



轴测投影学

山东工学院制图教研室编

轴 测 投 影 学

山东工学院制图教研室 编

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

内 容 提 要

本书主要讲述轴测投影的原理与方法,共分十章:第一、二章讨论了正轴测投影的基本原理;第三、四、五章介绍了几何元素、圆及几何体的基本作图方法;第六、七、八章主要讨论运用画法几何投影变换原理绘制轴测投影的方法;第九章介绍射影几何的对应原理及其在轴测投影中的应用;第十章讲述了斜轴测投影的原理。

本书可供工程图学工作者、研究生、科技人员、工业美术工作者以及工科院校学生阅读,也可作为工程绘画学习班教材。

轴 测 投 影 学

山东工学院制图教研室编

•

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

•

787×1092毫米16开本 17.25印张 4插页 231千字

1983年7月第1版 1983年7月第1次印刷

(平)定价 1.95 元 印数: 1—3,000

(精)定价 3.65 元 印数: 1—1,500

书号 15195·125

前 言

在科技和生产领域中所使用的工程图，长期以来被誉为工程界的语言，这是由于它们具有独特的表现力，能详尽而准确地反映出工程对象的形状和大小，便于依图进行生产和科研，起到了文字、语言所难以起到的作用。在当今科技、生产突飞猛进的情况下，工程图的用途越来越广泛，工程施工、课题研究、创造发明、技术教育、传播文化、交流技术、普及知识、产品介绍等各个方面，随时都需要有相应的表达方法和形式来绘制人们所从事的对象，而且对表达方法提出了更高的要求，因此工程图又产生了多种多样的品种，工程绘画就是其中之一。这种图画是以美术手法来绘制工程对象的立体形象，可称得上是科技、绘画几何学和美术的融合体，它既保持了工程图的特点，又具有较好的直观性和艺术性，已为人们喜闻乐见。它的作用不同于一般的绘画。它所描绘的对象是建筑物、厂房设备、机器、电器、仪表、交通工具以及武器装备等。更为突出的特点是用细致、准确的特种手法，绘制出工程对象的结构造型、工作原理、装配关系、调整使用方法等。因此，这种图画必须具有严格的绘图比例、清晰的表达方法、准确的轮廓以及较强的立体感，使所绘的物体形象立跃于画面，令人产生见图如见物的实感。实践证明，工程绘画已成为人们从事科技、生产、教育活动及国际交往中的得力助手，常用来表达设计意图，方案构思，记录结构，提高空间想象力和造型艺术设计能力等。

怎样才能使所绘的图画轮廓准确呢？这个问题就是轴测投影与透视投影所要解决的课题。轴测投影与透视投影都是根据投影原理而建立起来的完整而系统的理论，其中轴测投影是用平行投影法来研究绘制立体图（称为轴测图）的方法。它具有理论严谨而简单、画图简便而省力、形象真实而直观、图形清晰而准确等特点，用它来表达机械工程方面的立体形象是令人满意的。

为了满足广大工程图学工作者、研究生、科技人员、工业美术工作者以及工科院校学生学习轴测投影的需要，我们编写了这本《轴测投影学》。编写中力求理论与实践统一，在讲解理论的基础上着重于绘图方法的阐述。所涉及的理论基础是画法几何、解析几何和射影几何。这些内容都不难理解，读者只要稍加复习，即可顺利地学习这门知识。

本书第一章至第八章阐述了正轴测投影的理论与方法，第九章介绍射影几何仿射对应原理，第十章介绍斜轴测投影理论。书中给出了大量的图例，供读者绘图时参考。

由于编者的水平有限，缺点和错误在所难免，希望读者提出宝贵意见。

编 者

一九八二年九月

目 录

第一章 轴测投影的基本知识

第一节	轴测投影的形成	2
第二节	轴测投影体系中的要素名称及名词术语	7
第三节	轴测投影的特性及基本作图法	9

第二章 正轴测系的基本参数

第一节	正轴测投影体系——三轴四面体	14
第二节	正轴测投影的轴向变形系数	18
第三节	正轴测系中的轴间角	26
第四节	用图解法确定轴测参数	31

第三章 几何元素的正轴测投影

第一节	点的正轴测投影	37
第二节	直线的正轴测投影	39
第三节	平面的正轴测投影	44
第四节	在轴测投影中平面上取点及直线的方法	46
第五节	直线与平面、平面与平面的平行关系	48
第六节	直线与平面、平面与平面的相交问题	49
第七节	直线与平面垂直	54

第四章 圆的正轴测投影

第一节	圆的正轴测投影特性	59
第二节	坐标面上的圆或平行于坐标面的圆的正轴测投影	60
第三节	垂直于坐标面的圆的轴测投影	68
第四节	倾斜平面上圆的轴测投影	72
第五节	椭圆的几何作图及近似画法	75

第五章 基本几何体的轴测投影

第一节	平面立体的正轴测投影	86
第二节	圆柱、圆锥、球的轴测投影	90
第三节	立体的截面及截交线	96
第四节	立体的相贯线	104

第六章 轴测投影中的投影变换（一）

第一节	变换投影面法	113
-----	--------------	-----

第二节	坐标面翻转重合法	129
第三节	轴测投影面重合法	139

第七章 轴测投影中的投影变换 (二)

第一节	旋转法	152
第二节	尺度圆球法	163
第三节	运动物体在各个位置上的轴测投影	173

第八章 曲线及曲面的正轴测投影

第一节	曲线的正轴测投影	187
第二节	曲面轴测投影的一般画法	194
第三节	回转曲面的轴测投影	197
第四节	螺旋面的轴测投影	210
第五节	不规则曲面的轴测投影	217

第九章 仿射对应原理及其在轴测投影中的应用

第一节	平面场的透视仿射对应	218
第二节	一般的仿射对应	227
第三节	透视仿射对应原理在绘制轴测图中的应用	232

第十章 斜轴测投影

第一节	斜轴测投影的变形系数	238
第二节	斜轴测投影的轴间角	245
第三节	轴测投影的基本定理	247
第四节	斜轴测投影的投影变换	253
第五节	两种特殊形式的斜轴测投影	261

第一章 轴测投影的基本知识

在科技工程领域中，常用多面正投影图、轴测投影图和透视投影图来表达物体的形状。每种投影图都是按一定的投影原理和方法画出的。例如，我们常用的三视图是用互相平行的投射光线将物体分别向三个互相垂直的投影面作垂直投射所得到的 一组图形（图 1—1）；轴测投影图是用一束平行投射光线将物体向一个投影面投射所得到的单面投影图（图 1—2）；透视投影图则是用一束具有射影中心的辐射光线将物体向一个投影面投射所得到的单面投影图（图 1—3）。

