复分析

郑建华 编著

清 华 大 学 出 版 社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

复 分 析

郑建华 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书共分 10 章，前 8 章配有一定量的习题，由于本书篇幅有限，有些重要的结论放在习题里. 本书系统地介绍了复变函数的基本知识和方法，并涉及到复变函数理论的最新发展，希望以此给读者打开一个进一步学习的窗口. 主要内容有：从度量的角度介绍了复数域和复平面；介绍了 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式，作为它们的应用讲解了 Laurent 级数、留数定理等内容；介绍了最大模定理及其相关的结论和 Nevanlinna 理论；介绍了函数正规族，尤其是解析函数和亚纯函数族正规定则；介绍了 Riemann 映照定理、共形映照的基本知识和单位圆盘上的单叶函数；围绕 Dirichlet 边值问题介绍了调和函数、调和测度和 Green 函数；介绍了整函数的 Weierstrass 乘积表示和 Mittag-Leffler 亚纯函数的主部分解；介绍了 Riemann 曲面的思想和基本知识，芽与层的 Riemann 曲面的构造；最后，介绍了双曲几何及其双曲度量原理.

本书内容丰富，逻辑严谨，循序渐进，可作为大学数学系、应用数学系本科生同名课程的教材，以及相关专业科系的研究生、教师的参考书，并可供相关专业的科技工作者阅读.

书　名：复分析
作　者：郑建华
出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研楼，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：人民文学印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168 1/32　印张：8.75　字数：224 千字
版　次：2000 年 3 月第 1 版　2000 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-01453-1/O・229
印　数：0001～4000
定　价：11.00 元

序　言

复变函数理论创立于 19 世纪，是那个世纪最独特的创造，到 20 世纪还在不断地发展，成为不仅是那个时代也是这个时代的一门优美的学科. 这个学科时常称之为函数论，被誉为那个世纪的数学享受. 我们在享受数学的美妙成果的时候，可能会忽略了创造这些成果的数学家们每迈出一步所付出的艰辛. 我们想简要回忆一下复变函数发展的历史，因为当我们了解一些这样的内容后，也许会更深一步地感受到它的魅力，增强对它的学习兴趣和研究勇气.

从 1776 年起，Euler 利用复函数来计算实积分值. 更早些时候，D'Alembert 在流体力学的研究中就用到复函数，而 Laplace 从 1782 年起像 Euler 那样，把实积分转换为复积分来计算实积分的值. 他们的分析工作是通过把复函数的实部和虚部分开来进行的，所以复函数还没有成为真正的基本实体. 这种情况还发生在 Gauss 身上. Gauss 在证明代数基本定理（见定理 3. 2. 4）时用到复数，他将涉及到的复函数分为实部和虚部. 到 1825 年，Gauss 还明确地说“$\sqrt{-1}$的真正奥妙是难以捉摸的”.

从所作的贡献来看，复变函数理论的奠基人是 Augustin-Louis Cauchy、Karl Weierstrass 和 Georg Friedrich Bernhard Riemann. Cauchy 是把复函数当作基本实体来研究的第一人. 他自 1821 年起，花了约 25 年，以导数和积分为出发点，发展了复变函数理论，在复函数有连续导数的情形下建立了 Cauchy 定理；引入了留数，建立了留数定理，并用留数来计算实积分等等. 到 1843 年，Alphonse Laurent 继续 Cauchy 的工作，建立了 Laurent 级数展开，这是 Taylor 级数展开的一个推广. 也许起初 Cauchy 研究复

