普通高等教育“九五”国家级重点教材

高等数学习题课教程

主　编　陈庆华
副主编　王　莉
孙建建

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

本书是陈庆华主编的军队院校工科专科通用教材《高等数学》的配套教材。按照《高等数学》的九章的顺序，共设21讲，包括了一元函数微积分，常微分方程，多元函数微积分，无穷级数和数值计算等内容。每讲设置了"目的要求"、"基本训练"、"疑难解析与课堂练习"、"课外思考与练习"四部分内容。每章后配有自我检测题。全书后附有部分习题答案。

该书可作为工科专科教材与陈庆华主编的《高等数学》配套使用，也可单独作为工科专科学员的自学读物或工科专科函授学员的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/陈庆华主编.—北京:高等教育出版社,1999

ISBN 7-04-006974-1

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第04945号

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　本	787×1092　1/16	版　次	1999年6月第1版
印　张	10.5	印　次	1999年8月第2次印刷
字　数	250 000	定　价	12.60元

前　　言

1995年春，总参军训部组织编写军队院校工科专科高等数学通用教材。编写组在广泛调研的基础上，根据军队院校工科专科高等数学教材建设的需要，吸收各院校高等数学教学改革的成果，于1996年夏完成了该教材的第一稿，并在国防科技大学出版社出版，在军内院校使用。1996年秋，经总参军训部推荐，申请“九五”国家级重点教材的立项，1997年底获得批准。编写组遵照总参军训部提出的编写要求，面向21世纪高等专科教育的发展，根据两年使用情况，对该教材的第一稿进行了校对、改写、调整、补充与完善。为了体现精讲多练的原则，将高等数学内容进行了适度精简，增加习题课的分量，将全书内容分为互为配套的两册，一册是讲大课用的《高等数学》，另一册是上习题课用的《高等数学习题课教程》。

其中《高等数学》一册，共设九章，依次是函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，常微分方程，向量与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，数值计算值初步。每节后配有习题，每章后配有复习课，书末附有基本初等函数表，常用平面曲线及其方程，积分表，方程求根C语言程序，部分习题答案等。本册约50万字，授课学时可控制在120—150学时。在内容的取舍上，适当减少了一些繁难的定理证明，突出了基本概念、基本方法、基本技能，增加了数值计算内容，为拓宽数学的应用打下基础。

《高等数学习题课教程》一册，按照《高等数学》的九章顺序，共设二十一讲，每讲设置“目的要求”、“基本训练”、“疑难解析与课堂练习”、“课外思考与练习”等四部分内容。其中“基本训练”内容是让学员以填空的形式复习大纲要求掌握的基本概念、基本公式、基本定理等，以便巩固这些知识。其中“疑难解析与课堂练习”是对《高等数学》一册中所选例题的辅助和补充。《高等数学习题课教程》一册即可作为教科书，也可作为教员指导学员自学的课外读物。

整套教材遵循总参军训部1994年10月颁发的军队工科专科《基础课程数学基本要求》和“九五”国家级重点教材的编写要求，整体结构力求严谨简明；内容的深度与范围力求宽编窄用；定理证明注重几何直观，语言表述力求通俗易懂。

整套教材的内容结构由主编陈庆华教授设计制定，参加编写的单位有：指挥技术学院、测绘学院、海军航空技术学院、空军第一航空学院、防化指挥工程学院、北京医学高等专科学校、空军第二航空学院、军事经济学院、汽车管理学院、运输工程学院。

《高等数学》各章撰写人分别是：第一章为李庆才、孙利民，第二章为王莉、郭瑞平，第三章为孙利民、王莉，第四、五章为朱铁稳，第六、八章为孙本利，第七章为姚红，第九章为张忠秀；郭瑞平、尹江丽分别对全书作了校对和修改。《高等数学习题课教程》各讲初稿撰写人分别是：第一、二、三讲为余贵清，第四、五、六讲为姚楠；第七、八、九讲为王莉，第十、十一讲为孙建建、生汉方，第十二、十三讲为孙建建，第十四、十五讲为高大新，第十六、十七讲为姚红，第十八、十九、二十讲为许依群，第二十一讲为刘家学；孙建建对其他撰写人完成的部分初稿作了较大的改写；孙建建、

