

结构分析的计算机方法

● 王 勇 黄炎生 编著

土

木

工

程

系

列

第

4

华南理工大学出版社

土木工程系列教材

结构分析的计算机方法

王 勇 黄炎生 编著

华南理工大学出版社

·广州·

内 容 简 介

本书详细地介绍了如何由结构力学的基本理论,采用不同的计算方法,运用计算机的高级语言 FORTRAN,设计出求解各种不同结构类型的应用程序;程序的有关数据结构、数据输入及数据输出,总刚度矩阵的组装及存储,荷载向量的形成,位移求解,内力计算;程序设计的一些技巧和处理这些问题的方法。本书共有平面杆系结构有限单元法、连续梁分析程序、平面梁分析程序、平面桁架分析程序、平面杆系结构分析程序五章。书中通过大量的实例来说明基本理论和计算方法的应用。叙述力求通俗,易学易懂。

本教材适合土木工程类各专业,学时数为 40 学时左右。

图书在版编目(CIP)数据

结构分析的计算机方法/王 勇,黄炎生编著. —广州:华南理工大学出版社,2001.3
ISBN 7-5623-1640-6

I. 结…

II. ①王…②黄…

III. 计算机应用—建筑结构—结构分析—高等学校—教材

IV. O 342

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山 邮编 510640)

责任编辑 李彩英

各地新华书店经销

中山市新华印刷厂印装

*

2001 年 3 月第 1 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 12 字数: 290 千

印数: 1—3000 册

定价: 18.50 元

编辑委员会

顾问:

容柏生 (工程院院士、设计大师,广东省建筑设计研究院总工程师、高工)
何镜堂 (工程院院士、设计大师,华南理工大学教授、博导)
曾庆元 (工程院院士,长沙铁道学院教授、博导)
方秦汉 (工程院院士,华中科技大学教授、博导)
陈宗弼 (设计大师、高工,广东省建筑设计研究院副总工程师)
陈家辉 (高工,广东省建筑工程总公司总工程师)
江见鲸 (清华大学教授、博导,全国土木工程专业教学指导委员会副主任)
蒋永生 (东南大学教授、博导,全国土木工程专业教学指导委员会副主任)
沈浦生 (湖南大学教授、博导,全国土木工程专业教学指导委员会委员)
钟善桐 (哈尔滨工业大学教授、博导)
吴仁培 (华南理工大学教授)
姚玲森 (同济大学教授)
秦 荣 (广西大学教授、博导)
叶国铮 (广州大学教授)
卢 谦 (清华大学教授)

主任:蔡 健

副主任:卫 军 张学文

委员:(以姓氏笔划为序)

于 布	文鸿雁	王元汉	王仕统	王 勇	王祖华
邓志恒	叶伟年	叶作楷	刘玉珠	李汝庚	李丽娟
李惠强	杨小平	杨昭茂	杨 锐	张中权	张 原
吴瑞麟	陈存恩	陈雅福	陈超核	罗旗帜	周 云
金仁和	金康宁	资建民	徐礼华	梁启智	梁昌俊
覃 辉	谭宇胜	裴 刚	熊光晶		

策划编辑:赖淑华 杨昭茂

项目执行:赖淑华

出版说明

为了适应高等学校专业调整后教学改革的需要,我社在华南理工大学土木工程系的协助下,组织出版这套适合大土木专业本科使用的“土木工程系列教材”。本系列教材按教育部颁布的专业目录中土木工程专业课程设置要求编写,以土木工程专业指导委员会 1999 年 10 月定稿的教学大纲为依据,立足华南,面向全国。整套书的编写讲求完整性和系统性,相关课程的内容经过充分的讨论,在此基础上进行了整合和优化,力求做到课程内容完整、信息量大。在参编作者的选择上尽量考虑中南地区的区域特色,也充分考虑了大土木专业的特点,以求本系列教材真正适合大土木专业的教学要求。

首批出版书目如下:

