# 线性代数

孙兰芬　陈一巾　编

浙江大学出版社

# 线性代数

孙兰芬 陈一巾 编

浙江大學出版社

## 内容提要

本书为浙江大学所编的高等数学规范化教材线性代数部分，是按照高等院校工科各专业线性代数教学要求而编写的．全书共分六章，包括行列式、矩阵、线性方程组、线性空间与欧氏空间、线性变换、二次型．各章配有复习思考题，习题答案，部分加深的内容打有“ * ”号，供有关专业选用．

本书可作为各类高等院校工科各专业线性代数教材，同时可作为电视大学的学生和科技人员自学参考书．

**线性代数**

孙兰芬 陈一中 编

责任编辑 贾吉柱

* * *

浙江大学出版社出版

（杭州玉古路 20 号 邮政编码 310027）

浙江大学出版社计算机中心电脑排版

杭州富阳何云印刷厂印刷

浙江省新华书店经销

* * *

850×1168 32开 8.75 印张 224千字

1994 年 7 月第 1 版 1996 年 4 月第 2 次印刷

印数：10001—15000

ISBN 7-308-01316-X/O·168 定价：9.00 元

如发现书中有缺页、倒页和破页，请持此证到杭州富阳何云印刷厂调换

地址：富阳何云 邮编：311404 电话：0571—3201054

# 编写说明

工程数学由多门数学课程组成，它的涉及面和应用性很广. 几年来我们曾先后出版过多种工程数学教材. 为了适应形势，及时总结经验，不断扩大教学成果，使我校工程数学教学质量能保持持续的稳定与提高，我们重新组织人力，对《线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数与拉普拉斯变换》、《常微分方程》、《工程技术中的偏微分方程》、《数值计算方法》等六门课程的教材全部作了改编，以适应我校教学规范化的要求.

最近出版的这一套工程数学教学规范化系列教材，具有如下特点：

1. **适应性**　提高和加宽了知识的深度与广度，能较广泛地适用于多种专业，不同层次的要求.

2. **少而精**　虽然新教材充实了不少新的内容，但整个篇幅与学时数都没有增加.

3. **实用性**　学以致用是编写这套教材的一个原则，因此新教材增加了很多实用性内容. 例如，在《常微分方程》中增加了建模的实例；在《复变函数与拉普拉斯变换》中增加了用复变函数方法解决工程实际问题的实例；在《工程技术中的偏微分方程》中增加了差分法及有限元法等内容，以便扩大计算机的应用范围；在《概率论与数理统计》中增加了统计部分比重，等等.

4. **便于教学**　新教材融入了我系教师长年积累的经验与资料，用更为直观，更易为学生接受的方式处理疑难内容，起到深入浅出的效果，值的一提的是，《线性代数》、《复变函数与拉普拉斯变换》中还

选编了大量的思考题，以帮助同学们复习.

我们希望这套工程数学系列教材能成为深受广大师生欢迎的教材.

浙江大学应用数学系

1994 年 3 月

# 前　　言

本书是作者在浙江大学多年线性代数教学实践基础上不断更新完善的结晶，能使读者在较短时间内系统地掌握线性代数的基本概念、基本理论和方法. 本书对工程技术中常用的线性代数的基本内容和方法作了较深入的讨论和阐述. 全书共分六章，包括行列式、矩阵、线性方程组、线性空间与欧氏空间、线性变换、二次型. 各章还配有使读者加深理解基本内容的复习思考题，习题附有答案.

为便于读者阅读与掌握，本书力求条理清楚，重点突出，难点分散，先具体后抽象，重要定理证明简洁清晰，例题典型直观.

本书是根据高等院校工科线性代数的教学要求编写的，为适应本科、专科等各层次需要，力求内容安排合理，层次分明，部分加深的内容打“*”号，便于教学时取舍，本书可作为各类高等院校工科各专业线性代数教材，同时可作为电视大学的学生与科技人员自学参考书.

本书第一、二、三章由孙兰芬编写，第四、五、六章由陈一巾编写. 全书经国家教委高等学校高等数学课程指导委员会委员梁文海教授，浙江教育学院谢汉光教授审阅. 他们提出了宝贵意见，在此致以诚挚的谢意. 同时，浙江大学计算数学教研室有关老师对本教材提供了不少资料和意见，对此一并表示衷心感谢.

对书中的不足之处恳请读者批评指正.