王莉对全书作了校对和修改。张德舜教授对全套教材作了认真审核,最后由主编陈庆华教授统稿定稿。

总参军训部、总装司令部军训局在本教材的立项、编写、推广等工作中给予了热情的指导,并且组织了 1998 年 12 月 22 日在指挥技术学院召开的国家级重点教材评审会。本教材出版前,邀请了教育部工科数学课程指导委员会委员盛祥耀教授、史荣昌教授,指挥技术学院常显奇教授,北方交通大学季文铎教授,装甲兵工程学院杨醒民教授,海军后勤学院金延年教授,空军后勤学院袁新生教授等,对整套教材进行了认真的审查。根据专家的意见,编写组又做了进一步的修改。为了本书的出版,高等教育出版社数学编辑室的胡乃冏、邵勇、李陶等同志给予了热情的关心和极大的帮助。参加编写的指挥技术学院、海军航空技术学院、总后医学高等专科学校等十所院校对本书的编写给予了很大的支持。为了本书在军队院校推广试用,国防科技大学谷建湘、张建军等同志曾给予大力支持。在本书编写过程中,朱凤丽、王宝顺、杨娟、王鹏等同志曾给予许多帮助。在此,我们一并表示诚挚的谢意。

由于作者们水平有限,书中的错误和不当之处,敬请读者和同行批评指正。

编者

1998.12.20

目　录

第一讲　函　　数

一、目的要求

1．理解函数的概念，会求函数的定义域、值域，会建立函数关系式．

2．了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性的概念，掌握单调性和奇偶性的判别方法．

3．熟练掌握基本初等函数的表达式、定义域、性质及其图形．

4．了解复合函数、分段函数和初等函数的概念，会把复合函数分解成较简单的函数形式．

二、基本训练

1．开区间(a,b)的集合表示方法为____．

2．函数的____和____称为函数的两要素．函数的表示法有三种，它们是____．

3．五类基本初等函数是____．

4．初等函数是指____．

5．单调增加(或减少)的函数，其图形是随着自变量的增加而____的曲线．

6．奇函数的图形关于____对称，偶函数的图形关于____对称．

7．函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形关于____对称．

三、疑难解析与课堂练习

(一)疑难解析

问题1　确定一个函数需要有哪几个基本要素？

解答　确定一个函数需要两个基本要素，即定义域和对应法则．这两个要素确定后，值域也就随之确定了．这两个要素，也是判定两个函数是否相同的依据．

例1　下列各题中，$f(x)$与$g(x)$是否表示同一个函数？为什么？

(1) $f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=x,g(x)=\sin(\arcsin x)$．

解　(1)$f(x)$和$g(x)$是同一函数．因为，尽管二者的形式不一样，但定义域和对应法则都相同．

(2)$f(x)$和$g(x)$不是同一函数．因为，$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而$g(x)$的定义域是$[-1,1]$.

问题2　确定函数定义域的一般原则是什么？

解答　确定函数定义域的原则有两个：一个是要使函数解析式有意义，如分式中的分母不为零，平方根号下的代数式大于等于零等；二是要满足实际问题的要求，如$S=\pi r^2$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，若S表示半径为r的圆的面积，则定义域为$(0,+\infty)$.

问题3　任意两个函数是否都可以复合成一个复合函数？

解答　否．例如 $y=\sqrt{-u}$ 和 $u=\dfrac{1}{x^2}$ 就不能复合．因为 $u=\dfrac{1}{x^2}$ 的值域 $(0,+\infty)$ 与 $y=\sqrt{-u}$ 的定义域 $(-\infty,0]$ 的交集是空集．而函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 能够复合成 $y=f[\varphi(x)]$，必须是 $u=\varphi(x)$ 的值域完全落在或部分落在 $y=f(u)$ 的定义域中．