函数时是考虑实积分的计算，但到后期他改变了这个观点，不再关心这种计算，而是转到复变函数理论本身的研究上，并建立了这个理论的基础. Weierstrass 则开辟了一条新的探索途径，在幂级数的基础上建立起解析函数理论以及解析开拓的方法（见节 9.2）等等. Riemann 于 1851 年在他的博士论文中研究了 Riemann 曲面上的共形映照，为共形映照的研究开辟了新的篇章. 他在论文的结尾给出了 Riemann 映照定理（见定理 6.2.1），虽然他的证明是不完整的，但这个定理给出了一般单连通区域间共形映照的存在性. 对于特殊的情形，Schwarz（1869 年）和 Christoffel（1867 年）给出了多边形区域到上半平面的共形映照的积分表示式（见定理 6.5.3）. 多值函数对我们来说是棘手的，然而我们经常不可避免地会遇到，例如在研究代数函数时就会遇到. Riemann 研究了多值函数，建立了 Riemann 曲面的概念（见第 9 章）. Riemann 曲面不仅是描绘多值函数的一个方法，而且在这个曲面上多值函数可单值化，并与 z 平面上的情形相对应. Lobatchevsky 和 Bolyai 在研究 Euclid 几何中的第 5 公理时，果敢地放弃了这条平行公理，而建立了一种非 Euclid 几何，后来 Klein 称其为双曲几何，而 Euclid 几何则称为抛物几何. 为了证明双曲几何的相容性，Poincare 给出了一个模型，这是几个模型中的一个. 通过模型，双曲几何的相容性归结为 Euclid 几何的相容性. Poincare 的模型可以通过单位圆盘上 Poincare 度量给出的度量几何来建立（见节 10.1）. Poincare 度量的一个重要性质是在共形映照下不变，在一般的解析映照下是缩小的，这就是 Poincare 度量原理（见节 10.2），因此这个度量在解析函数理论中也是重要的. 的确，Ahlfors 用超双曲度量导出了 Bloch 常数的一个下界. 数学家们花费了约半个世纪的时间才得到好于 Ahlfors 的界，但 Bloch 常数的精确下界至今仍是个未解决的问题.

20 世纪复变函数理论在各个方面都有全面的发展. Nevanlinna

引入了亚纯函数的特征函数，给值分布理论的研究带来了飞跃. Montel 给出了函数族正规性的概念以及一些基本正规族判别定则. 这些正规定则有许多应用，例如，应用于 Riemann 映照定理等一些经典定理的证明中；Fatou 和 Julia 通过函数迭代下的正规性创立了复动力系统理论. 到 80 年代，由于其它学科的相互渗透，以及本学科中一些重大问题的解决，同时又由于计算机图形化，复动力系统在国际上倍受关注. Bieberbach 在单叶函数研究的基础上，提出了单叶函数幂级数展开的系数估计的 Bieberbach 猜想（见定理 6.6.1）. 为证明这个重要的猜想，许多数学家付出了辛勤地努力，直到 1985 年才由法国数学家 de Brange 证明了这个猜想. 此外，多复变函数理论、拟共形映照理论、Teichmüller 理论、位势理论等都有了迅速地发展.

从复变函数理论的发展简史出发，作者以为可以更好地了解本书的内容和编排. 这本书是在清华大学试用过两次的同名讲义基础上进行重新修改编写而成的. 在编写中不仅没有放弃对计算训练的要求，而且强调复分析基本结论的严密推演. 作者以为后者对素质教育和数学理性的培养都是必要的，而且更能使读者掌握复分析的独特内涵. 我们还试图在介绍复分析基本内容的基础上，以拓宽学生的知识面，展示新知识为本书编写的原则. 本书篇幅不算长，但内容丰富，而且有一定的深度. 在现有的学时下，要教完本书似乎是困难的，可以在教学中针对学习的对象对本书的内容有所取舍. 考虑到这一点，在本书的编排上，我们把较难的定理或定理的证明放在一节中（如一般形式的 Cauchy 定理的证明）或一节或一章的最后，读者可以根据需要取舍. 为了使这种取舍不会影响内容的连贯性，我们对一些概念的定义作了适当的重复. 总之，对本书内容的取舍在教学和学习中不会有困难，这使得本书能够适应更多的读者. 的确，我们力图使得本书不仅是一本教科书，也是一本很好的参考书. 随着 21 世纪的到来以及我国提倡的科教兴

国，都对教育提出了更高的要求，希望本书的编写能为此做一点贡献.