- 《土木工程材料》(陈雅福主编)
- 《土木工程测量》(刘玉珠主编)
- 《土力学》(杨小平主编)
- 《水力学》(于布主编)
- 《混凝土结构理论》(蔡健主编)
- 《混凝土结构设计》(王祖华主编)
- 《钢结构基本原理》(王仕统主编)
- 《钢结构设计》(王仕统主编)
- 《砌体结构》(卫军主编)
- 《土木工程荷载及设计方法》(张学文主编)
- 《高层建筑结构设计》(梁启智主编)
- 《土木工程施工》(叶作楷主编)
- 《土木工程项目管理》(李惠强主编)
- 《土木工程概预算》(张原主编)
- 《建筑结构选型》(张学文主编)
- 《钢-混凝土组合结构》(蔡健主编)
- 《基础工程》(杨小平主编)
- 《桥梁工程》(罗旗帜主编)
- 《道路勘察设计》(吴瑞麟主编)
- 《路基路面工程》(资建民主编)
- 《房屋建筑学》(裴刚 沈粤编著)
- 《土木工程防灾减灾学》(周云主编)
- 《有限元法基础与程序设计》(王元汉主编)
- 《结构分析的计算机方法》(王勇主编)
- 《国际工程合同管理》(李惠强主编)

首批教材侧重于专业技术基础课程,以后将在专业课程上加以拓展。

华南理工大学出版社

2001 年 2 月

前 言

结构分析的计算机方法属计算结构力学的范畴，是一门新兴的力学学科，是力学、计算机以及计算技术相结合的产物；亦是现代工程力学的一个重要分支，是标志结构力学发展的里程碑。

结构力学的发展经历了一百多年的历史。但是，长期以来，由于计算工具发展缓慢，而工程结构却日趋复杂，所以，结构力学的经典理论，面对实际的工程问题，显得无能为力，靠手工难以完成复杂结构的计算（解 10 阶以上的方程组相当困难）。尽管逐次渐进计算方法的出现，曾一度为结构力学带来活力，但也未能从根本上解决问题。只有到了计算机及计算技术飞速发展的时代，计算机进入结构计算领域后，才使结构力学不仅在理论上，而且在实际上能解决各种各样的结构计算问题；不仅能解决传统的杆件体系结构，而且通过有限单元法，扩大到连续体系结构。

本书力求从简单的结构计算入手，逐步深入提高。计算方法也由简单到复杂。本书着重介绍了如何由结构力学的基本理论，采用不同的计算方法，运用计算机的高级语言 FORTRAN，设计出求解各种不同结构类型的应用程序；介绍了程序的有关数据结构，数据输入及数据输出，总刚度矩阵的组装及存储，荷载向量的形成，位移求解，内力计算；同时介绍了程序设计的一些技巧和处理这些问题的方法。本书通过大量的实例来说明基本理论和计算方法的应用。力求通俗，易学易懂。

本书共分五章。第一章平面杆系结构有限单元法，主要介绍在平面杆系结构中有限单元法的基本理论和方法。采用有限单元法分析问题的一般方法，应用功能原理，即最小势能原理，推导平面杆系结构的单元刚度矩阵。介绍了平面杆系结构有限单元法的基本解题步骤。

第二章连续梁分析程序，介绍了连续梁分析程序的基本理论和程序设计。采用后处理法，通过修改总刚度矩阵和荷载向量引入支承条件。熟悉和掌握使用 FORTRAN 语言编程。总刚度矩阵用二维满阵存储，采用一般高斯消去法解方程组。

第三章平面梁分析程序，介绍了平面梁分析程序的基本理论和程序设计。所谓平面梁，即考虑了结点的竖向位移，能解决平面一般梁的计算问题。采用前处理法，运用结点定位向量、主从关系，处理支承条件。总刚度矩阵仍用二维满阵存储，采用一般高斯消去法解方程组。

第四章平面桁架分析程序，介绍了平面桁架分析程序的基本理论和程序设计。掌握单元局部坐标系与结构整体坐标系的变换。采用后处理法，通过修改总刚度矩阵和荷载向量引入支承条件，应用大数法引入支承条件。总刚度矩阵用二维半带宽矩阵存储，采用半带宽高斯消去法解方程组。

第五章平面杆系结构分析程序，介绍了平面杆系结构分析程序的基本理论和程序设计。采用前处理法，运用结点定位向量、主从关系，处理支承条件和不考虑轴向变形的问題，从而大大拓宽了该程序的解题能力，能解决平面杆系结构计算的一般问题。结构类型

包括刚架、排架、连续梁、桁架及组合结构，可以考虑轴向变形和不考虑轴向变形，可以是静定结构和超静定结构。总刚度矩阵用一维变带宽矩阵存储，采用一维变带宽高斯消去法解方程组。