例 2　设 $y=\ln u$，$u=x^3$，求它们的复合函数．

解　因为 $u=x^3$ 的值域 $(-\infty,+\infty)$ 部分地落在 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 中，所以它们可以复合．但是，$u=x^3$ 的定义域必须限制成 $(0,+\infty)$，才能让缩小的值域 $(0,+\infty)$ 完全落在 $y=\ln u$ 的定义域中，使复合成为可能．故复合函数为 $y=\ln x^3$，$x\in(0,+\infty)$．

问题 4　分段函数是不是初等函数？

解答　分段函数一般不是初等函数．因为在其不同的定义区间内，其解析式不相同，即它不能用一个解析式来表示．

但是，也有特殊的分段函数，如

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

它与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数，故 $f(x)$ 可以用一个解析式表示，所以 $f(x)$ 可以称为初等函数．

(二)例题选讲

例 3　下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=2^{\sin^2 x}$；　(2) $y=\sqrt[3]{(1+4x)^2}$．

解　(1) $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$．

(2) $y=u^{\frac{2}{3}}$，$u=1+4x$．

例 4　设函数 $y=f(x)$，$x\in[0,4]$，求 $f(x^2)$ 和 $f(x+5)+f(x-5)$ 的定义域．

解　因为 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，对于 $f(x^2)$ 应有 $0\leqslant x^2\leqslant 4$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$．所以，$f(x^2)$ 的定义域为 $[-2,2]$．

对于 $f(x+5)+f(x-5)$ 应有

$$\begin{cases} 0\leqslant x+5\leqslant 4,\\ 0\leqslant x-5\leqslant 4,\end{cases} \quad 即 \begin{cases} -5\leqslant x\leqslant -1,\\ 5\leqslant x\leqslant 9,\end{cases}$$

此不等式组无解，所以，$f(x+5)+f(x-5)$ 的定义域为空集．

例 4　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{3^x+1}{3^x-1}$；

(2) $f(x)=\sin x\, g(x)$，其中 $g(x)$ 为奇函数．

解　(1)因为

$$f(-x)=\frac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1}=\frac{\frac{1}{3^x}+1}{\frac{1}{3^x}-1}=\frac{3^x+1}{1-3^x}=-\frac{3^x+1}{3^x-1}=-f(x),$$

所以，$f(x)=\dfrac{3^x+1}{3^x-1}$ 为奇函数．

(2)因为

$$f(-x)=\sin(-x)g(-x)=-\sin x\cdot(-1)g(x)=\sin x\,g(x)=f(x),$$

所以，$f(x)=\sin x\,g(x)$为偶函数．

（三）课堂练习

1．判断下列命题是否正确，为什么？

(1) 函数 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上是单调增加的； ( )

(2) $y=x^2, x\in(0,+\infty)$是偶函数； ( )

(3) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $y=x+1$ 是不相同的函数． ( )

2．填空题

(1) $y=\sqrt{16-x^2}$的定义域为____；

(2) $y=e^{\ln x^2}$ 是由____复合而成的；

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\geqslant 0,\\ \sqrt{1-x}, & x<0,\end{cases}$

则 $f(0)=$____，$f(-3)=$____．

3．判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x\sin x$；

(2) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

4．下列函数中，哪个是周期函数？对周期函数，指出其周期：

(1) $y=\sin(2x+1)$；

(2) $y=\cos x^2$.

四、课外思考与练习

1．选择题

(1) 函数 $y=1+\sin x$ 是( )．

(A) 奇函数； (B) 偶函数；

(C) 单调增加函数； (D) 有界函数．

(2) 不是复合函数的是( )．

(A) $y=(\dfrac{1}{3})^x$； (B) $y=e^{-x^2+1}$；

(C) $y=\ln\sqrt{1-x}$； (D) $y=\sin(3x+1)$.

(3) 下列是初等函数是( )．

(A)$x=1$，x 是自变量； (B) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

(C) $e^2+\cos 25°$； (D) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2. 判断下列命题是否正确,为什么?

(1) 在相同定义域内,两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 在相同定义域内,一个奇函数与一个偶函数之积是偶函数.

