应用泛函分析

葛显良 编著

浙江大学出版社

应用泛函分析

葛显良　编著

浙江大学出版社

内容简介

本书根据国家教委下达的《工学硕士研究生应用泛函分析课程基本要求》编写，经高等学校工科研究生数学课程指导小组第四次工作会议讨论评审，认为可作为工科研究生教学用书，同意推荐出版。本书内容包括预备知识、内积空间与 Hilbert 空间、赋范空间与 Banach 空间、赋范空间与 Banach 空间上的线性算子、不动点定理及应用。

本书注意从实际背景出发引人有关概念。全书叙述清晰，文字流畅，论证过程严谨。

本书可作为工科研究生教学用书，也可作为大学生、工程技术人员、有关教师了解泛函分析知识的入门书。

应用泛函分析

葛显良　编著

责任编辑　贾吉柱

*

浙江大学出版社出版

（杭州玉古路 20 号　邮政编码 310027）

（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）

浙江大学出版社电脑排版中心排版

德清第二印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*

850×1168　32 开　6.75 印张　177 千字

1996 年 10 月第 1 版　　2000 年 1 月第 3 次印刷

印数 3001—5000

ISBN 7-308-01833-4/O·196　　定价：7.50 元

目　　录

第一章　预备知识

§1　集合与映射

1.1　**集合**　把客观世界或思维中一定范围内的所有对象，作为一个整体来研究，就称之为那些对象的**集合**，简称**集**. 该范围内各个对象称为该集合的**元素**或**元**. 本书中集合通常用大写字母 $A,B,C,\cdots,X,Y,Z$ 等表示，元素用小写字母 $a,b,c,\cdots,x,y,z$ 等表示. 当 a 是集合 A 的元素时，称 a 属于 A 或 A 含有 a，用记号 $a \in A$ 表示. a 不属于 A 用 $a \overline{\in} A$ 表示. 不含任何元素的集合称为**空集**，通常用符号 $\varnothing$ 表示. 当集合 A 是由一切具有性质 P 的元素构成时，可表示成

$$A = \{x: x \text{ 具有性质 } P\}.$$

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，也称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$. 由此定义看出集合 $\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$. 如果没有附加的说明，集合中的元素一般不考虑其次序. 而且在集合中，相同的元素不重复计数，如 $\{1,2,3,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

若 $A \subset B$，且 $A \neq B$，$A \neq \varnothing$，则称 A 是 B 的**真子集**. $A \subset B$ 的否定，即 A 不包含于 B，记作 $A \not\subset B$ 或 $B \not\supset A$，其含义是 A 中至少有一个元素不属于 B.

集合的包含关系有以下的性质：

1°　自反性：$A \subset A$；

2° 反对称性：$A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$；

3° 传递性：$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

以上的记号"$\Rightarrow$"是逻辑符号. 设 P,Q 是两个命题，"$P \Rightarrow Q$"表示"如果 P 成立，则 Q 也成立"，读作"P 蕴涵 Q"，或"由 P 可推出 Q".

1.2 **集合的运算** 设 A 与 B 是两个集合，由至少属于 A 与 B 中之一的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的**并集**，简称 A 与 B 的**并**，记作 $A \cup B$，即

$$A \cup B \triangleq \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

以上的记号 $\triangleq$ 读作"定义为"，逻辑联结词"或"是不排斥的"或"，表示 $x \in A, x \in B$ 两者至少有一成立. "或"即逻辑符号 $\vee$，$P \vee Q$ 包括 P 成立 Q 不成立，P 不成立 Q 成立，P、Q 都成立三种情况.

例如：$A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$，则 $A \cup B = \{1,2,3,4\}$.

由既属于 A 又属于 B 的所有元素构成的集合称为 A,B 的**交集**，简称 A 与 B 的**交**，记作 $A \cap B$，

$$A \cap B \triangleq \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

这里的逻辑联结词"且"即逻辑符号 $\wedge$，$P \wedge Q$ 表示 P、Q 同时成立.

例如：$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$.

对于并和交运算有以下的运算规律：

1° 交换律：$A \cup B = B \cup A$,

$A \cap B = B \cap A$;

2° 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

3° 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

4° 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$,

$A \cap (A \cup B) = A$.