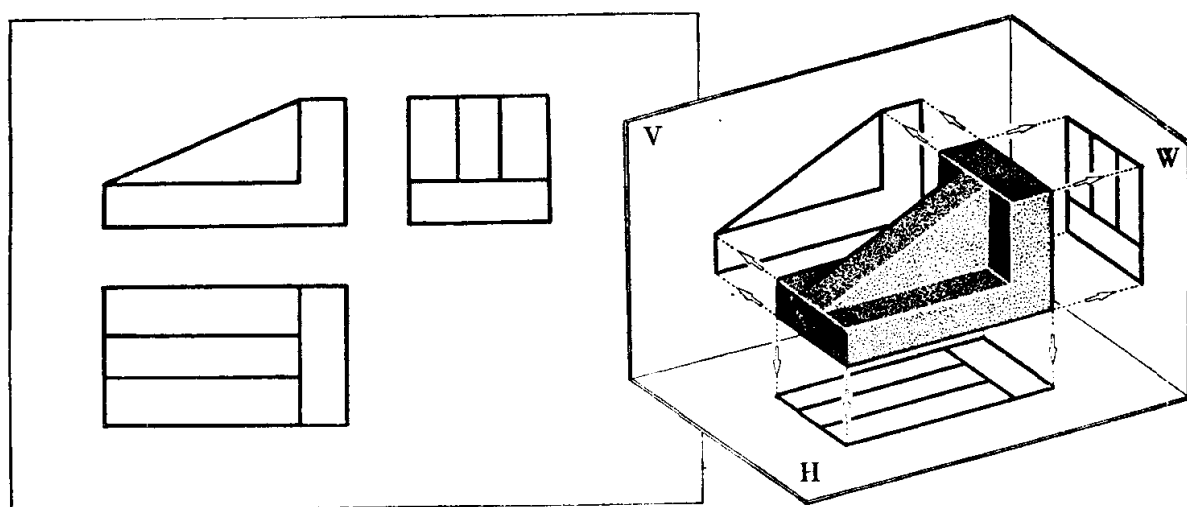


图 1—1

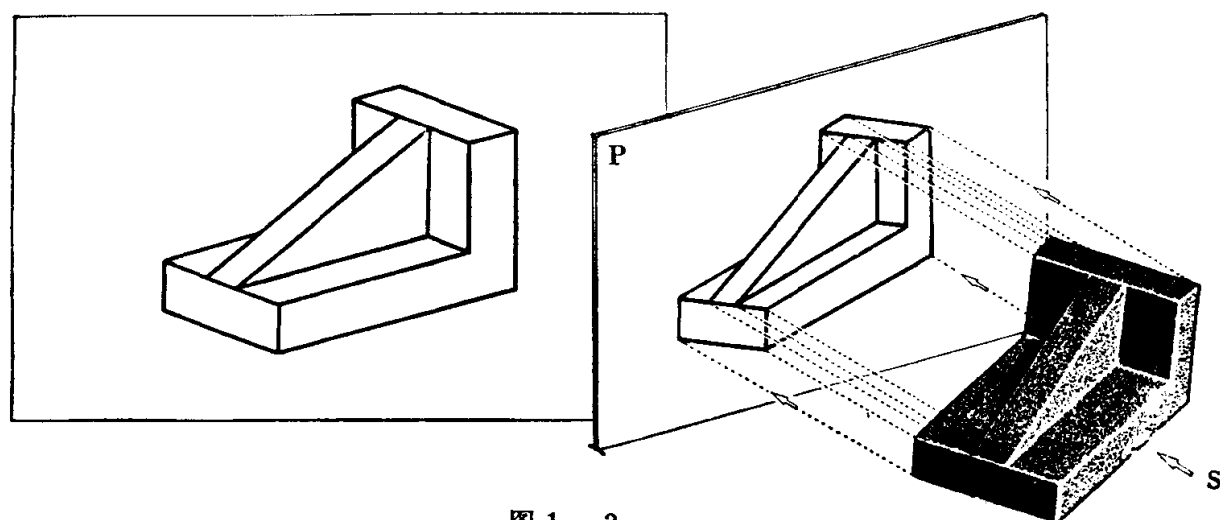


图 1—2

我们知道，多面正投影图能准确而完整地表达物体各向度的形状和大小，因此在工程制图中被广泛采用。不过，这样的投影图缺乏立体感，物体的确切形状还必须经过投

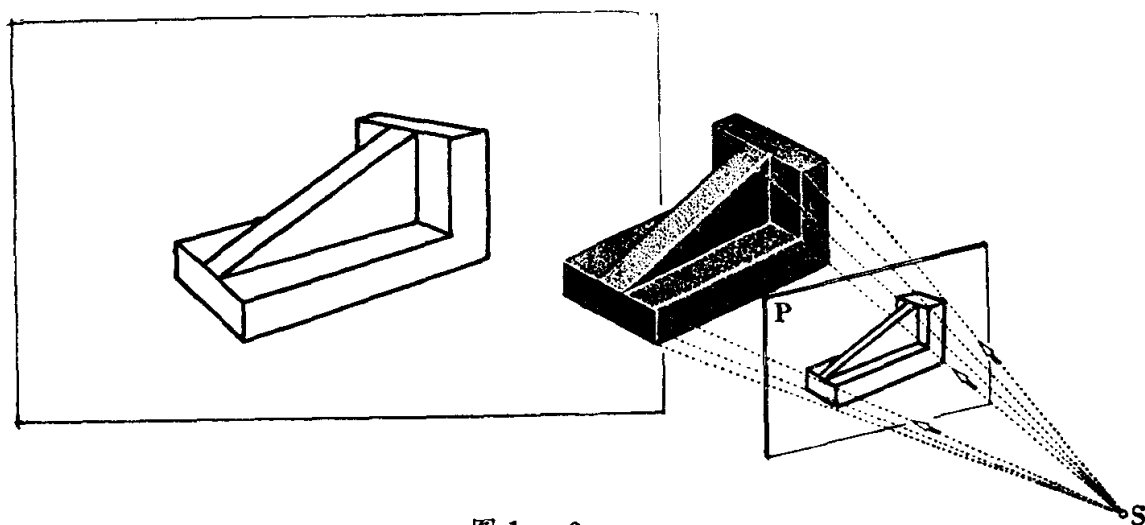


图 1—3

影分析和空间想象才能看懂，这对未学过投影知识的人来说，无疑是个难题。轴测投影图和透视投影图却是在一个投影面上反映物体三个向度的形状，因此它们具有较好的立体感，一般人都能看懂。但由于它们都属于单面投影，不能全面地表达出物体的确切形状，因此在工程上的应用受到一定的限制。尽管如此，它们仍是人们所常用的一种表达形式，尤其是轴测投影具有理论简单、画图容易、度量方便、形象逼真等优点，特别适用于表达机器零件和部件的立体形状。为此，本书将以较多的章节来阐述轴测投影的原理和作图方法。

第一节 轴测投影的形成

一、轴测投影体系

任何一种投影体系都必须具有投影光线、投影面和物体三个基本要素。轴测投影体系也不例外，它是由一束平行光线、投影平面（称轴测投影面）和被投影的物体所组成的。除此之外，还需引进确定物体的空间直角坐标轴这一要素，以便在轴测投影中利用它的投影来确定物体的大小和空间位置。

我们将物体连同坐标轴一起向轴测投影面进行投影，则在投影面上所得到的投影叫做轴测投影（图 1—4）。其中，坐标轴 x 的轴测投影叫做轴测投影轴或轴测坐标轴，简称轴测轴。两轴测轴的夹角叫做轴间角。