3. 判断下列各对函数是否相同:

(1) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, g(x)=1$;

(2) $f(x)=\ln\frac{x}{1+x}, g(x)=\ln x-\ln(1+x)$.

4. 设 $f(x)=x^2, g(x)=e^x$,求:

(1) $f[g(x)]$; (2) $g[f(x)]$.

5. 求 $y=1+\ln(x+2)$的反函数.

第二讲　极　　限

一、目的要求

1. 了解数列极限和函数极限的定义．

2. 掌握极限四则运算法则，会用两个重要极限求极限，会用极限存在准则判别极限是否存在．

3. 知道极限的唯一性、有界性和保号性等性质．

4. 了解无穷小的概念，会对无穷小进行比较，会用等价无穷小代换的方法求极限．

二、基本训练

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ 表示当 n 无限增大时，数列通项 u_n ____．

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 表示当自变量 x 趋近于 $x_0(x\neq x_0)$ 时，相应的函数值 $f(x)$____．

3. 极限运算法则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 成立的条件是____．

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$ ____，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=$ ____．

5. 无穷小是以____为极限的变量．

6. 在自变量的同一变化过程中，有限个无穷小的代数和是____，有界函数与无穷小的乘积是____．

7. 若在自变量的某变化过程中，$\alpha=o(\beta)$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=$ ____．

三、疑难解析与课堂练习

（一）疑难解析

问题 1　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是否一定有定义？

解答　不一定．因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在与否和 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义无关．例如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义．

问题 2　当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在的情形有哪几种？

解答　主要有三种：(1)左、右极限至少有一个趋向于无穷大．例如，当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的左、右极限分别趋于 $-\infty$ 和 $+\infty$．(2)左、右极限都存在，但不相等．这种情况一般在分段函数的分段点处出现．(3)无限振荡．例如当 $x\to 0$ 时，$f(x)=2\sin\dfrac{1}{x}$ 将在 -2 与 2 之间无限振荡，而且 x 越趋近于零，$f(x)$ 振荡的频率越大．

问题 3 $f(x)=\dfrac{1}{x}$是无穷小,对吗?

解答 不对.因为该命题没有指出自变量的变化过程,所以函数的变化趋势无从可言.显然当$x\to\infty$时,$f(x)=\dfrac{1}{x}$才是无穷小.当x趋于一个确定数值,如$x\to\dfrac{1}{2}$时,$f(x)=\dfrac{1}{x}\to 2$,它不是无穷小.

问题 4 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$存在,那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$是否一定都存在?也即是否一定有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$?

解答 不一定.例如:$f(x)=x^2$,$g(x)=\dfrac{1}{x}$,显然$\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}x=0$,但是$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$不存在.所以,我们一定要注意,只有在$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在的条件下,极限的四则运算法则才成立(在商的运算法则中分母函数极限不能为零).

(二)例题选讲

例 1 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 对于不能直接利用极限运算法则求极限的情形,首先应对所给表达式作变形处理后再求极限,一般方法有:通分,有理化,约公因子,数列求和,化简,变量代换,等价无穷小代换,化成重要极限形式等.

(1) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}-n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n}{2}[1+(2n-1)]}{n+3}-n\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+3}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+3}=-3.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{x+\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-4\cos^3 x+3\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x-4\cos^3 x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x(1-\cos^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x\sin^2 x}{x^2}$$
$$=4\lim_{x\to0}\cos x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=4.$$

例 2 已知$f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x<0,\end{cases}$问$a$为何值时$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在,并求此极限值.

解 对于分段函数,在讨论分段点处的极限时,因为函数在分段点两边的解析式不同,所以一般是先求它的左、右极限.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x}=0,$$

(注意,上式的 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to0$ 时,虽没有极限,但它是有界函数,有界函数与无穷小之积仍是无穷小)

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(a+x^2)=a.$$

要使 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,必须 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,即 $a=0$,所以,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

例3 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求常数 a,b 的值.

