本书共分六章：行列式

式、线性中间与

线性代数内容、方法与练习

電子工業出版社

线性代数内容、方法与练习

吴声钟　主编

電子工業出版社

编者的话

当前科学技术，经济管理的各个领域中都在广泛地运用许多新的数学方法，“线性代数”就是其中重要工具之一，目前高等工科院校、财经院校、电大、各类成人教育的教学计划中都将线性代数列为必修课程，许多工程技术人员、自学青年也在学习线性代数，但由于它较抽象，这就给初学者带来了不少困难，尤其是做练习时感到困难较多，甚至对某些题常感到无从下手。为此，本书试图通过对每节内容的简要连贯叙述，用较多的例题和习题并注意分析和小结典型题的解题思路，帮助读者理解基本概念，掌握基本方法，提高分析问题和解决问题的能力。

本书由吴声钟主编。苏智贤编写本书第一、三章。我们在编写本书的过程中，曾学习、参考了兄弟院校老师们编写的有关书籍，并得到北京广播学院数学教研室韩焕堂教授热忱的帮助，他为本书提出了许多宝贵意见并认真、仔细地审阅了全书，还亲手演算过其中的全部练习题，我们谨在此表示衷心的感谢。限于编者水平与经验，书中定有很多不足、不妥、甚至错误之处，恳请读者批评指正，以便今后进一步修改。

编　者 1985·1

目　录

第一章　行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，所以我们首先向大家介绍行列式．主要讨论以下三个问题：

1）n级行列式的概念；

2）行列式的性质及计算方法；

3）克莱姆（Cramer）法则．

n级行列式的定义与计算是本章的难点，n级行列式的计算是本章的重点．

§1.1　二级和三级行列式

行列式的概念来源于解线性方程组。下面将给出二、三级行列式的定义以及如何引用行列式的记号来表示二、三元线性方程组的解．

一、二级行列式

二级行列式的定义：记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

我们称这样规定的$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为二级行列式，其中横向为行，纵向为列。

应用二级行列式解线性方程组：如果二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-2}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

那么这个方程组有唯一解

$$x_1=D_1/D, \qquad x_2=D_2/D \tag{1-3}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

小结　D_1（或D_2）是用式（1-2）中等号右边的常数项代替D中的第一（或第二）列而得。

二、三级行列式

三级行列式的定义：记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-4}$$

称等式（1-4）的左边为三级行列式，其中横向为行，纵向为列.

应用三级行列式解三元线性方程组：如果三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-5}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么这个方程组有唯一解

$$x_1=D_1/D, \quad x_2=D_2/D, \quad x_3=D_3/D \tag{1-6}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

小结 D_1、D_2、D_3分别是用式(1-5)中等号右侧一列常数代替D中的第一列、第二列、第三列而得.

例1 计算三级行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1\times3\times2+2\times1\times3+3\times2\times1 \\ &\quad -3\times3\times3-2\times2\times2-1\times1\times1 \\ &=-18\end{aligned}$$

例2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-3x_2-4x_3=-10 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-28\neq 0,\qquad D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -10 & -3 & -4 \end{vmatrix}=-28$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -10 & -4 \end{vmatrix}=-28,\qquad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -10 \end{vmatrix}=-56$$

所以

$$x_1=D_1/D=1,\quad x_2=D_2/D=1,\quad x_3=D_3/D=2$$

一般地，对于含n个未知量的n个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-7}$$

是否也能这样求解呢？它的解是否也能类似地用“n级”行列式来表达呢？首先遇到的问题是如何定义n级行列式．我们从分析三级行列式的结构出发，找出其内在规律，根据这些规律来定义n级行列式．

现在我们来分析（1-4）的结构：

1．首先，（1-4）中各项都是三个元素的乘积，这三个元素各自取于不同的行和不同的列上。于是，（1-4）中的任意项可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$其中$j_1j_2j_3$是1，2，3的一个排列．

2．（1-4）中各项不是正号便是负号，这是根据什么原则确定的呢？

3．因为1，2，3共有3！=6个不同的排列，所以（1-4）是六个项的代数和．

要根据这些规律来定义n级行列式，问题便归结为怎样确定行列式各项的正负号．为此需要用到关于排列的更多一些的知识，这些将在§1.2中介绍．

习　题　1.1

1．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$； 38　　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$； -49

（3）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$；　　　（4）$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$．

2．解三元线性方程组：

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

§1.2　排列

为了引进n级行列式的概念，先来讨论一下排列的性质．

一、　关于排列的一些定义

定义1　由$1,2,\cdots,n$组成的一个有序数组称为一个**n元排列**．

定义2 在一个排列中，如果一个大数排在一个小数之前，就称这两个数组成一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**。用$\tau(a_1a_2\cdots a_n)$表示排列$a_1a_2\cdots a_n$的逆序数.