编　者

1993 年 10 月

# 目　　录

## 第一章　行列式



## 第二章　矩阵

## 第三章 线性方程组

## 第六章 二次型

# 第一章　行列式

行列式是线性代数中的一个重要研究对象．本世纪初，行列式还被认为比线性代数中的另一重要研究对象——矩阵更重要．然而，数学的发展方向不是固定不变的，现在行列式已不能作为线性代数研究的主方向，但行列式作为线性代数中的一个最基本、最常用、最有力的工具地位仍然不变．它被广泛地应用到数学、物理、力学以及工程技术等各领域中．

行列式来源于研究线性方程组的求解公式．本章主要介绍 $n$ 阶行列式的概念、基本性质、按行（列）展开定理，以及应用行列式求线性方程组的解．

## §1.1　二阶、三阶行列式

设含有两个未知量 $x_1,x_2$ 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法求解，即以 $a_{22}$ 乘第一式，$a_{12}$ 乘第二式，然后两式相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同样，消去未知量 $x_1$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

设 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

引进记号

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

叫做二阶行列式．横写的叫做行，竖写的叫做列，它含两行、两列．行

列式中的数称为行列式的元素，如 $a_{12}$ 就是位于第一行、第二列的元素. 从(1.3)式可知，二阶行列式是两项的代数和，一项是从左上角到右下角的连线(称为行列式的主对角线)上两元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的连线(称次对角线)上两元素的乘积，取负号. 譬如

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - 3 \times (-2) = 14$$

根据二阶行列式的定义，线性方程组(1.1)的解(1.2)式中的分子、分母分别为：

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

于是，方程组(1.1)的解为：

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \tag{1.4}$$

现在求解含有三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

同样用消元法，先后消去 $x_3$、$x_2$，得仅含 $x_1$ 的方程

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 \end{aligned}$$

$x_1$ 的系数记作 $|A|$，当 $|A| \neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32}$$

$$- b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3) \qquad (1.6)$$

类似可得

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{|A|}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 \\ &\qquad - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}) \\ x_3 &= \frac{1}{|A|}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} \\ &\qquad - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}) \end{aligned} \qquad (1.7)$$

将 $|A|$ 记为

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1.8)$$

称为三阶行列式.它含有三行、三列,是6项的代数和.在(1.8)式中,取正号的三项,一项是主对角线上三元素的乘积,另二项是位于主对角线的平行线上两元素与它对角上的元素的乘积;取负号的三项可由次对角线类似得到,为便于记忆,示出图(1.1).

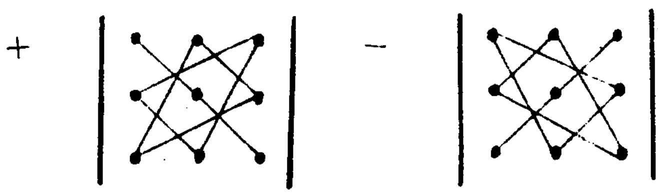


图 1.1

譬如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 0 + 0 \times 2 \times 1 + (-5) \times (-2) \times (-2) - (-5) \times 3 \times 1 - 0 \times (-2) \times 0$$

$$-1\times 2\times(-2)$$
$$=-20+15+4=-1.$$

按三阶行列式定义，易知线性方程组(1.5)解的(1.6)，(1.7)式中，分母都是行列式 $|A|$，分子是把行列式 $|A|$ 中的第 1，2，3 列分别换成常数项 $b_1,b_2,b_3$ 所得到的行列式，即

$$|A_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad |A_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

因此方程组(1.5)的解可简单表示成

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},x_2=\frac{|A_2|}{|A|},x_3=\frac{|A_3|}{|A|}. \qquad (1.9)$$

**例 1**　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=-1\\ 2x_1-4x_2+x_3=1\\ x_1-5x_2+3x_3=2\end{cases}$$

**解**　计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\end{vmatrix}=-12-1-10+5+6+4=-8,$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{vmatrix}=11,$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=9,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

根据公式(1.9),得方程组的解

$$x_1 = -\frac{11}{8}, \quad x_2 = -\frac{9}{8}, \quad x_3 = -\frac{3}{4}.$$

## §1.2 $n$阶行列式的定义

为把二阶、三阶行列式推广到$n$阶行列式,必须找出二阶和三阶行列式计算公式的共同规律,为此先给出排列的概念.

### 一、$n$级排列及其奇偶性

**定义1.1** 由数$1,2,\cdots,n$组成的一个有序数组,称为一个$n$级排列.

$n$级排列的一般形成为$i_1i_2\cdots i_n$,其中$i_1,i_2,\cdots,i_n$为数$1,2,\cdots,n$中的某一数,且互不相等.下标表示这$n$个数的次序,如$i_5$表示排列中的第5个数.

例如,21是一个2级排列,4123是一个4级排列,54213是一个5级排列;而4313这四个数中,有二个3,而没有2,就不是一个排列.

我们知道,由$1,2,\cdots,n$所组成的所有不同的$n$级排列共有$n!$个.而在这$n!$个不同的$n$级排列中,$1\ 2\cdots n$是唯一的一个按从小到大次序组成的排列,称为$n$级标准排列.