上述轴测投影我们必须在纸面上把它画出来，所画出的投影图叫做轴测投影图（图 1—5）。

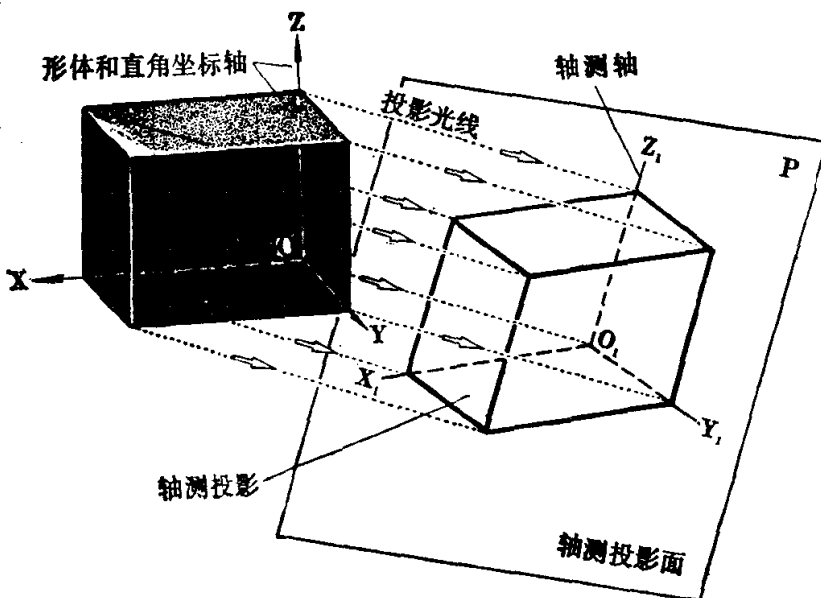


图 1—4

该纸面就叫做画平面，简称画面。这里请读者注意两个问题：

(一) 投影面和画面是两个不同的要素，当轴测投影面平行或重合于画面时，轴测投影面就可作为画面，画面上得到的图形就是轴测投影的实形，如图 1—5 所示的图形。当轴测投影面不平行于画面时，则画面上的图形不反映轴测投影的实形，只能是轴测投影的投影，如图 1—4 中 P 面上的图形。

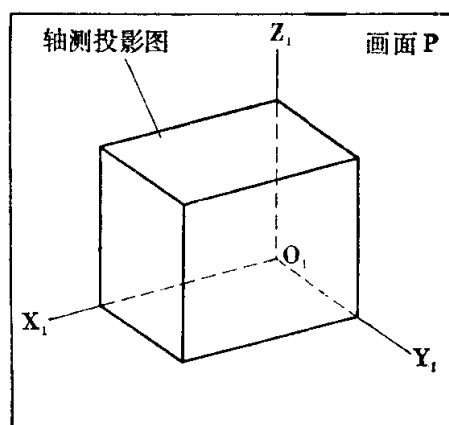


图 1—5

(二) 画面必是与观察者的视线（平行视线）成垂直的平面。观察者的视线与投影光线又是两个不同的要素，它们有时重合，有时不重合。例如，在正投影中，当投影平面重合于画面时，这时投影光线必重合于观察者的视线。而在斜投影中，即使投影平面与画面重合，投影光线却与观察者的视线方向不一致。这些概念对我们进一步讨论轴测投影理论具有重要的意义。

根据投影光线与投影面的相对位置不同，可把轴测投影体系分为两种：

(1) 当投影光线与投影面垂直时，所建立起来的投影体系叫正轴测投影体系（图 1—6）。

(2) 当投影光线与投影面不垂直时，所建立起来的投影体系叫斜轴测投影体系（图 1—6）。

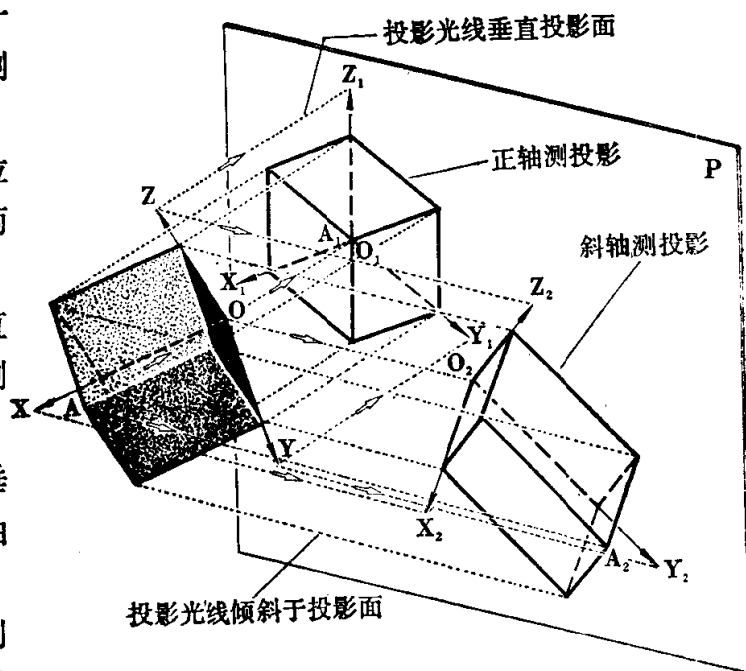


图 1—6

两体系中的投影分别称为正轴测投影和斜轴测投影。在上述两种体系中，由于物体或直角坐标轴、投影面、投影光线三者的相对位置变化无穷，又可产生多种形式的轴测投影（图 1—7）。