复数及其代数运算的几何表示为复变函数理论建立了直观背景，为了与数学分析中所学的知识构成对照，本书从度量的角度来介绍复数域及其基本结论. 考虑到本书内容上的完善和连贯以及后面章节的需要，我们简要地介绍了拓扑空间和度量空间. 在这一章的教学中，可以讲解一些基本结论，而它们的证明可以根据情况来取舍. 我们用全书小一半的篇幅，介绍了 19 世纪中叶建立起来的复变函数的基本结论：Cauchy 定理、Cauchy 积分公式、Laurent 级数展开、留数定理、幅角原理、留数定理在实积分计算中的应用等. 这部分内容与高等数学中介绍的第二类曲线积分有一定的关系，例如，可以用 Green 公式证明具有连续导数的复函数的 Cauchy 积分定理. 本书的另一半篇幅主要介绍复解析函数所特有的进一步的基本结论，同时涉及到最新发展的一些结论和学科分支. 我们试图在打下良好的基础上，为读者打开一个进一步学习的窗口：在最大模定理后面介绍了 Nevanlinna 理论；介绍了正规族的基本结论之后用 Zalcman 的最新方法简明地讨论了正规族，并得到 Picard 大、小定理与 Montel 定理间的等价关系；在共形映照的后面介绍了单叶函数的基本结论；在初等 Riemann 曲面的后面进一步介绍了 Riemann 曲面的思想、概念和基本结论；以 Dirichlet 边值问题为主线，通过圆盘上的 Dirichlet 边值问题介绍调和函数的基本知识，通过一般的 Dirichlet 边值问题，介绍调和测度、Green 函数等，还以空间形式介绍调和函数的整体结构. 这些都是本书的特色. 本书定理的逻辑证明力图展示一些复分析处理问题的方法、思想和一定的技巧.

参考文献中所列的文献对本书的编写都有一定的影响，尤其是文献[1，4，11，14，20]和[21]对本书的编排有直接的影响. 书中插图的原图由我的妻子王健女士用计算机绘制，借此机会，向她表

示感谢，同时也感谢我的父母对我没完没了工作的支持. 我还要感谢清华大学基础科学班的同学们的协助. 最后，我要非常感谢清华大学出版社为本书的出版给予的支持和帮助. 由于本人的水平有限，在本书的选材和处理上，难免有不足和错误，敬请读者批评指正.

郑建华

1999 年 10 月 1 日于清华园

目　　录

第1章　度量空间和复数系统

本章主要讲解度量空间的基本概念及其性质，只要细心想一想，这些概念及由这些概念导出的结论，与我们在数学分析中关于实数域或者说实轴所形象地学到的概念和结论是相一致的. 这些从具体形象的事物出发思考抽象概念，是思维发展的飞跃. 本章的最后将以度量空间的形式引入复数系统. 复平面作为复数点构成的图形是特殊的度量空间，拥有由度量空间所引出的概念和结论，如连通性、完备性和紧性等. 这又将抽象的概念具体化，这是思维发展的要求.

1.1　点集拓扑基本知识

具有某种属性的事物的整体称之为集合. 集合中的事物除了是此整体中的一元之外是相互孤立的. 如果我们在孤立事物间建立一种关系，通过这种关系我们可以导出一个有趣的故事，甚至一个灿烂的世界. 在集合中的元素间的一个最最基本的联系上点集拓扑将建立起一个似乎稀奇古怪的大厦. 在这个大厦中浏览之后，我们会发现原来这个世界很奇妙，然而本节我们只能就这个大厦的根基谈一谈.

为方便起见，本章将约定用大写英文字母 $A,B,\cdots$ 表示集合，而用小写英文字母 $a,b,\cdots$ 表示集合中的元素，$\varnothing$ 表示空集. 我们假定读者对集合的基本符号、基本运算和运算法则是熟知的，这些内容在许多书中也都可查阅到.

如下是点集拓扑最基本的概念.