例如,3级排列共有6个不同的排列,即

1 2 3　　2 3 1　　3 1 2

1 3 2　　2 1 3　　3 2 1

其中1 2 3是3级标准排列.

**定义1.2** 在一个排列中,对任何两个数$i$和$j$,若有$i>j$,而$i$位于$j$的前面时,则称$i,j$构成一个逆序.一个排列中逆序的总数,称为

此排列的逆序数，$n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

**例 1** 在 3 级排列 3 1 2 中，3 与 1 构成逆序，这是因为 $3>1$，但 3 在 1 的前面，同理 3 与 2 也构成一个逆序，而 1 与 2 不构成逆序. 因此其逆序数 $\tau(3\ 1\ 2)=2$，这是一个偶排列.

一般地，设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 $n$ 级排列，则按定义有

$$
\begin{aligned}
\tau(i_1i_2\cdots i_n) = &(i_1 \text{ 后面比 } i_1 \text{ 小的数的个数}) \\
&+(i_2 \text{ 后面比 } i_2 \text{ 小的数的个数}) \\
&+\cdots\cdots \\
&+(i_{n-1} \text{ 后面比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数})
\end{aligned}
$$

**例 2** (1) $\tau(3142)=2+0+1=3$，所以 3142 是一个奇排列.

(2) $\tau(24315)=1+2+1+0=4$，24315 是一个偶排列.

(3) $\tau(12\cdots n)=0$，标准 $n$ 级排列是偶排列.

**定义 1.3** 将一个排列中某两个数的位置互换而其余的数不动，就得到另一个排列，这种对排列的变换方法称为对换.

例如，排列 2413 经过 2 与 3 对换后，就得到排列 3412；排列 32415 经过 2 与 1 对换后，就得到排列 31425.

由计算逆序数可知，经过一次对换后，奇排列 2413 变成了偶排列 3412，而偶排列 32415 却变成了奇排列 31425. 一般地，有下述结论：

**定理 1.1** 任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

**证明** 首先证明对换排列中相邻两个数的情况，设排列

$$\cdots i\ j \cdots, \tag{2.1}$$

经过 $i$ 与 $j$ 对换后变成排列

$$\cdots j\ i \cdots, \tag{2.2}$$

这里“…”表示排列中那些不动的数，易知 $i,j$ 和其余数构成的逆序是没有变动，所不同的只是 $i$ 与 $j$ 的次序，在排列(2.1)中，若 $i$ 与 $j$ 不构成逆序，则在(2.2)中，$i$ 与 $j$ 为一个逆序，因此逆序数增加 1；若 $i$ 和

$j$ 在(2.1)中构成一个逆序，则在(2.2)中就减少一个逆序，总之排列(2.1)与(2.2)的奇偶性不同.

现再证一般情形，设在对换的两个数 $i$ 和 $j$ 中间有 $s$ 个数，设排列为

$$\cdots\ i\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ j\ \cdots, \tag{2.3}$$

经过 $i$ 与 $j$ 对换后变成排列

$$\cdots\ j\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ i\ \cdots. \tag{2.4}$$

这个对换可经一系列相邻对换来实现. 首先，对排列(2.3)，把 $j$ 依次与左边 $s+1$ 个数 $k_s, k_{s-1}, \cdots k_1, i$ 进行相邻对换，排列(2.3)变成排列

$$\cdots j\ i\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_s\ \cdots \tag{2.5}$$

再对排列(2.5)，将 $i$ 向右依次与 $s$ 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 进行相邻对换，排列(2.5)变成排列(2.4). 因此，$i$ 与 $j$ 的对换，可通过 $2s+1$ 次相邻对换来实现，由上已知经一次相邻对换必改变排列的奇偶性，现在经过奇数次相邻对换，其最终必然改变了排列的奇偶性.　　证毕.

## 二、三阶行列式展开式的规律

为推广行列式概念，必须找出二阶、三阶行列式的展开式的共同特征，我们知道

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{2.6}$$

其中元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 的第一个下标 $i$ 表示所在行数，简称为 $a_{ij}$ 的行指标，第二个下标 $j$ 称为列指标，表示 $a_{ij}$ 所在列数. 从展开式(2.6)可看到，三阶行列式是 6 项代数和；每项都是三个元素的乘积，且这三个元素的行指标互不相同，列指标也互不相同. 这表示这三个元素位于行列式中不同行，也位于不同的列，而行列式中位于不同行及不同列的三个元素乘积共有 $3!=6$ 项，这全在(2.6)式中；每项前的正负号决定于三个元素的行指标及列指标分别构成的二个三级排列；综合以上所述，归纳起来，三阶行列式的展开式有如下规律：