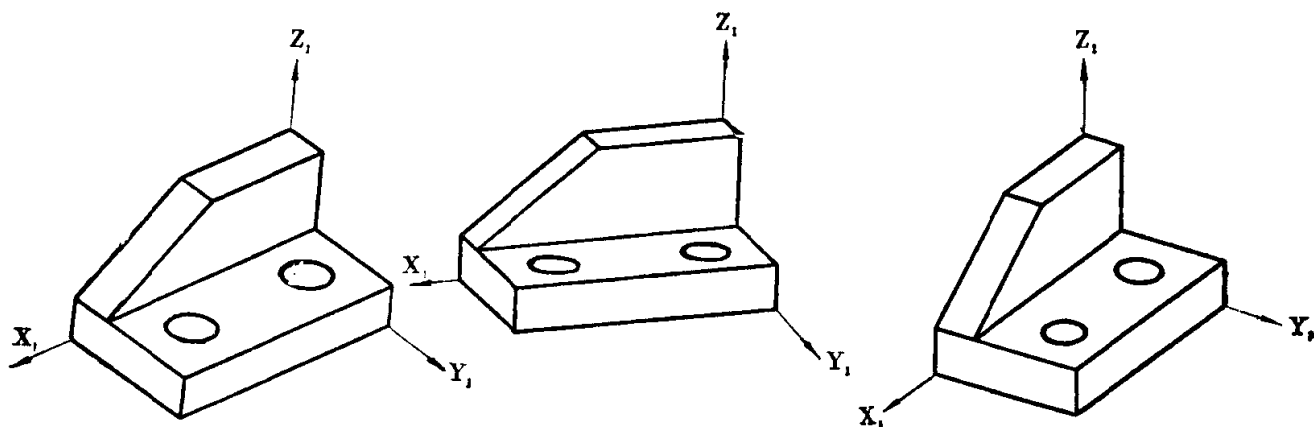


图 1—7

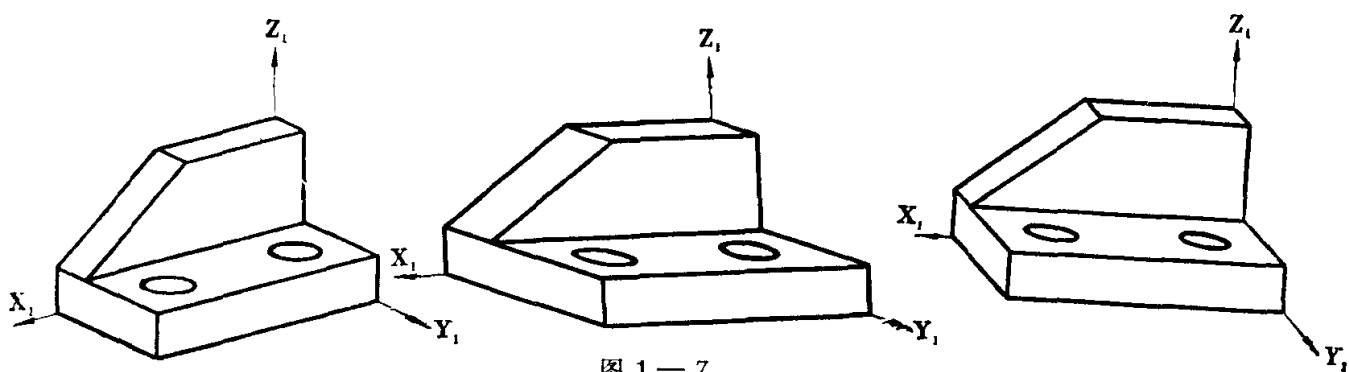


图 1—7

为了便于研究轴测投影形成过程中的一些变化规律，常将上述三要素中的一个或两个的空间位置固定不动，而变动另两个或一个的位置。例如，在研究正轴测投影的形成过程中，一种做法是设投影面与投影光线的位置固定不动，而改变直角坐标轴以及由它确定的物体的空间位置，从而得到一系列正轴测投影图（图 1—8）。另一种做法是固定直角坐标轴以及由它确定的物体的空间位置，而变动投影面和投影光线的位置（当然要保持两者之间的垂直关系）来得到一系列正轴测投影图（图 1—9）。再如，斜轴测

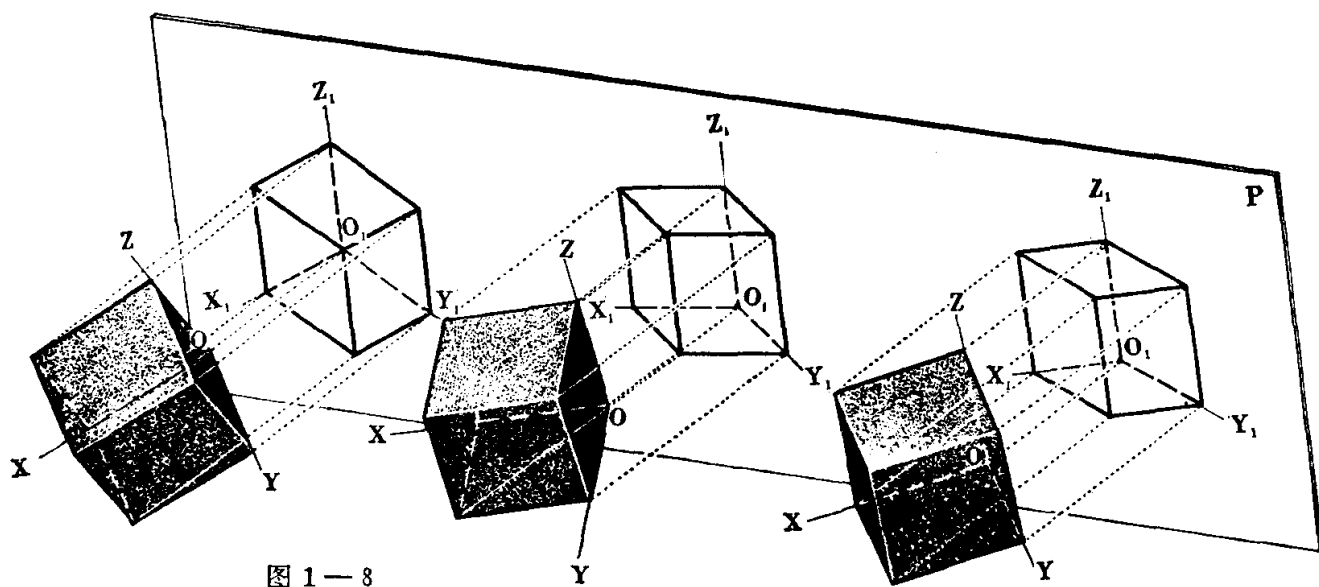


图 1—8

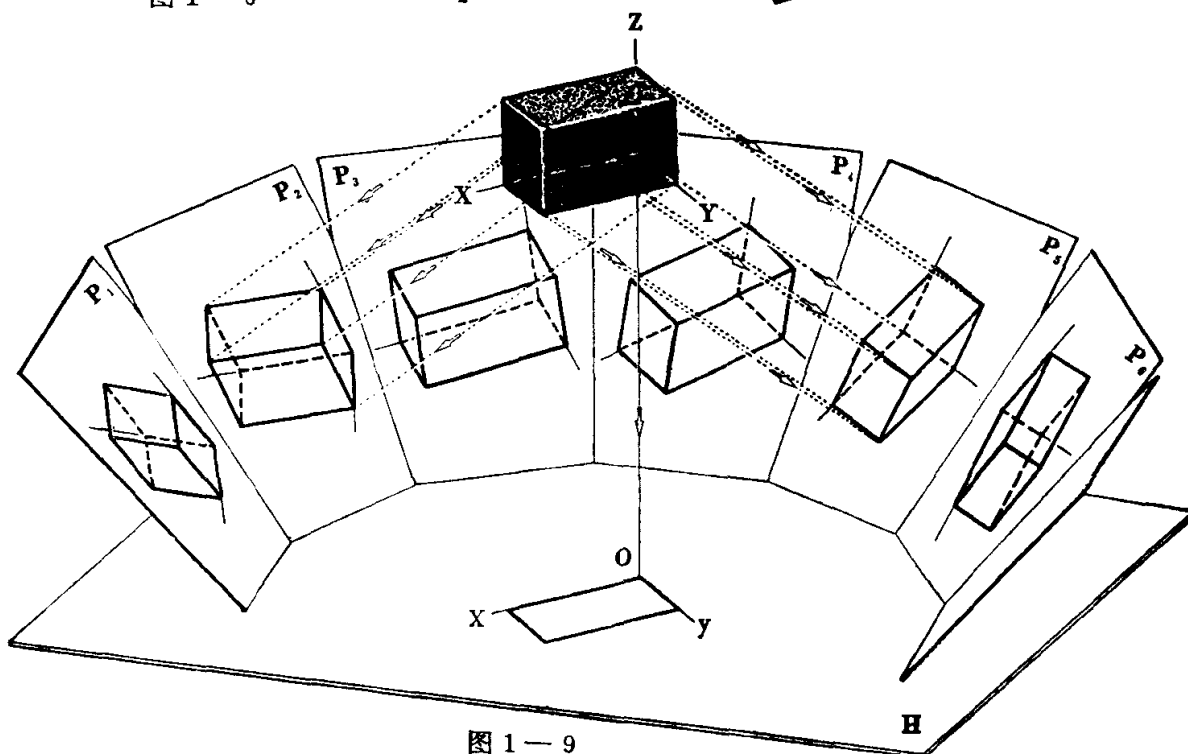


图 1—9

投影中，一般是将空间直角坐标系及物体和投影面的位置固定下来，而改变投影光线的方向，从而得到一系列斜轴测投影（图 1—10）。我们也可以固定物体和投影光线的位置，改变投影面的位置（图 1—11）。固定或变动投影要素的位置，目的是要得到立体感较强的轴测投影图，并从中得出一些变化规律，以指导画图。