还有一些简单性质，如：

1° $A \cup A = A,\ A \cap A = A$;

2° $A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing$;

3° $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

以上的 $\Longleftrightarrow$ 也是逻辑符号，$P \Longleftrightarrow Q$，表示 $P \Rightarrow Q$，且 $Q \Rightarrow P$，读作 P 与 Q 等价，或 P 等价于 Q.

当 $A \cap B = \varnothing$ 时，称 A, B 为不相交的. 当 $A \cap B \neq \varnothing$ 时，称 A，B 相交或交不空.

所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A \backslash B$，

$$A \backslash B \triangleq \{x : x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\}.$$

在某些理论和应用中往往仅考虑某一确定集合 X 的元素及其子集 $A, B, C, \cdots$ 等，此时 $X \backslash A$ 称为 A 的补集（或余集）记作 A^c，即

$$A^c \triangleq X \backslash A = \{x : x \in X \text{ 且 } x \overline{\in} A\}.$$

对于 X 的子集 A, B，有

$$A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing, A^{cc} = A, A \subset B \Longleftrightarrow A^c \supset B^c,$$

以及 de Morgan 律：

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

集合的并与交的运算还可以推广到任意多个（有限或无限）集合组成的集族的情况. 设 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 是一个集族，其中 α 为集合的指标，它在指标集 I 中变化，则这族集合的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \triangleq \{x : \exists\ \alpha \in I, x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \triangleq \{x : \forall\ \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

这里“$\exists$ ”是存在量词，表示“存在某个”，$\forall$ 是全称量词，表示“对每一个”或“对所有的”.

de Morgan 律可推广为：

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

de Morgan 律也称为对偶原理，在集合论及其应用中有极重要的作用. 从与基本集 X 的子集族有关的任一等式出发，用代换的方法，把所考察的一切子集换成它的补集，并运算换成交运算，交换成并，就

完全自动地得到另一个对偶的等式. 如果是带有 $\supset$ 或 $\subset$ 的包含关系式，再把两者互换，所得关系式仍成立.

1.3 **直积集** 设 A,B 是给定的集合，则称 $A\times B\triangleq\{(x,y):x\in A,\ y\in B\}$ 为 A 与 B 的直积集，简称**积集**或**直积**. 如 $A=[a,b],B=[c,d]$，则 $A\times B=[a,b]\times[c,d]$ 即矩形中的点所组成的集合. $\boldsymbol{R}$ 表示实数集，$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2$ 即表示普通平面上点所组成的集合. $A\times B$ 中元素也称为有序对，当 $x\neq y$ 时 $(x,y)\neq(y,x)$. $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Longleftrightarrow x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是给定的集合，则

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\triangleq\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}$.

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 也可记作 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$.

1.4 **映射** 在微积分学中已学过函数关系 $y=f(x)$，它是从实数集 $\boldsymbol{R}$(或其子集) 到 $\boldsymbol{R}$ 中的一个对应关系. 这概念可推广到一般集合上. 设有两个非空集合 X,Y，如果有一个对应关系(或法则) 存在，对于 X 的每一元素 x，有 Y 中唯一的一个元素 y 与之对应，就称给出了一个从 X 到 Y 的映射 f，记作 $f:X\to Y$，并写成 $y=f(x)$ 或 $f:x\mapsto y$，表示 f 把 x 映成 y. 称 y 是 x 在映射 f 下的**象**. 称 X 是 f 的**定义域**，记作 $D(f)$. 而集合 $f(X)=\{f(x):x\in X\}$ 称为 f 的**值域**，记作 $R(f)$. 一般地，$R(f)$ 是 Y 的一个子集，不必是整个 Y.

由于映射是函数概念的推广，有时也可把映射称为函数、算子、变换，特别当 Y 是数集(实数集 $\boldsymbol{R}$ 或复数集 $\boldsymbol{C}$) 时，f 称为定义在集合 X 上的**泛函**.

例 当映射 f 的定义域和值域同为 X，即 $f:X\to X$，而对所有的 $x\in X$，均有 $f(x)=x$，则 f 称为 X 上的**恒等映射**，以 $f=I_X$ 表示之，或简单地用 I 来表示.