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0.\end{aligned}$$

由有理函数的极限知,上式成立,必须 x^2 和 x 的系数等于零,即

$$\begin{cases}1-a=0,\\a+b=0.\end{cases}$$

于是求得 $a=1,b=-1$.

例4 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ 是否正确?为什么?

解 不正确.因为 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,这说明当 $x\to0$ 时,$e^{\frac{1}{x}}$ 不是无穷大.

例5 证明:当 $x\to1$ 时,$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小.

证 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}&=\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-\sqrt[3]{x}}\\&=\lim_{x\to1}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=3,\end{aligned}$$

所以,当 $x\to1$ 时,$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小.

(三)课堂练习

1. 下列命题是否正确?为什么?

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$ 也存在; ( )

(2) 很小很小的数是无穷小; ( )

(3) 无界函数不一定是无穷大. ( )

2. 填空题

(1) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\sin2x}{x}=1$,则 $a=$ ____;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,则 $x_0=$ ____;

(3) 当 $x\to 0$ 时,$x^n=o(x^2)$,则 n ____.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+1}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$.

四、课外思考题与练习

1. 选择题

(1) $f(x)$在点 $x=x_0$ 处有定义是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$有极限的( ).

(A) 充分条件; (B) 必要条件;

(C) 充分必要条件; (D) 无关的条件.

(2) 下列极限存在的是( ).

(A) $\lim\limits_{x\to 0}3^{\frac{1}{x}}$; (B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$; (D) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(4-x^2)}{2-x}=$( ).

(A) 4; (B) 1;

(C) 2; (D) 0.

2. 指出下列运算中的错误:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}(1-x)}=\infty$.

3. 在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$与$g(x)$的极限都不存在,那么$f(x)+g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$的极限是否必不存在?

4. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1-x}=1$,所以当 $x\to 0$ 时,$\cos x$ 和 $1-x$ 是等价无穷小. 该命题正确吗?为什么?

5. 设 $f(x)=x^2$,求$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+\sin(x-1), & x\leqslant 1,\\ 2x-1, & x>1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

7. 当 $x\to 0$ 时,下列函数哪些是 x 的高阶无穷小?哪些是同阶无穷小或等价无穷小?

(1) $x^2+\sin x$; (2) $\tan^3 x$; (3) $\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x)$.

第三讲　函数的连续性

一、目的要求

1．理解函数连续的定义和间断点的概念．

2．掌握函数在点 x_0 处连续的条件，会求函数的连续区间和间断点，会判断间断点的类型．

3．了解连续函数的运算、初等函数的连续性以及闭区间上连续函数的性质．

二、基本训练

1．函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须同时满足的三个条件是____．

2．如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在点 a 处____，在点 b 处____，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续．

3．间断点的类型有____种．

4．一切初等函数在其定义区间内是____．

5．如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=$ ____，这个性质称为零点定理．

三、疑难解析与课堂练习

（一）疑难解析

问题 1　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么 $f(x)$ 在点 x_0 处是否一定连续？

解答　不一定．因为函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续必须同时满足三个条件：(1) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义；(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$．仅有条件(2)并不能保证条件(1)和(3)也成立．反之，如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则一定有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在．

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}$　求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$．

解　因为
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=1,$$
所以
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$
但是
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1\neq f(0)=0,$$
因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．

问题 2　若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处都不连续，则函数 $f(x)+g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 处是否一定不连续？

解答　不一定．例如函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0,\end{cases}$$

它们在 $x=0$ 处都不连续，但是 $f(x)+g(x)=0, f(x)\cdot g(x)=-1$ 在 $x=0$ 处都连续．

问题3 函数的间断点是如何分类的？分段函数的分段点是否一定是间断点？

解答 若 $f(x)$ 在点 x_0 处满足下列条件之一，则点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点：(1) $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$．根据(2)把间断点分为两类：左、右极限都存在的不连续点称为第一类间断点，其中包括可去间断点和跳跃间断点；左、右极限至少有一个不存在的点称为第二类间断点．

分段函数的分段点不一定是间断点．

例2 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$ 的间断点．

解 显然，自变量 x 在 0 和 1 处，$f(x)$ 无定义，所以 $x=0, x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点．

在 $x=0$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-1}=0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点．

在 $x=1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\infty$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点．

注意，在找 $f(x)$ 的无定义点时，不要随意变换函数的表达式，否则可能使函数失去无定义的点．如将本题函数的原表达式变为 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 后，$f(x)$ 就失去了一个无定义的点 $x=0$.