二、“轴测”的含义与实质

轴测投影为什么采用“轴测”二字来命名？它的含义和实质是什么？要弄清这一问题，还需从“坐标”讲起。

大家都知道，具有一定几何形状的物体，它的形状大小和空间位置是用空间直角坐标系来表示的。空间直角坐标系必须

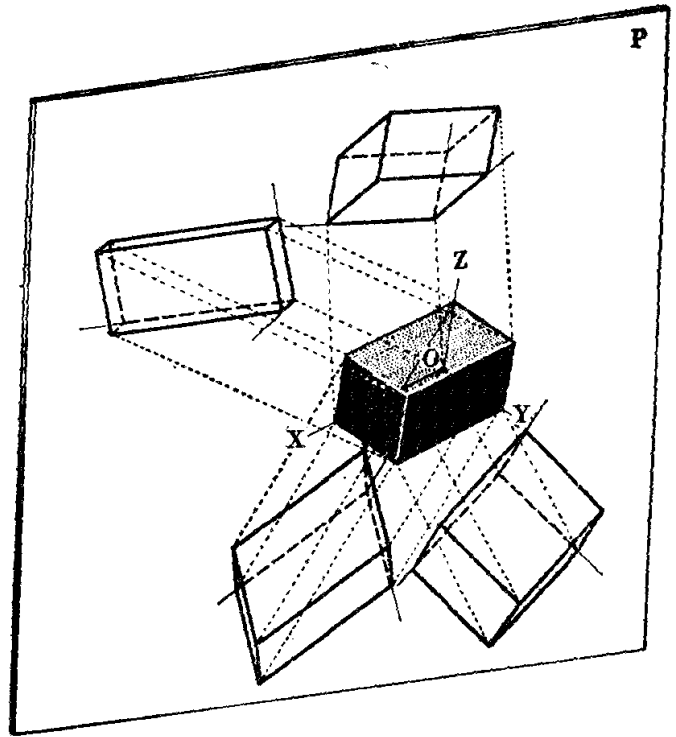


图 1—10

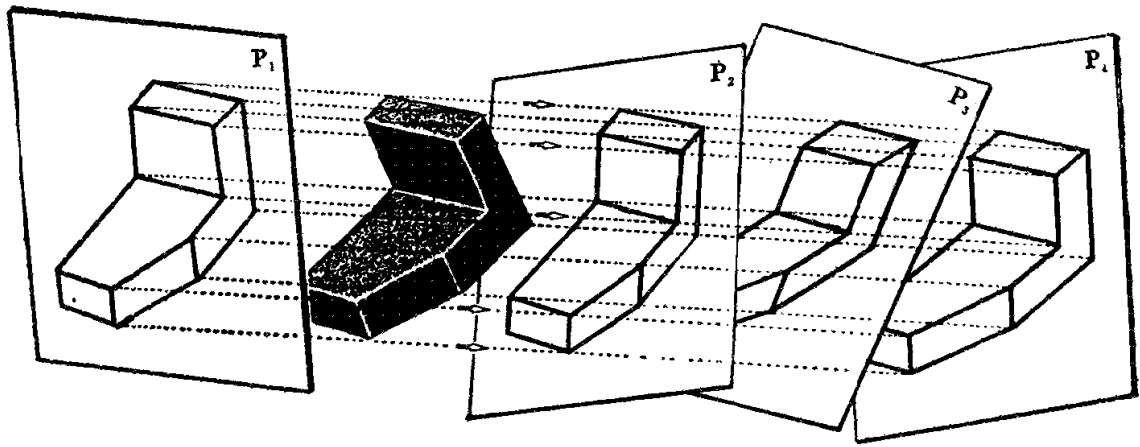


图 1—11

包括互相垂直的三坐标轴 OX 、 OY 、 OZ （简称原坐标轴）及每条轴的坐标单位 e_x 、 e_y 、 e_z （简称原坐标单位或自然单位）。三坐标轴可以说是确定物体长、宽、高三个向度大小和确定物体空间位置的“定位基准”，而自然单位就是度量物体上某点坐标值的基本长度，三轴的自然单位一般应该取为一致，即 $e_x = e_y = e_z = e$ 。由于三坐标轴的轴测投影是轴测坐标轴，因而自然单位长度的轴测投影便是轴测单位。于是，轴测坐标轴和轴测单位便组成了轴测坐标系（图 1—12）。物体上某点的轴测坐标就要沿轴测轴按轴测单位去确定和

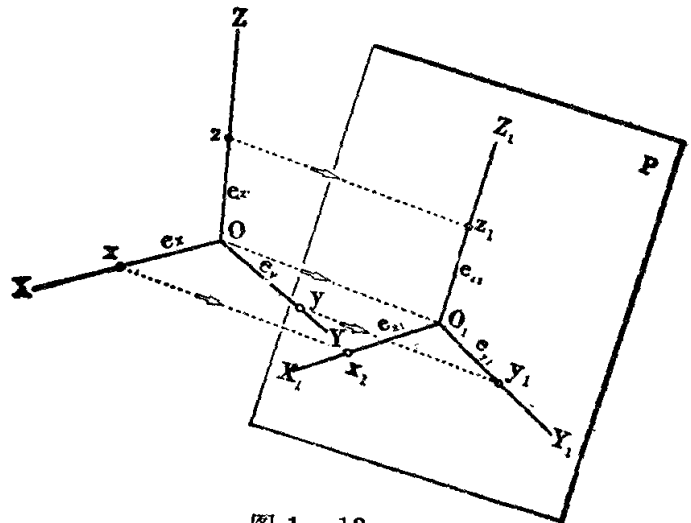


图 1—12

度量。例如图 1—13 中长方体 A 点的直角坐标值 x 、 y 、 z ，是按坐标单位 e_x 、 e_y 、 e_z 自坐标原点 O 沿各坐标轴方向量取的。那么， A 点的轴测投影 A_1 的轴测坐标值 X_1 、 Y_1 、 Z_1 就必须按轴测单位 e_{x_1} 、 e_{y_1} 、 e_{z_1} 自轴测坐标原点 O_1 沿轴测轴方向变量。因此，只要在画面上有了轴测坐标系及物体的轴测投影，我们就能够在单面投影中来确定该物体的大小和几何形状、物体各部分之间的相对位置以及物体在空间的位置。这就说明了在轴测投影要素中加进坐标轴的必要性。同时，也说明了“轴测”的意义和实质。