对映射 $f:X\to Y$，当 $f(X)=Y$ 时，称为**满射**，或称 f 是**映满**的，f 是由 X 到 Y 上的映射. 对映射 $f:X\to Y$，如果对 X 中所有不同的两元

素 x_1,x_2，均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为**单射**. 如果 f 是满射又是单射，则称 f 为 X 到 Y 上的**双射**或**一一映射**或**一一对应**.

对于映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$，由 $h(x)=g(f(x))$ 所确定的映射 $h:X\to Z$ 称为 f 和 g 的**复合映射**，以 $h=g\circ f$ 表示之. 它是复合函数概念的推广. 对映射 $f:X\to Y,g:Y\to Z,\varphi:Z\to W$ 的复合映射来说，结合律 $(\varphi\circ g)\circ f=\varphi\circ(g\circ f)$ 成立.

对于双射 $f:X\to Y$，使 $y=f(x)$ 对应于 x 的映射 $f^{-1}:Y\to X$ 称为 f 的**逆映射**. 逆映射是反函数概念的推广. 有 $f\circ f^{-1}=I_Y,f^{-1}\circ f=I_X$.

对于映射 $f:X\to Y$，如果存在映射 $g:Y\to X$，使得 $f\circ g=I_Y,g\circ f=I_X$，则 f 必是双射，且 $f^{-1}=g$.

如果有两个映射 $f,g,D(f)\subset D(g)$，且 $\forall\ x\in D(f),f(x)=g(x)$，则称 g 是 f 在集 $D(g)$ 上的**延拓**或**扩张**；称 f 是 g 在 $D(f)$ 上的**限制**，记作 $f=g|_{D(f)}$.

设映射 $f:X\to Y,A\subset X$，集合

$$f(A)\triangleq\{f(a):a\in A\}$$

称为 A 在 f 下的**象**. 如果 $B\subset Y$，集合

$$f^{-1}(B)\triangleq\{x:f(x)\in B\}$$

称为 B 关于 f 的**原象**或**逆象**. 注意这里的记号 f^{-1} 并不表示逆映射存在，但当逆映射存在时，B 在逆映射 f^{-1} 下的象即是 B 关于 f 的原象. 易验证以下的关系式成立，设 A_1,A_2,A 是 X 的子集，则有

$$A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2),$$

$$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2),$$

$$f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2),\qquad \text{等号不一定成立},$$

$$f(X\backslash A)\supset f(X)\backslash f(A),$$

$$f^{-1}(f(A))\supset A.$$

设 B_1,B_2,B 是 Y 的子集，则有

$$B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2),$$

$$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2),$$
$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c,$$
$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subset B.$$

1.5 **集合的基数(势)** 设 A,B 是两个集合,若有一一对应 $f:A \to B$,则称 A 和 B 是**等势**的(或等价的、对等的),用 $A \sim B$ 表示,等势关系有以下三条性质.

1° 自反性:$A \sim A$;

2° 对称性:$A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

3° 传递性:$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

这是因为恒等映射 $I_A: A \to A$ 是一一对应,所以 $A \sim A$. 当 $f:A \to B$ 为一一对应时,其逆映射 $f^{-1}: B \to A$ 也是一一对应,故 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. 当 $f:A \to B$ 为一一对应,$g:B \to C$ 为一一对应时,复合映射 $g \circ f: A \to C$ 也为一一对应,所以 3° 也成立.

一般地,某集合 X 上具有 1°,2°,3° 三条性质的关系 $\sim$ 称为**等价关系**. 如 $a \sim b$,则称 a 和 b 等价. 和某个确定的 a 等价的全体事物的集合称为 a 的等价类,各等价类是非空的,因为 a 属于 a 的等价类. 相异的等价类无公共元素. 集合 X 可按等价关系分类,即分成等价类. 等价关系在数学和一般科学以至在生活中是很多的,如图形的全等、相似等等都是等价关系.

这里集合等势是一种特殊的等价关系,可用等势关系对所有集合进行分类. 彼此等势的集合属于同一集合类.