问题4 在求复合函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 时，是否一定要 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续？

解答 不一定．但 $\varphi(x)$ 必须在 $x\to x_0$ 时极限存在，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，而且要求 $f(u)$ 在 $u=a$ 处连续．如果满足这些条件，就有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a).$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln\dfrac{1-\cos x}{x^2}$．

解 $\ln\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 是 $\ln u$ 与 $u=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 的复合，$u=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 虽在 $x=0$ 处不连续，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，而 $\ln u$ 在 $u=\dfrac{1}{2}$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to 0}\ln\frac{1-\cos x}{x^2}=\ln\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\ln\frac{1}{2}.$$

（二）例题选讲

例4 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant 1,\\ |x-1|, & |x|>1,\end{cases}$

试求：(1) $f(x)$ 的定义域；(2) $f(x)$ 的间断点，并指明其类型；(3) $f(x)$ 的连续区间．

解 为了讨论方便,将 $f(x)$变形为:

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1,\\ \cos\dfrac{\pi}{2}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$$

(1) 显然 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 因为在$(-\infty,-1)$、$(-1,1)$和$(1,+\infty)$三个区间内,$f(x)$都是初等函数,所以 $f(x)$在这三个区间内连续．下面讨论函数在分段点 $x=-1$ 和 $x=1$ 处的连续性．

在 $x=-1$ 处,

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\cos\frac{\pi}{2}x=0,$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(1-x)=2.$$

左、右极限存在但不相等,所以 $x=-1$ 是 $f(x)$的跳跃间断点．

在 $x=1$ 处,

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)=0,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\cos\frac{\pi}{2}x=0.$$

左、右极限相等,且 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$,所以 $f(x)$在 $x=1$ 处连续．

(3) $f(x)$的连续区间为$(-\infty,-1)$,$(-1,+\infty)$.

注意,本题说明分段函数的分段点是可疑的间断点,必须加以讨论．

例 5 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}$.

解

(1)因为函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$在 $x=\dfrac{\pi}{4}$处连续,所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+x)}{\sin 2x}=\frac{\ln(1+\frac{\pi}{4})}{\sin(2\times\frac{\pi}{4})}=\ln(1+\frac{\pi}{4}).$$

(2) 因为

$$\frac{e^{2x}-e^x}{\sin 2x-\sin x}=\frac{e^x}{2\cos x-1}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x},$$

而 $\dfrac{e^x}{2\cos x-1}$ 在 $x=0$ 处连续,故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2\cos x-1}=1$.

对于 $\dfrac{e^x-1}{x}$,令 $u=e^x-1$,则 $x=\ln(1+u)$,于是有

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{u}{\ln(1+u)}=\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

因为当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$，而 $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln \mathrm{e}}=1.$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{\sin 2x-\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2\cos x-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{2\cos x-1}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.\end{aligned}$$

(三) 课堂练习

1. 下列命题是否正确？为什么？

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在．　　(　　)

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\lg(1-\mathrm{e}^x)=\lg\lim\limits_{x\to 0}(1-\mathrm{e}^x)$．　　(　　)

(3) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，则 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义．　　(　　)

2. 填空题

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\mathrm{e}^{\varphi(x)}=$____．

(2) $x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的____间断点．

(3) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ 的连续区间是____．

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 3x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$．

4. 求下列函数的间断点，并指出其类型：

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}$．

5. 试证方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间．

四、课外思考与练习

1. 若函数 $|f(x)|$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续吗？

2. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$g(x)$ 在点 x_0 处不连续，则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处是否连续？

3. 选择题

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，是 $f(x)$ 在 x_0 处连续的(　)

(A) 充分条件；　　(B) 必要条件；