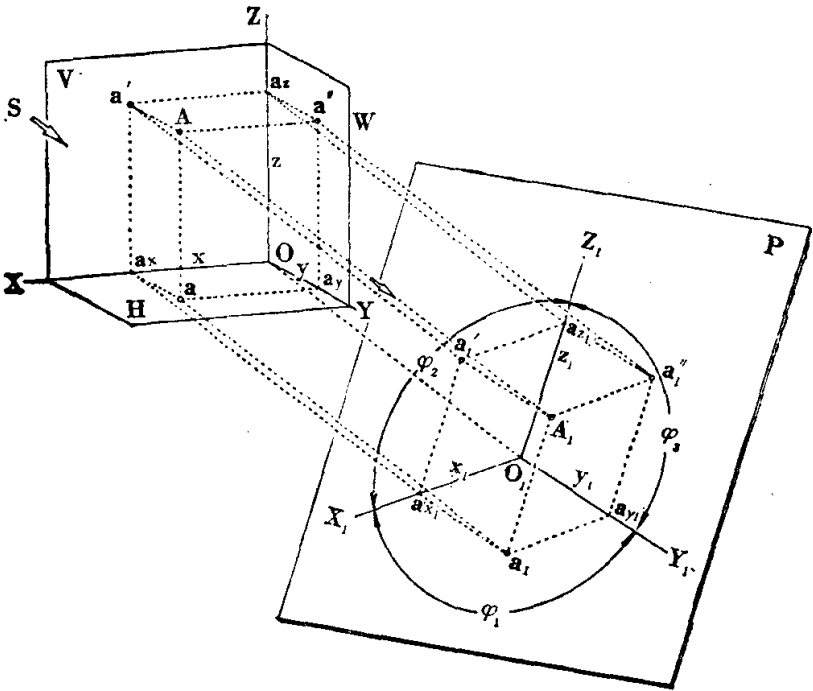


图 1—13

三、轴测轴的变形系数

在一般情况下，轴测单位长度并不等于原坐标单位长度。例如，在正轴测投影体系中（图 1—14），我们在 X 轴上取一单位长度 e_x ，则其轴测投影 e_{x_1} 必小于 e_x 或等于 e_x 。而在斜轴测投影体系中， e_{x_1} 除可能小于或等于 e_x 外，有时还可能大于 e_x 。其他两轴也有同样的情况。因此，在画面上沿某轴测轴方向度量相应的轴测坐标时，就必须考虑到它的伸缩变形。我们用 $\frac{e_{x_1}}{e_x} = u$ 、 $\frac{e_{y_1}}{e_y} = v$ 、 $\frac{e_{z_1}}{e_z} = w$ 来表

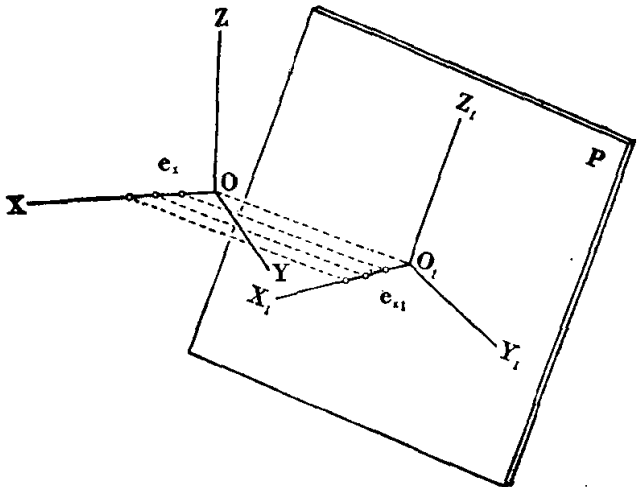


图 1—14

示轴测单位的变形程度，也就是说，某点的轴测坐标要按照上述比值来确定。式中， u 、 v 、 w 分别称为 X 、 Y 、 Z 三轴的轴向变形系数。由于投影三要素的相对位置不同，则轴向变形系数有时小于 1，有时等于 1，有时还大于 1。并且在一定的投影条件下，轴测投影的三个变形系数可能是相等的（称等测投影），也可能是不相等的（称三测投影），或者是其中某两个是相等的（称二测投影）。

自然单位与轴测单位也可称为自然尺度与轴测尺度。单位长度可长可短，因此只要在三条轴上分别取一线段 Ox 、 Oy 、 Oz ，令其为自然尺度，则它们的轴测投影 O_1x_1 、 O_1y_1 、 O_1z_1 便是轴测尺度。空间其他平行该三轴的线段的轴测投影，均需按相应的轴测尺度来确定其长度（图 1—15）。轴测尺度与自然尺度的比值仍是轴向变形系数，即 $\frac{O_1x_1}{Ox} = u$ 、

$\frac{O_1 y_1}{O_y} = v, \frac{O_1 z_1}{O_z} = w$ 。当三坐标轴的自然尺度均取为 1 时，则各轴测尺度便等于相应的轴向变形系数。

变形系数是轴测投影的主要参数，也是区分轴测投影形式的主要标志。

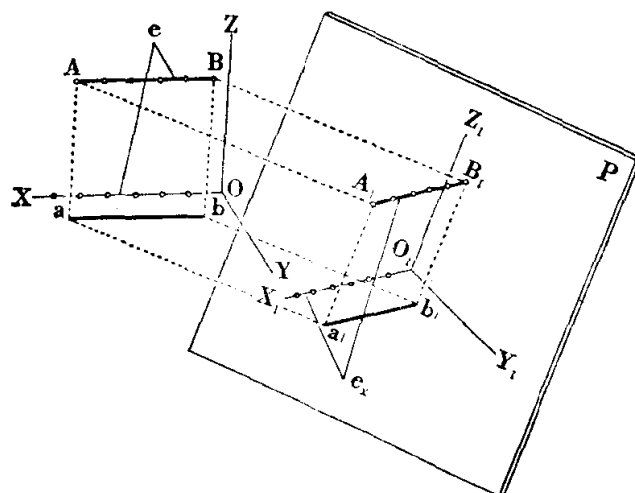


图 1—15

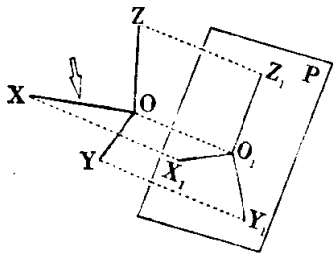
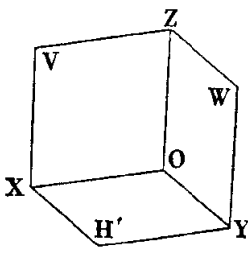
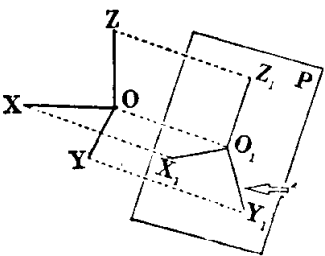
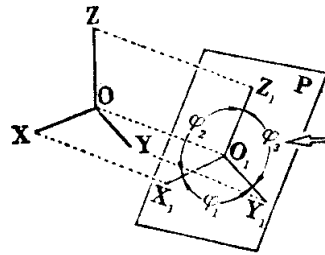
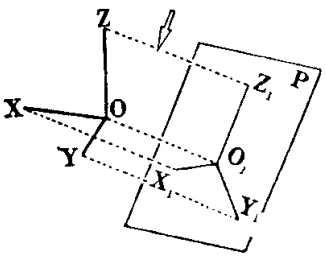
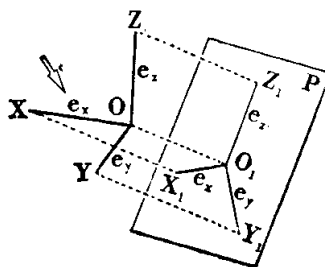
第二节 轴测投影体系中的要素名称及名词术语