本书适合于土木类各专业，学时数为 40 学时左右。

目 录

前言	1
第 1 章 平面杆系结构有限单元法	1
1.1 功能原理	1
1.2 单元刚度矩阵	3
1.3 坐标变换	7
1.4 结构总刚度矩阵与荷载向量	8
1.5 结构内力和反力的计算	14
第 2 章 连续梁分析程序	15
2.1 连续梁计算模型	15
2.2 连续梁分析程序设计	22
2.3 连续梁分析程序使用说明	36
2.4 连续梁分析程序 CBAP 计算实例	40
习题	43
第 3 章 平面梁分析程序	46
3.1 平面梁计算模型	46
3.2 平面梁分析程序设计	55
3.3 平面梁分析程序使用说明	72
3.4 平面梁分析程序 PBAP 计算实例	76
习题	85
第 4 章 平面桁架分析程序	88
4.1 平面桁架计算模型	88
4.2 平面桁架分析程序设计	96
4.3 平面桁架分析程序使用说明	112
4.4 平面桁架分析程序 PTAP 计算实例	115
习题	122
第 5 章 平面杆系结构分析程序	125
5.1 平面杆系结构计算模型	125
5.2 平面杆系结构分析程序设计	144
5.3 平面杆系结构分析程序使用说明	164
5.4 平面杆系结构分析程序 PBSAP 计算实例	169
习题	178
参考答案	183

第 1 章 平面杆系结构有限单元法

1.1 功能原理

1.1.1 平面杆系结构的应变能

设结构为平面直杆，杆的抗弯刚度为 EI ，抗拉刚度为 EA ，作用分布纵向荷载 $q(x)$ 和分布横向荷载 $p(x)$ ，见图 1-1。

轴力与纵向位移的微分关系为

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{EA} \quad (1-1)$$

弯矩与纵向位移的微分关系为

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1-2)$$

应变能表达式为

$$\begin{aligned} U &= \int_l \frac{N^2(x)}{2EA} dx + \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \\ &= \int_l \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (1-3)$$

外荷载做功为

$$W = \int_l p(x)u dx + \int_l q(x)v dx \quad (1-4)$$

平面杆系结构的势能泛函为

$$\begin{aligned} \Pi &= U - W \\ &= \int_l \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \\ &\quad \int_l p(x)u dx - \int_l q(x)v dx \end{aligned} \quad (1-5)$$

1.1.2 最小势能原理

如果位移满足谐调条件和位移边界条件，则最小势能原理等价于静力平衡方程和力的边界条件。

最小势能原理：即势能泛函取最小值

$$\delta \Pi = 0 \quad (1-6)$$

等价于静力平衡方程

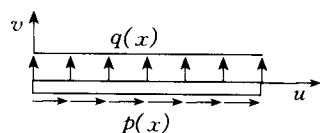


图 1-1

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) = 0 \quad (1-7)$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q(x) = 0 \quad (1-8)$$

力和位移的边界条件

$$u = 0 \quad \text{或} \quad N = EA \frac{du}{dx} = 0 \quad (1-9)$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{或} \quad M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

$$v = 0 \quad \text{或} \quad Q = EI \frac{d^3 v}{dx^3} = 0 \quad (1-10)$$

对应于轴向变形的支座

$$\begin{array}{ll} u = 0 & \text{固定} \\ N = 0 & \text{自由} \end{array} \quad (1-11)$$

对应于弯曲变形的支座

$$\begin{array}{ll} v = 0, M = 0 & \text{铰支座} \\ v = 0, \theta = 0 & \text{固定端} \\ M = 0, Q = 0 & \text{自由端} \\ \theta = 0, Q = 0 & \text{定向支座} \end{array} \quad (1-12)$$

证明：势能泛函为

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^l \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \\ & \int_0^l p(x) u dx - \int_0^l q(x) v dx \end{aligned}$$

势能泛函的变分为

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_0^l EA \frac{du}{dx} \delta \left(\frac{du}{dx} \right) dx + \int_0^l EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) dx - \\ & \int_0^l p(x) \delta u dx - \int_0^l q(x) \delta v dx \end{aligned} \quad (1-13)$$

$$\text{其中, } \frac{du}{dx} \delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} \delta u = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \delta u \right) - \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u \quad (1-14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) &= \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d}{dx} \left(\delta \frac{dv}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \delta \frac{dv}{dx} \right) - \frac{d^3 v}{dx^3} \delta \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \delta \frac{dv}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \right) + \frac{d^4 v}{dx^4} \delta v \end{aligned} \quad (1-15)$$

将式(1-14)、(1-15)代入式(1-13)积分得

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_0^l \left[EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) \right] \delta u dx + \left[EA \frac{du}{dx} \delta u \right]_0^l + \\ & \int_0^l \left[EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q(x) \right] \delta v dx + \left[EI \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \frac{dv}{dx} \right]_0^l - \left[EI \frac{d^3 v}{dx^3} \delta v \right]_0^l \end{aligned} \quad (1-16)$$