定义 1.1.1 设 X 为一集合，$\mathbb{F}$ 为 X 的某一子集族. $\mathbb{F}$ 称为 X 的一个拓扑，若下列各条件均成立：

(1) $\varnothing, X \in \mathbb{F}$；

(2) 对 $\forall A, B \in \mathbb{F}$，则 $A \cap B \in \mathbb{F}$；

(3) 对任意多个 $\mathbb{F}$ 中的元素之并，仍属于 $\mathbb{F}$，即设 J 为指标集，对 $\forall j \in J, G_j \in \mathbb{F}$，有 $\bigcup\{G_j; j \in J\} \in \mathbb{F}$；

此时称 $(X, \mathbb{F})$ 为拓扑空间，$\mathbb{F}$ 中的元素称为拓扑空间 $(X, \mathbb{F})$ 的开集.

下面列举一些拓扑空间的例子.

(1) $\mathbb{F} = \{\varnothing, X\}$ 就是 X 的一个平凡拓扑；

(2) 设有拓扑空间 $(X, \mathbb{F})$，$Y \subseteq X$，则

$$\mathbb{B} = \{A \cap Y; A \in \mathbb{F}\}$$

为 Y 的一个拓扑，称为由 $(X, \mathbb{F})$ 诱导出的拓扑，即 $(Y, \mathbb{B})$ 成为拓扑空间，故对 X 的任一个开集 A，$A \cap Y$ 为 Y 的开集. 为书写简明方便，将此拓扑记为

$$Y \cap \mathbb{F} := \{A \cap Y; A \in \mathbb{F}\};$$

(3) 设 $\mathbb{F}$ 为 X 的所有子集构成的族，则 $\mathbb{F}$ 为 X 的另一个平凡拓扑. 对这个拓扑，X 的任一子集都是开集；

(4) 实轴由开区间所生成的开集系统下成为拓扑空间. 我们将从度量空间中进一步了解这一点.

有了拓扑及开集的概念，我们可将许多在数学分析中熟知的概念，在拓扑意义下展示出来.

定义 1.1.2 $(X, \mathbb{F})$ 的子集 A 称为闭集，若 $X - A$ 为开集，即 $X - A \in \mathbb{F}$.

由摩根律，不难导出如下定理.

定理 1.1.3 任意多个闭集的交仍为闭集；有限闭集的并仍为闭集.

由此易知拓扑的概念完全可以由闭集来定义. 请读者将这个

定义写出来.

$(X,\mathscr{F})$的子集 N 称为 x 的一个邻域,若存在开集 O 使得 $x\in O\subseteq N$.

定义 1.1.4 设 A 是$(X,\mathscr{F})$的子集,p 称为 A 的极限点,若对 p 的任一邻域 N,都有 $N\cap(A-\{p\})\neq\varnothing$.

由定义 1.1.4,若 q 不是 A 的极限点,那么存在一个邻域 N_0,使得 $N_0\cap(A-\{q\})=\varnothing$,此时如果 $q\in A$,q 就称为 A 的孤立点.

定理 1.1.5 $(X,\mathscr{F})$的一个子集是闭集的充分必要条件是它包含所有自己的极限点.

证明 若 A 是$(X,\mathscr{F})$的闭集,则 $X-A$ 是$(X,\mathscr{F})$的开集.因 $X-A$ 是其中每个点的邻域,所以 $X-A$ 中没有一个点是 A 的极限点,即 A 包含了它自己的所有极限点.反之,设 A 包含了自己的所有极限点.对 $x\in X-A$,有 x 不是 A 的极限点,且 $x\notin A$,故存在 x 的一个邻域 N,使得 $N\cap A=\varnothing$,即 $N\subset X-A$,也就是 $X-A$ 是开集,从而 A 是闭集. □

定义 1.1.6 A 和它的所有极限点之并称为 A 的闭包,记为 $\overline{A}$.

由定理 1.1.5,可证 $\overline{A}$ 为闭集,具体证明留给读者.

推论 1.1.7 A 是闭集的充要条件是 $A=\overline{A}$.