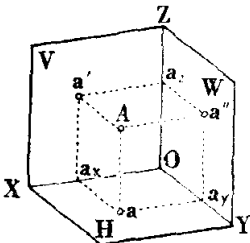
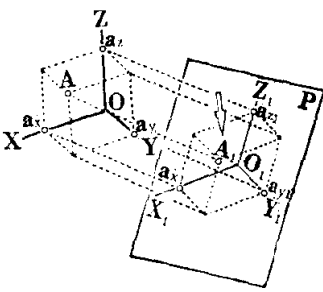
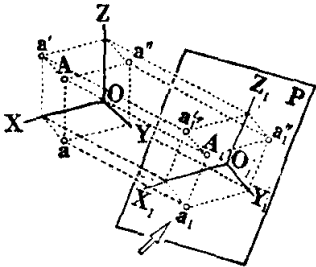
为了便于讨论轴测投影问题，下面列表介绍部分名词与术语（表 1—1）。其中有些已在前面说明，有些将在后面详细介绍。除列表的名词外，还有许多专用名词将在有关章节中说明。

表 1—1

轴测投影的要素名称及名词术语

名 称	代 号	图 例	定 义 或 说 明
轴测投影面	P		在空间设立的任一投影平面。该平面作为画面时应与观察者的视线垂直。
投影光线	S		一束平行的射线。当投影光线与 P 平面垂直时所得轴测投影叫正轴测投影；不垂直时所得轴测投影叫斜轴测投影。

空间直角坐标系	O_{xyz}		空间直角坐标系包括空间直角坐标轴和坐标单位。空间互相垂直的三坐标轴，也称三轴体，在图学中采用右手定则。在轴测投影中，空间直角坐标系也叫原坐标系。
空间直角坐标平面	V H W		由空间直角坐标轴构成的三个互相垂直的三平面。
轴测投影轴	$O_1 X_1$ $O_1 Y_1$ $O_1 Z_1$		直角坐标轴 OX 、 OY 、 OZ 的轴测投影，也叫轴测坐标轴，简称轴测轴。
轴间角	φ_1 φ_2 φ_3		各轴测轴之间的夹角，它们分别是空间两坐标轴之夹角（直角）的轴测投影。一般应使其为钝角。
轴射影平面	T_x T_y T_z		过三坐标轴的投影光线所组成的三个平面，它们相交于一条直线 OO_1 。这三个轴射影平面与 P 平面的交线分别是轴测轴。
自然尺度单位	e_x e_y e_z		三个直角坐标轴上的长度度量单位，一般取 $e_x = e_y = e_z = e_0$ 。
轴测尺度单位	e_{x1} e_{y1} e_{z1}		自然尺度单位的轴测投影。沿三个轴测轴向的度量单位。

轴向变形系数	u v w		轴测尺度单位e_1与自然尺度单位e的比值。即： u (X轴向变形系数) $= \frac{e_{x1}}{e_x}$; v (Y轴向变形系数) $= \frac{e_{y1}}{e_y}$; w (Z轴向变形系数) $= \frac{e_{z1}}{e_z}$。 按上述关系确定的变形系数，又称准确的变形系数或理论变形系数。
简化变形系数	U V W		设一组变形系数U、V、W与准确的变形系数的关系为：$U:V:W=u:v:w$，且使U、V、W中的某一个等于1，则U、V、W即为u、v、w轴测系的简化变形系数。
A点	A		空间物体上的某定点，它的空间直角坐标为Oa_x、Oa_y、Oa_z。它的多面正投影为a'、a、a''。
A点的轴测投影	A_1		A_1的轴测坐标是： $O_1 a_{x1} = u \cdot O a_x$ $O_1 a_{y1} = v \cdot O a_y$ $O_1 a_{z1} = w \cdot O a_z$
A点的次投影	a_1' a_1 a_1''		A点在直角坐标面上的投影a'、a、a''的轴测投影，分别称为A点的正面次投影、水平次投影、侧面次投影。

第三节 轴测投影的特性及基本作图法

一、轴测投影的特性

既然轴测投影是由平行光线射影而得，因此它具有平行投影的一切特性，现分述如下：

(一) 直线的轴测投影一般仍为直线 (图 1—16)。设空间有一线段 AB , 将组成 AB 的各点 A 、 C 、 D 、 B 按同一方向向 P 面投影, 则各条投影光线必然集成一平面, 该平面与轴测投影面相交, 其交线 A_1B_1 必为直线。 A_1B_1 直线即为各点轴测投影的集合, 也就是 AB 线段的轴测投影。同理, 直线的次投影也是一条直线。

当空间直线 AB 与投影光线平行时, 直线的轴测投影为一点 $A_1(B_1)$ (图 1—17)。

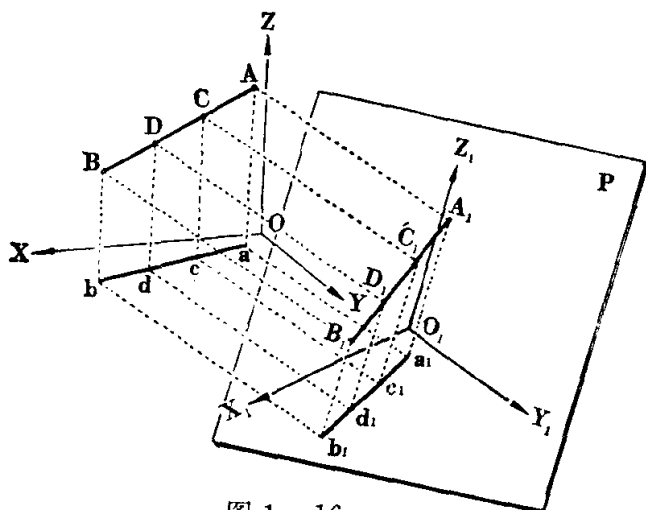


图 1—16

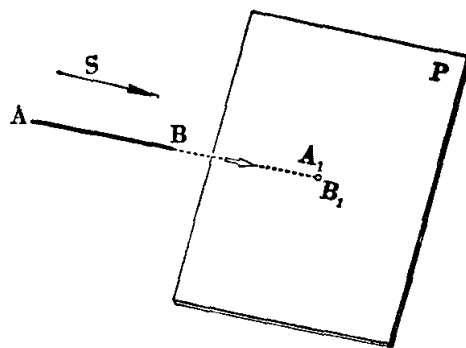


图 1—17

(二) AB 直线上 C 点的轴测投影 C_1 一定在 AB 直线的轴测投影 A_1B_1 上。 C 点分 AB 线为两段, 该两段长度之比等于两段线段轴测投影长度之比, 即: $\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$ (图 1—18)。