由最小势能原理

$$\delta \Pi = 0$$

得静力平衡方程

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p(x) = 0$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q(x) = 0$$

得力和位移的边界条件

$$u = 0 \quad \text{或} \quad N = EA \frac{du}{dx} = 0$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{或} \quad M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

$$v = 0 \quad \text{或} \quad Q = EI \frac{d^3 v}{dx^3} = 0$$

证毕。

1.2 单元刚度矩阵

在单元局部坐标系下, 设平面杆系结构的任意一个单元, 始端结点为 i , 终端结点为 j (图 1-2)。

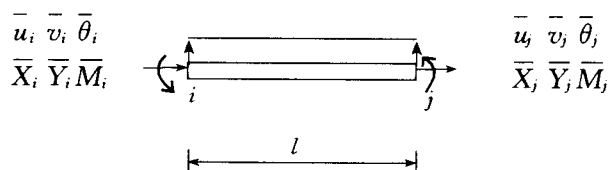


图 1-2

结点位移向量*和结点力向量分别为

$$\{\bar{\delta}\} = \{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j \quad \bar{\theta}_j\}^T \quad (1-17)$$

$$\{\bar{F}\} = \{\bar{X}_i \quad \bar{Y}_i \quad \bar{M}_i \quad \bar{X}_j \quad \bar{Y}_j \quad \bar{M}_j\}^T \quad (1-18)$$

单元刚度矩阵是用来描述单元结点力与单元结点位移之间的关系。

$$\{\bar{F}\} = [\bar{k}] \{\bar{\delta}\} \quad (1-19)$$

平面杆系单元刚度矩阵为

* 本书的向量为一系列。

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

式中, EI 为抗弯刚度; EA 为抗拉刚度; l 为单元杆长。

证明: (1) 用结构力学方法推导

设 $\bar{u}_i = 1$, 其余等于零, 求出的固端力为 $[\bar{k}]$ 的第一行或第一列的元素。

$$\{\bar{F}\} = \left\{ \frac{EA}{l} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{EA}{l} \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (1-21)$$

设 $\bar{v}_i = 1$, 其余等于零, 求出的固端力为 $[\bar{k}]$ 的第二行或第二列的元素。

$$\{\bar{F}\} = \left\{ 0 \quad \frac{12EI}{l^3} \quad \frac{6EI}{l^2} \quad 0 \quad -\frac{12EI}{l^3} \quad \frac{6EI}{l^2} \right\}^T \quad (1-22)$$

设 $\bar{\theta}_i = 1$, 其余等于零, 求出的固端力为 $[\bar{k}]$ 的第三行或第三列的元素。

$$\{\bar{F}\} = \left\{ 0 \quad \frac{6EI}{l^2} \quad \frac{4EI}{l} \quad 0 \quad -\frac{6EI}{l^2} \quad \frac{2EI}{l} \right\}^T \quad (1-23)$$

设 $\bar{u}_j = 1$, 其余等于零, 求出的固端力为 $[\bar{k}]$ 的第四行或第四列的元素。

$$\{\bar{F}\} = \left\{ -\frac{EA}{l} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{EA}{l} \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (1-24)$$

设 $\bar{v}_j = 1$, 其余等于零, 求出的固端力为 $[\bar{k}]$ 的第五行或第五列的元素。

$$\{\bar{F}\} = \left\{ 0 \quad -\frac{12EI}{l^3} \quad -\frac{6EI}{l^2} \quad 0 \quad \frac{12EI}{l^3} \quad -\frac{6EI}{l^2} \right\}^T \quad (1-25)$$

设 $\bar{\theta}_j = 1$, 其余等于零, 求出的固端力为 $[\bar{k}]$ 的第六行或第六列的元素。

$$\{\bar{F}\} = \left\{ 0 \quad \frac{6EI}{l^2} \quad \frac{2EI}{l} \quad 0 \quad -\frac{6EI}{l^2} \quad \frac{4EI}{l} \right\}^T \quad (1-26)$$

(2) 用有限元法推导 (图 1-3)

设单元任意点的位移函数为

$$u(x) = a_1 + a_2x \quad (1-27)$$

$$v(x) = a_3 + a_4x + a_5x^2 + a_6x^3 \quad (1-28)$$

转角函数为

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_4 + 2a_5x + 3a_6x^2 \quad (1-29)$$