容易看出,元素个数相同的两个有限集可以建立一一对应,因而是等势的. 反之两个有限集之间如果存在一一对应,则其元素个数必相等. 如果 n 是一个确定的自然数,所有元素的个数等于 n 的有限集是等势的. 元素的个数 n 是这些等势的有限集的共同属性. 这个概念可推广到无限集.

凡是等势的集合称为具有相同的基数(或势). 因此集合的基数是等势的集合所具有的共同属性. 一个集合 A 的基数,也就是集合 A 的"广义的元素个数",记为 $\overline{\overline{A}}$(或 Card A, $|A|$). 如果 A 是含有 n 个元

素的有限集，则其基数 $\overline{\overline{A}} = n$. 对有限集而言，两个集合具有相同的基数，即它们所含的元素个数相等. 因此，两集合具有相同的基数，就是有限集中元素个数相等概念的推广. 集合的基数就是有限集中元素个数概念的推广，它刻划了集合所含元素的多少.

用 N 表示自然数集，即 $N \triangleq \{1,2,3,\cdots\}$.

例 1　全体偶数的集合 $\{2,4,6,\cdots\}$ 与 N 之间存在一一对应，即 $\{2,4,6,\cdots\} \sim N$. 所以偶数集与自然数集的基数是相等的.

例 2　实数集 R 中的区间 $(-1,1)$ 与 R 是等势的，因为

$$f(x) = \mathrm{tg}(\frac{\pi x}{2}), \qquad x \in (-1,1)$$

是 $(-1,1) \to R$ 上的一一映射.

这两个例子说明，无限集可以与其真子集具有相同的基数. 而有限集与其真子集不可能建立一一对应，因而不可能具有相同的基数. 可以证明：任何一个无限集必能与它的某一真子集等势，因而有相同基数. 这说明无限集与有限集有本质区别.

1.6　**可数集**　**定义**　凡与自然数集 N 等势的集合称为可数集或可列集.

显然，当且仅当集合 A 的所有元素可用自然数编号，排成一个无穷序列的形式

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

时，A 是可数集. 以上的 A 作为集合，当 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$. 而以往定义的序列是自然数集 N 到某一集合 A(如 R, C 等) 中的映射 $f: N \to A$, $f(n) = a_n$，也可记作 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ 或简记作 $\{a_n\}$，此时可能有 $a_i = a_j$，f 的值域可以是可数集或有限集.

例 1　整数集 Z. 一切整数与一切自然数之间可按下面排列建立一一对应：

0	1	−1	2	−2	3	−3	…
1	2	3	4	5	6	7	…

因而 Z 是可数集.

例 2　有理数集 Q 是可数集.

证　每个有理数均可唯一地写成分母为正整数的既约分数 $a = p/q, q > 0$,按和数 $|p| + q = n$ 的大小由小到大排序,$n = 1$ 时的分数只有 $0/1$,$n = 2$ 的分数是 $1/1$ 和 $-1/1$,$n = 3$ 的分数是 $2/1, -2/1, 1/2, -1/2$,等等,这样将一切有理数排列如下:

$0/1, 1/1, -1/1, 2/1, -2/1, 1/2, -1/2, 3/1, -3/1, 1/3, -1/3, \cdots$

即首先写出 $n = 1$ 的分数,然后写出 $n = 2$ 的分数,再写出 $n = 3$ 的分数,… 等等. 这样对任一有理数都可排列出,得到一个序号,即一切有理数与一切自然数之间建立了一一对应.

下面列出可数集的一些性质.

性质 1　可数集的任一子集是可数的或有限的.

证　设 A 是可数集,而 B 是它的子集,现在对集合 A 的元素进行编号:$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. 在这些元素中,假设 $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots$ 是含于 B 的所有元素. 如果在数 $n_1, n_2, \cdots$ 中有最大的数,那末 B 是有限集,如果在数 $n_1, n_2, \cdots$ 中没有最大的数,那末 B 是可数的,因为它的元素 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$ 可用数 $1, 2, \cdots$ 进行编号.

一个集合是可数或有限时,称为**至多可数**.

性质 2　有限个或可数个可数集的并仍是可数集.