定理 1.1.8 设 A 和 B 是$(X,\mathscr{F})$的子集,则(1) A 的闭包是包含 A 的最小闭集,即为包含 A 的所有闭集之交. (2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证明 (1) 已知 $\overline{A}$ 是闭集,且 $\overline{A}\supseteq A$.设 D 是包含 A 的闭集,A 的极限点必为 D 的极限点,即为 D 中的点,所以 $\overline{A}\subseteq D$,证得 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集.又因 $\overline{A}$ 是包含 A 的闭集中的一个,故 $\overline{A}$ 是包含 A 的所有闭集的交,而这个交又是包含 A 的闭集,所以恰好就是 $\overline{A}$.

(2) 因 $A\subset\overline{A}$,$B\subset\overline{B}$,所以有 $A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$,而 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 是闭集,

$\overline{A\cup B}$是包含$A\cup B$的最小闭集，故$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$.

另一方面，$A\subset\overline{A\cup B}$，$B\subset\overline{A\cup B}$，同样有

$$\overline{A}\subset\overline{A\cup B},\overline{B}\subset\overline{A\cup B},$$

故 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$，定理得证. □

拓扑空间$(X,\mathscr{F})$中的点 x 与$(X,\mathscr{F})$的子集之间的关系共有三种，由如下定义来描述.

定义 1.1.9 设 $x\in X$，$A\subseteq X$.

(1) x 称为 A 的内点，若 A 是 x 的一个邻域. A 的所有内点构成的集称为 A 的内部，记为 $\mathrm{int}A$；

(2) x 称为 A 的外点，若 x 为 $X-A$ 的内点. A 的所有外点构成的集称为 A 的外部，记为 $\mathrm{out}A$；

(3) x 称为 A 的边界点，若对 x 的任一个邻域 N，有 $N\cap A\neq\varnothing$且 $N\cap(X-A)\neq\varnothing$. A 的所有边界点构成 A 的边界，记为 ∂A；

从上述定义可知

$$\mathrm{int}A\cap\partial A=\varnothing,\ \mathrm{out}A\cap\partial A=\varnothing,\ \partial A=\partial(X-A),$$

即 A 的边界点也是 $X-A$ 的边界点，故 A 的边界点可以属于 A 也可以不属于 A，但 $\partial A=\overline{A}\cap\overline{(X-A)}$.

定义 1.1.10 称集 $A\subset X$ 在 X 上稠密，若 $\overline{A}=X$.

定理 1.1.11 A 在 X 上稠密的充要条件是对$\forall x\in X$ 及 x 的任一邻域 N，有 $N\cap A\neq\varnothing$，或者说若 $x\notin A$，则 x 必为 A 的极限点.

此定理的证明是简单的.

有理序对所构成的集合，即$\{(x,y);x,y\in Q\}$在平面上是稠密的.

有了拓扑下的开集系统，可以引入连续映照的概念.

定义 1.1.12 设 $f:(X,\mathscr{F})\to(Y,\mathscr{B})$为映照，即对$\forall x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)\in Y$ 与之对应. f 称为在 x 处连续，若对 y

$=f(x)$的任意给定的邻域 $U\subset Y$，存在 x 的邻域 $V\subset X$，使得 $f(V)\subset U$. f称为拓扑映照，若 f 是一一对应的，且是双方连续的，即 f 在 X 上和 f^{-1}在 Y 上都是处处连续的.

连续映照的定义可由数学分析中 ε-δ 语言定义的连续函数的概念提炼出来，后者是在度量下给出的. 如下定理对连续映照又作了更进一步的描述.

定理 1.1.13 映照 $f:(X,\mathscr{F})\to(Y,\mathscr{B})$是连续的，即在每点处连续的充要条件是对 Y 的任一开(闭)集 U 在 f 下的原像 $f^{-1}(U)$是 X 的开(闭)集.

这不难由定义 1.1.12 证得，具体证明留给读者.

1.2 连 通 性

从字面上，我们知道“连通”说的是什么，拓扑空间的连通性定义如下.