定义3 逆序数是偶数的排列称为**偶排列**;逆序数是奇数的排列称为**奇排列**.

定义4 把一个排列的某两个数互换位置，而其余数不动，就得到另一个排列，这样一种变换称为**对换**.

二、主要结论

定理1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说，偶排列经过一次对换变成奇排列，而奇排列经过一次对换变成偶排列.

定理2 在全部n元排列中，偶排列和奇排列各占一半，都是$n!/2$个（$n\geq 2$）.

定理3 任意一个n元排列都可以经过一些对换变成自然顺序，而且所作对换的次数与这个排列具有相同的奇偶性.

例1 写出所有的3元排列.

解 自然数1,2,3组成的有序数组共有下列六个：

123，132，213，231，312，321这就是全部的3元排列.

由例1可见：3元排列共有3! 个，一般地，n元排列一共有$n!$ 个.

例2 求5元排列45132的逆序数.

解 构成逆序的数对共有41，43，42，51，53,52,32等7对，因此$\tau(45132)=7$.

小结 要从例2学会求任一n元排列逆序数的方法，如例

2首先看排在第一位的数4与后面的所有数构成的逆序有3个（也就是说4后面比它小的数有3个），其次看排在第二位的数5与它后面的所有数构成的逆序有3个，往后依此类推，直至倒数第二个数为止，最后将这些逆序个数相加，就得到这个排列的逆序数．即

$$\tau(45132)=3+3+0+1=7$$

用类似的方法可求出任一n元排列的逆序数．

例3 求n元排列$123\cdots n$的逆序数．

解 由于这个排列是按自然顺序排列的，其中任一对数都不构成逆序，因此$\tau(12\cdots n)=0$．

n元排列$123\cdots n$称为n元自然顺序排列，它是一个偶排列。

例4 求n元排列$n(n-1)\cdots 321$的逆序数．

解 因为在这个排列中，n后面比它小的数有$n-1$个，$(n-1)$后面比它小的数有$n-2$个，…，3后面比它小的数有2个，2后面比它小的数有1个，所以

$$\begin{aligned}\tau(n(n-1)\cdots 321)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=n(n-1)/2\end{aligned}$$

例5 讨论$\tau(n(n-1)\cdots 321)=n(n-1)/2$的奇偶性．

解 显然当$n=4K$或$4K+1$时，这个排列是偶排列．当$n=4K+2$或$4K+3$时，这个排列是奇排列．

例6 选择i与k，使

（1）$1274i56k9$成偶排列；

（2）$1i25k4897$ 成奇排列．

解 （1）在排列 $1274i56k9$ 中缺数码3，8，于是令$i=3$，$k=8$，得127435689．

此排列逆序数为5，故为奇排列．但由于对换改变排列的奇

偶性，故将上面排列中的3与8对换，记作(3，8)，即取$i=8$，$k=3$，得

$$127485639$$

为偶排列.

(2) 方法同上. 当$i=3$，$k=6$时.

$$1i25k4897 \quad 即 \quad 132564897$$

为奇列排.

例7 写出把排列12435变成25341的那些对换.

解 这种对换的步骤并不是唯一的. 例如

$$12435 \xrightarrow{(1,2)} 21435 \xrightarrow{(1,5)} 25431 \xrightarrow{(3,4)} 25341;$$

或 $$12435 \xrightarrow{(1,2)} 21435 \xrightarrow{(1,4)} 24135 \xrightarrow{(1,3)} 24315 \xrightarrow{(1,5)} 24351 \xrightarrow{(4,5)} 25341.$$

例8 试验证5元排列45132 经过一些对换变为自然顺序排列12345时所作对换的次数与这个排列具有相同的奇偶性。

解 如将$45132 \xrightarrow{(5,2)} 42135 \xrightarrow{(4,3)} 32145 \xrightarrow{(3,1)} 12345$.
所作对换次数是3与$\tau(45132)=7$都是奇数.

此例也验证了定理3.