证　设 $A_1, A_2, \cdots$,是可数集,不妨假设它们两两不相交. 否则可用 $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \cdots$ 来代替它们,其中每一集合至多可数. 而其并等于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = S$. 下面把 $A_1, A_2, \cdots$ 的一切元素排成如下的形式:

$$\begin{array}{llllll}
A_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
A_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
A_4: & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

把所有这些元素按对角线编号,则 S 可以表示成为一个无穷序列

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \cdots$$

故 S 是可数集.

性质 3　有限多个可数集 $A_1, \cdots, A_n$ 的直积集 $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ 是可数的.

证　先证 $n = 2$ 的情况. 设 A, B 可数, $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$, $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$, 则 $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \cdots\}$. $A \times B$ 中一般的元素为 (a_i, b_j), 按 $i + j = m$ 的大小由小到大排列, $m = 2$, 只有 (a_1, b_1), $m = 3$ 时有 $(a_1, b_2), (a_2, b_1)$, $m = 4$ 时有 $(a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \cdots$ 这样可把 $A \times B$ 的所有元素排列出来, 因而 $A \times B$ 可数.

假设 $n = k$ 时性质 3 成立. $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ 是可数集, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$ 是两个可数集的直积, 因而也可数.

注意: 可数多个可数集 A_n 的直积 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 不可数. 当 $A_n = \{0, 1\}$ 只有两个元素时, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 中的元素是在 $\{0, 1\}$ 中取值的序列: $(x_1, x_2, \cdots)$, $x_n = 0$ 或 1, $n = 1, 2, \cdots$ 这样一个序列相当于一个二进制小数(有限或无限小数), 其全体构成 $[0, 1]$ 区间, 以后将证明 $[0, 1]$ 是不可数的.

性质 4　任一无限集都包含可数子集.

证　设 M 是无限集, 在 M 中任取一元素 a_1, 由于 M 是无限集, 可在 M 中找到异于 a_1 的元素 a_2. 假设已找到了 n 个不同的元素 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 由于 M 是无限集, $M \backslash \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \varnothing$, 存在 $a_{n+1} \in M \backslash \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 这样就能得到 M 的可数子集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

由此命题得出, 在无限集中, 可数集是"最小的".

1.7　**不可数集的例**　我们已经知道有理数集 Q 是可数集. 是否存在不可数集? 下面的定理对此作了肯定的回答.

定理 区间[0,1]中的点(实数)是不可数的.

证 用反证法. 假定[0,1]中的点是可数的,那么它们能排列成一个无穷序列:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

把它们写成十进制小数的形式:

$$a_1 = 0.\, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots$$

$$a_2 = 0.\, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots$$

$$a_3 = 0.\, a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_n = 0.\, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

这里 a_{ik} 是数 a_i 第 k 位小数的数字. 注意 $1 = 0.999\cdots$. 按 Cantor 对角线程序构造小数

$$b = 0.\, b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

其中当 $a_{nn} = 1$ 时取 $b_n = 2$,当 $a_{nn} \neq 1$ 时取 $b_n = 1$. 这个十进制小数 $b \in [0,1]$,而小数 b 与 a_1 的第一位数字不同,与 a_2 的第二位数字不同,等等. $\forall\, n, b_n \neq a_{nn}$,所以 $\forall\, n, b \neq a_n$. 这与开始的假设相矛盾. 因此[0,1]是不可数集.

容易证明,开区间$(0,1)$,(a,b),闭区间$[a,b]$以及实数集 $\boldsymbol{R} = (-\infty,\infty)$都可与[0,1]建立一一对应,因而是不可数集,且与[0,1]有相同的基数. 可数集的基数用希伯莱字母 $\aleph_0$ (阿列夫零)来表示. 全体实数集 $\boldsymbol{R}$ 的基数用符号 c 来表示,称为连续统的势.

习 题

1. 证明下列集合等式:

1° $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, 2° $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

3° $(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$,

4° $(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$,

5° $X\backslash Y=X\backslash(X\cap Y)=(X\cup Y)\backslash Y$,

6° $X\backslash(Y\backslash Z)=(X\backslash Y)\cup(X\cap Z)$.

2. 证明：1° $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$,

2° $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$,

3° $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$,

4° $f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c$,

5° $f(A^c)=(f(A))^c$ 是否成立？

3. 证明一切有理系数多项式的集合是可数集.