(三) 空间两平行线段的轴测投影仍互相平行, 且两线段投影长度之比等于两线段原长度之比。图 1—19 中, $AC \parallel BD$, 则 $A_1C_1 \parallel B_1D_1$, 且 $\frac{AC}{BD} = \frac{A_1C_1}{B_1D_1}$ 或写成 $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1D_1}{BD}$ 。

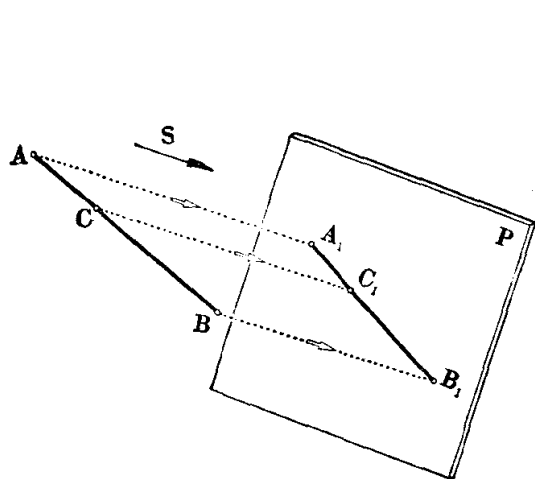


图 1—18

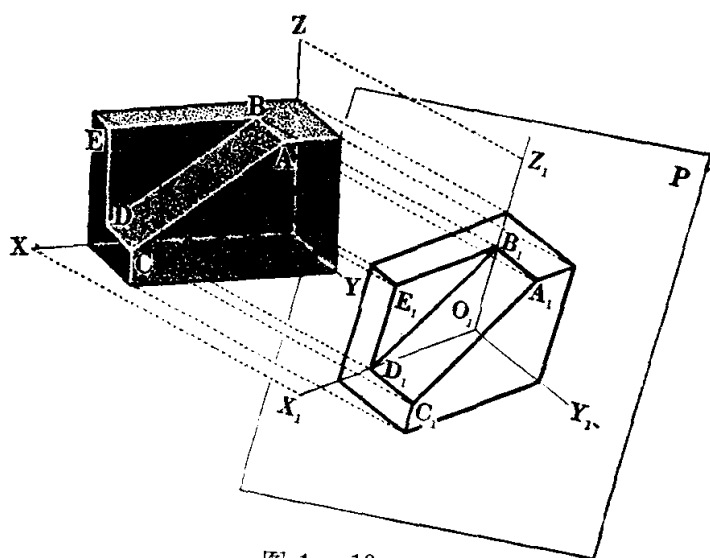


图 1—19

根据这一特点, 我们可知道: 凡平行于坐标轴的线段, 其轴测投影必平行于相应的轴测轴, 且该轴测投影的伸长或缩短均按轴测轴的伸缩比例 (u 、 v 、 w) 变化, 如图 1—19 中 $EB \parallel OX$, 则 $E_1B_1 \parallel O_1X_1$, 且 $E_1B_1 = u \cdot EB$ 。

(四) 凡平行于轴测投影面的直线和平面图形(平面多边形、圆等), 其轴测投影仍反映原长和原形(图 1—20)。

(五) 凡不平行轴测投影面的平面图形, 其轴测投影均变成与原形成类属对应的图形, 如圆的轴测投影为椭圆, 正多边形的轴测投影变成斜多边形等(见图 1—20)。

(六) 当平面平行于投影光线 S 时, 该平面的轴测投影为一条直线(图 1—21)。

上述投影特点是正、斜两种投影所共有的特性。归纳起来就是被投影元素与其轴测投影之间的同素性与简比性。这些特点都是绘制轴测投影图的重要依据。

二、空间直角坐标系与轴测坐标系的转换——轴测投影图的基本画法

研究轴测投影的目的是:

(一) 由空间直角坐标系转换成轴测坐标系, 将空间物体的轴测投影画出来。

(二) 由轴测坐标系转换成直角坐标系, 将物体的轴测投影还原成正投影。

在画面上解决上述问题, 实际上是多面正投影图和轴测投影图之间的转换。因此, 在具体作图中一般要掌握以下要领:

- (一) 必须确定轴测坐标系。即确定轴测轴和各轴向变形系数或者是轴测尺度。
- (二) 必须确定被投影的几何元素或物体上某些点的直角坐标值或轴测坐标值。
- (三) 运用轴测投影的一些投影特性来画图或确定各几何元素之间的相互关系。

下面举例说明:

〔例 1〕已知 A 点的多面正投影及轴测坐标轴、各轴向变形系数(图 1—22a), 试画出 A 点的轴测投影图。

解: 作图步骤如下:

(1) 转换点 A 的直角坐标值为轴测坐标值,

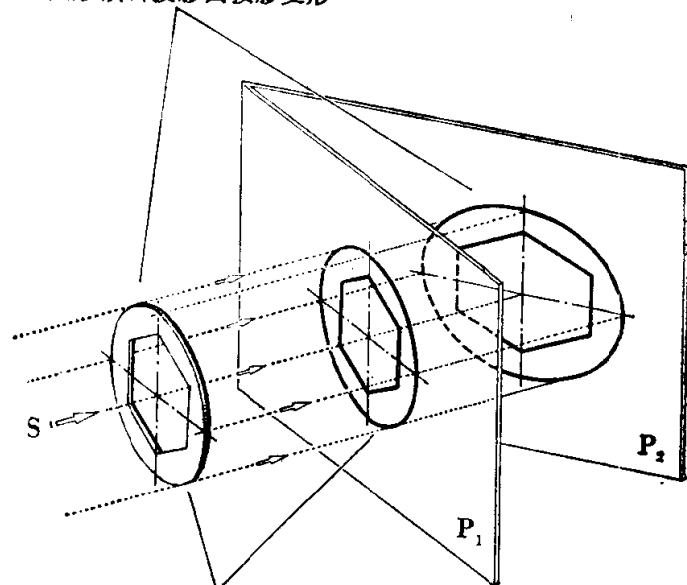
即: A_1 的 X_1 坐标 $O_1a_{x1} = Oa_x \cdot u = 40 \times 0.9 = 36$;

A_1 的 Y_1 坐标 $O_1a_{y1} = Oa_y \cdot v = 30 \times 0.74 = 22.2$;

A_1 的 Z_1 坐标 $O_1a_{z1} = Oa_z \cdot w = 50 \times 0.8 = 40$ 。

(2) 根据所得的轴测坐标值, 首先沿轴测轴 O_1x_1 量取 36, 定出 a_{x1} 。再过 a_{x1} 作 O_1Y_1 的平行线, 22.2 在平行线上量取, 得到 A 点的水平次投影 a_1 。然后过 a_1 作 O_1Z_1 的平

平面图形倾斜投影面投影变形



平面图形平行投影面投影反映实形

图 1—20

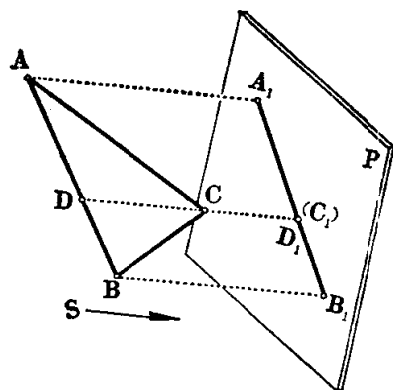


图 1—21