定义 1.2.1 拓扑空间$(X,\mathscr{F})$称为连通的，若不存在两个非空的互不相交的开集 A 和 B，使得 $X=A\cup B$. 称子集 $D\subset X$ 为 X 的连通子集，若拓扑空间$(D,D\cap\mathscr{F})$是连通的.

非连通的度量空间确实是存在的，请看例子：设 $X=A\cup B$，其中 $A=(0,1)$，$B=(3,4)$(开区间). X 的拓扑由实轴上的通常拓扑诱导得到，从而 X 成为不连通的空间.

由拓扑的定义，可以观察到$\varnothing$和 X 在拓扑空间$(X,\mathscr{F})$上的特殊性，如它们是既开又闭的两个集合，那么拓扑空间$(X,\mathscr{F})$中还存在其它的既开又闭的集合吗？回答这个问题与拓扑空间$(X,\mathscr{F})$的连通性有密切的关系.

定理 1.2.2 拓扑空间$(X,\mathscr{F})$是连通的，当且仅当它只有$\varnothing$和 X 为既开又闭的子集合.

证明 设 X 是连通的. 假设 $A\neq\varnothing$是既开又闭的，则 $X-A$

是开集，显然 $X=(X-A)\cup A,(X-A)\cap A=\varnothing$. 由 X 的连通性，$X-A=\varnothing$，即 $A=X$.

设 X 是不连通的，那么存在两个非空开集 A 和 B，使得 $X=A\cup B,A\cap B=\varnothing$，所以 $A=X-B$ 为闭，从而 A 既开又闭，且 $A\neq\varnothing,X$. □

定义 1.2.3 $A\subset X$ 称为 X 的一个(连通)分支，若 A 是连通的且是最大的，即若 $B\subset X$ 是个连通集且 $B\supset A$，则 $A=B$.

显然连通的拓扑空间其本身就是自己的唯一分支，非连通的拓扑空间至少存在两个分支. 例如：$X=(0,1)\cup(3,4)$是非连通的拓扑空间，有两个分支，分别为区间$(0,1)$和$(3,4)$.

引理 1.2.4 设$\{D_j;j\in J\}$为$(X,\mathscr{F})$的连通集族. 若$\cap\{D_j;j\in J\}\neq\varnothing$，则$\cup\{D_j;j\in J\}$是连通的.

证明 设 $D=\cup\{D_j;j\in J\}$，A 为$(D,D\cap\mathscr{F})$中的既开又闭的集合且 $A\neq\varnothing$，则 $A\cap D_j$ 为$(D_j,D_j\cap\mathscr{F})$中的既开又闭的集合. 因 D_j 为连通的，则 $A\cap D_j=\varnothing$或 $A\cap D_j=D_j$. 因 $A\neq\varnothing$，故存在 k，使得 $A\cap D_k=D_k,D_k\subset A$. 这样$\cap\{D_j;j\in J\}\subset A$，从而对$\forall j\in J$，$A\cap D_j\neq\varnothing$，所以 $A\cap D_j=D_j$，即 $D_j\subset A$. 这样 $A=D$，即 D 是连通的. □

定理 1.2.5 设有拓扑空间$(X,\mathscr{F})$，则下面两条成立：

(1) 对$\forall x_0\in X$，$\exists X$ 的一个分支 A，使得 $x_0\in A$，即所有的分支之并等于 X；

(2) 不同的两个分支互不相交.

证明 (1) 对$\forall x_0\in X$，定义

$$A=\bigcup\{G;G\subset X\text{ 是连通的且 }x_0\in G\}.$$

当然$\{x_0\}$是连通的，则 $x_0\in A\neq\varnothing$. 由引理 1.2.4，有 A 是连通的. 设 B 是任一连通集且 $B\supset A$，则 $x_0\in B$. 由 A 的定义知 $B\subset A$，从而 $A=B$. 这说明 A 是最大连通集，即 A 为$(X,\mathscr{F})$的一分支且 $x_0\in A$.