4. 证明平面上一切具有有理坐标的点的集合是可数集.

5. 证明任何两个闭区间$[a,b]$与$[c,d]$上的点集是等势的.

6. 建立$(0,1)$与$\boldsymbol{R}$之间的一一对应.

7. 证明：如果M是任一无限集而A可数，则$M\sim M\cup A$.

§2 关于实数的几个定理

在微积分中学过实数和连续函数，现在再补充一些关于实数和连续函数的知识，为学泛函分析作准备.

2.1 **上确界和下确界** 我们已经知道任意两个实数a,b是可以比较大小的，即$\boldsymbol{R}$上有一种次序关系，具有性质：

1° 自反性：$a\leqslant a$;

2° 反对称性：$a\leqslant b,b\leqslant a\Rightarrow a=b$;

3° 传递性：$a\leqslant b,b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$.

一般说来，如果一个集合X的一些元素之间有满足上述三条件的关系"$\leqslant$"，则称这种关系"$\leqslant$"为**半序关系**. 定义了某种半序关系

的集合$(X,\leqslant)$就称为**半序集**. 因此,实数集 $\boldsymbol{R}$ 及其子集,按照比较大小的关系“$\leqslant$”成为半序集.

如果对半序集中任意两个元素 a,b,$a\leqslant b$ 和 $b\leqslant a$ 两者至少有一式成立,则称此集合为**全序集**. 显然实数集 $\boldsymbol{R}$ 及其子集都是全序集.

设 $A\subset\boldsymbol{R}$,如果 $\exists\ c\in\boldsymbol{R}$,使得 $\forall\ a\in A$,有 $a\leqslant c$,则称 c 是 A 的一个上界,集合 A 称为有上界或上有界. 集合 A 的上界不是唯一的,如果 c 是 A 的上界,则任一大于 c 的数 c_1 也是 A 的上界. A 的上界 c 不一定在 A 中. 同样地,如果 $\exists\ d\in\boldsymbol{R}$,使得 $\forall\ a\in A$,有 $d\leqslant a$,则称 d 是 A 的一个下界,集合 A 称为有下界或下有界. 如果集合 A 有上界且有下界,则称 A 有界. 显然,A 有界 $\Longleftrightarrow\exists\ e\in\boldsymbol{R}$,使得 $\forall\ a\in A$,有 $|a|\leqslant e$.

如果 A 有上界,且 A 的上界中有一个最小者 M,则称 M 是 A 的上确界或最小上界,记作 $M=\sup A$. M 是 A 的上确界,即要满足两个条件:①M 是 A 的一个上界. ② 对 A 的任一个上界 c,有 $M\leqslant c$. 由此定义,如果 A 有上确界,则必是唯一的.

证明如下:如果 A 有两个上确界 M,M',由条件 ①,M,M' 都是 A 的上界,由条件 ②,$M\leqslant M'$,$M'\leqslant M$,故 $M=M'$.

我们再给出上确界的等价定义. M 是 A 的上确界,当且仅当 ①$\forall\ a\in A$,有 $a\leqslant M$. ②$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ a=a(\varepsilon)$(这记号表示 a 与 ε 有关)$\in A$,使得 $a>M-\varepsilon$.

证 ① 即表示 M 是 A 的上界. ② 等价于 A 的任一上界 $c\geqslant M$,如果 ② 成立而存在 A 的一个上界 $c<M$,令 $\varepsilon=M-c>0$,$\exists\ a\in A$,$a>M-\varepsilon=c$,与 c 是 A 的上界相矛盾. 故由 ② 推出 A 的任一上界 $c\geqslant M$.

反之,如果 ② 不成立,则 $\exists\ \varepsilon>0$,使得 $\forall\ a\in A$,$a\leqslant M-\varepsilon$,这样 $M-\varepsilon$ 是 A 的一个上界,与 A 的任何上界 $c\geqslant M$ 相矛盾. 所以由 A 的任一上界 $c\geqslant M$ 可推出 ②.

以上的 ② 中,令 $\varepsilon=1/n$,则 $\exists\ a_n\in A$,使得 $a_n>M-\dfrac{1}{n}$,另一方