习 题 1.2

1. 求下列各个排列的逆序数，并且指出它们的奇偶性：

(1) 21354；(2) 45132；(3) 654321；(4) 7654321；
(5) 87654321；(6) 98764321；(7) 12345678；
(8) 528496731.

2. 求下列排列的逆序数：

(1) $23\cdots(n-1)n1$ (2) $(n-1)(n-2)\cdots\cdots 21n$

3．写出把排列315462变成自然顺序排列的那些对换。

4．决定i与j使

(1)　$6i128j53$　为奇排列；

(2)　$i578214j$　为偶排列。
6　3

§1.3　n级行列式

现在我们就可以回答前面的问题了．按什么原则来确定三级行列式各项的正负号呢？在三级行列式的展开式（1-4）中，各项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-8}$$

其中$j_1j_2j_3$是1，2，3的一个3元排列。当$j_1j_2j_3$是偶排列时，对应的项在（1-4）中带正号，而当$j_1j_2j_3$是奇排列时则带负号．于是，项（1-8）前面所带的符号是$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$．

综上所述，三级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行、不同列的3个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-8}$$

的代数和，其中$j_1j_2j_3$是1，2，3的一个3元排列，当$j_1j_2j_3$是偶(奇)排列时，项（1-8）前面带正（负）号．即（1-4）式可以可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-9}$$

这里"Σ"是连加号，$\sum\limits_{j1j2j3}$ 表示把所有形如

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

的项加起来，其中$j_1j_2j_3$取遍所有三元排列.

依此可以给n级行列式下定义.

定义5 n级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-10}$$

是所有取自不同行、不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-11}$$

的代数和，其中$j_1j_2\cdots j_3$是一个n元排列，当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，项（1-11）前面带正号；当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时，项（1-11）前面带负号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j1j2\cdots jn}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-12}$$

式（1-12）称为n级行列式的表达式（或完全展开式），其中$\sum\limits_{j1j2\cdots jn}$ 表示当$j_1j_2\cdots j_n$取遍所有n元排列时把所得到的形如

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的项加起来．由于n元排列共有$n!$个，所以这样的项共有$n!$项.

例1 选择i与k，使

$$a_{1i}a_{32}a_{4K}a_{25}a_{53}$$

成为5级行列式中一个带负号的项.

解 可将给定的项改写成行标为自然顺序，即

$$a_{1i}a_{25}a_{32}a_{4k}a_{53}.$$

其列标所构成的排列为

$$i52k3.$$

若取$i=1$，$k=4$，则所得排列15243的逆序数为4，是偶排列，该项则带正号．由于对换改变排列的奇偶性，故取$i=4$，$k=1$时则该项带负号.

例2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 这是一个4级行列式，其展开式中应该有$4!=24$项，但是由于行列式中出现有很多零，所以有很多项都等于零，只要找出那些不等于零的项就可以了．因为行列式中一共只有4个不等于零的元素，而且这4个元素刚好位于不同行、不同列，所以这个行列式的展开式中只有一个项 $abcd$．这个项前面所带的符号需要由这4个元素的位置决定．将a，b，c，d按行的顺序排好，它们的列顺序依次是4，3，2，1．所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(4321)}abcd=abcd$$

小结 我们知道，在二、三级行列式中，反对角线（即从右上角到左下角这条对角线）上的元素连乘积所成的项前面是带负号的．这往往使我们得到一个印象，以为行列式中由反对

角线上的元素所成的项总是带负号的．但是例2告诉我们，在4级行列式中反对角线上的元素所成的项前面却是带正号，读者不妨自己总结一下，n 级行列式中由反对角线上的元素所成的项前面所带正负号的规律（其正负号是由 $(-1)^{n(n-1)/2}$ 决定的，参看§1.2例5）．

例3 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

象这种主对角线（即从左上角到右下角这条对角线）下方的元素全为零的行列式称为上三角形行列式．

解 根据定义，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3j_4} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} \times a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

这个行列式有不少元素是0，从而有很多项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$都等于零，我们只要把可能不为零的项找出来再相加就可以了．先从零最多的第4行开始考虑，当$j_4=1$，2，或3时，$a_{4j_4}=0$，从而相应的项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$都等于零，于是只有$j_4=4$这样的项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$可能不为零；在这种项里，$j_3$不能取4(因为要求元素取自不同列)，又$j_3=1$或2时，项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$等于零，因此，只有$j_3=3$这样的项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$可能不为零；同理可知，$j_2$只能取2，$j_1$也只能取 1，所以只有一项$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$可能不为零，其余所