$\overline{OB_1}=\overline{OC}-\overline{CB_1}=\overline{OC}-\overline{CD}$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} \tag{8-3}$$

(8-3)式即为求主应力大小的解析式。

2．主平面的方位也可以从应力圆上确定。在应力圆上由D点到A_1点所对圆心角为顺时针方向的$2\alpha_o$，则在单元体中由x轴也按顺时针方向但只转α_o角，这就确定了σ_1所在主平面的法线方向；在应力圆上由A_1到B_1所对圆心角为180°，则在单元体中σ_1和σ_2方向间的夹角为90°，即两个主平面互相垂直，如图8-4(c)所示。

由几何关系可知

$$tg2\alpha_o=-\frac{\overline{AD}}{\overline{CA}}$$

即
$$tg2\alpha_o=-\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{8-4}$$

(8-4)式右边的负号是因为此时的$2\alpha_o$以D点为基准为顺时针方向，按转角的符号规定应为负值。(8-4)式即为求　应力方向的解析式，满足该式可以求出相差90°的两个角度，即α_o和$\alpha_o\pm90°$，它们分别代表σ_1和σ_2方向。仅用解析式进行计算时，哪个角度代表σ_1方向，哪个角度代表σ_2方向尚须加以判别。可以把求得的两个角度分别代入(8-1)式以确定σ_1对应什么角，σ_2对应什么角。或者用x面上的剪应力τ_x的指向加以判别：τ_x指向哪个象限，则σ_1必在该象限内，

并与σ_x和σ_y二者中较大的一个应力靠近，即σ_1与此应力成小于45°的夹角（见图8-4(c)）。

3．由应力圆可确定最大和最小剪应力及其所在面的方位。最大和最小剪应力在数值上都等于应力圆的半径，

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \qquad (8-5)$$

(8-5)式即为求最大、最小剪应力的解析式，由应力圆可知，它们所在面的法线与主平面法线成±45°角。

例8-1 图8-5（a）所示原始单元体上的应力均为已知，应力的单位为MPa。试分别用解析法和图解法求：

（1）$\alpha=-30°$截面上的应力；

（2）主应力及主平面的方位；

（3）最大剪应力。

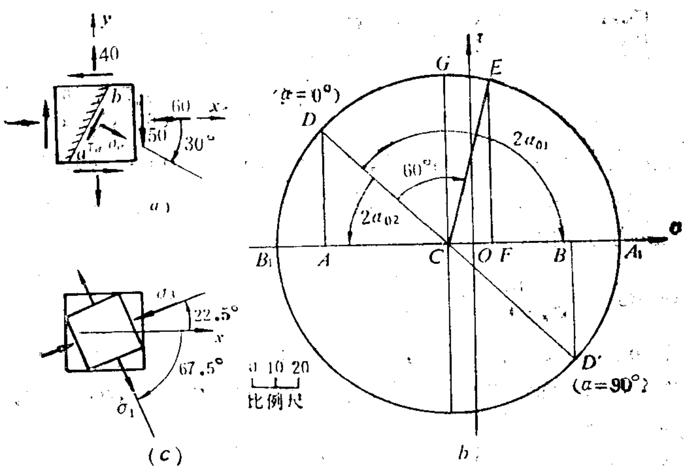


图 8-5

解： 用解析法求解

（1）由原始单元体已知$\sigma_x=-60$MPa，$\tau_x=50$MPa，$\sigma_y=40$