其中, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 为待定参数。

位移边界条件为

对于 i 结点 $x=0$

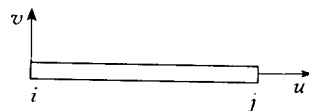


图 1-3

$$\begin{aligned}\bar{u}_i &= u(0) = a_1 \\ \bar{v}_i &= v(0) = a_3 \\ \bar{\theta}_i &= \theta(0) = a_4\end{aligned}\quad (1-30)$$

对于 j 结点 $x = l$

$$\begin{aligned}\bar{u}_j &= u(l) = a_1 + a_2 l \\ \bar{v}_j &= v(l) = a_3 + a_4 l + a_5 l^2 + a_6 l^3 \\ \bar{\theta}_j &= \theta(l) = a_4 + 2a_5 l + 3a_6 l^2\end{aligned}\quad (1-31)$$

写成矩阵形式

$$\{\bar{\delta}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [C] \{a\} \quad (1-32)$$

$[C]$ 矩阵的逆矩阵为

$$[C]^{-1} = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l^2 & 0 & 0 & l^2 & 0 & 0 \\ 0 & l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3l & -2l^2 & 0 & 3l & -l^2 \\ 0 & 2 & l & 0 & -2 & l \end{bmatrix} \quad (1-33)$$

则

$$\{a\} = [C]^{-1} \{\bar{\delta}\} \quad (1-34)$$

用结点位移表示位移函数

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \{a\} \\ &= [S] \{a\} = [S][C]^{-1} \{\bar{\delta}\} \\ &= [N] \{\bar{\delta}\}\end{aligned}\quad (1-35)$$

$[N]$ 称为位移形函数

$$\begin{aligned}[N] &= \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & l\xi(1-2\xi+\xi^2) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & l\xi(\xi^2-\xi) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1-36)$$

式中, $\xi = \frac{x}{l}$

$$u(x) = [N_1] \{\bar{\delta}\} \quad \frac{du}{dx} = [N_1'] \{\bar{\delta}\} \quad (1-37)$$

$$v(x) = [N_2] \{\bar{\delta}\} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = [N_2'] \{\bar{\delta}\} \quad (1-38)$$

$$\text{式中, } [N_1'] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-39)$$

$$[N_2'] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{l^2}(2\xi-1) & \frac{2}{l}(3\xi-2) & 0 & \frac{6}{l^2}(1-2\xi) & \frac{2}{l}(3\xi-1) \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

应变能表达式为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \\ &= \int_0^l \frac{1}{2} EA \{\bar{\delta}\}^T [N_1']^T [N_1'] \{\bar{\delta}\} dx + \\ &\quad \int_0^l \frac{1}{2} EI \{\bar{\delta}\}^T [N_2']^T [N_2'] \{\bar{\delta}\} dx \\ &= \frac{1}{2} \{\bar{\delta}\}^T \int_0^l \{ EA [N_1']^T [N_1'] + EI [N_2']^T [N_2'] \} dx \{\bar{\delta}\} \\ &= \frac{1}{2} \{\bar{\delta}\}^T [\bar{k}] \{\bar{\delta}\} \end{aligned} \quad (1-41)$$

单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} [\bar{k}] &= \int_0^l \{ EA [N_1']^T [N_1'] + EI [N_2']^T [N_2'] \} dx \\ &= \int_0^1 \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} d\xi \end{aligned} \quad (1-42)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } [B_{11}] &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EI}{l^3}(2\xi-1)^2 & \frac{12EI}{l^2}(2\xi-1)(3\xi-2) \\ 0 & \frac{12EI}{l^2}(2\xi-1)(3\xi-2) & \frac{4EI}{l}(3\xi-2)^2 \end{bmatrix} \\ [B_{12}] &= \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EI}{l^3}(2\xi-1)(1-2\xi) & \frac{12EI}{l^2}(2\xi-1)(3\xi-1) \\ 0 & \frac{12EI}{l^2}(3\xi-2)(1-2\xi) & \frac{4EI}{l}(3\xi-2)(3\xi-1) \end{bmatrix} \\ [B_{21}] &= [B_{12}]^T \\ [B_{22}] &= \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EI}{l^3}(1-2\xi)^2 & \frac{12EI}{l^2}(1-2\xi)(3\xi-1) \\ 0 & \frac{12EI}{l^2}(1-2\xi)(3\xi-1) & \frac{4EI}{l}(3\xi-1)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

积分得单元刚度矩阵式(1-20)。

外力做功为

$$W = \{\bar{\delta}\}^T \{\bar{F}\} \quad (1-43)$$

总势能表达式为

$$\begin{aligned}\Pi &= U - W \\ &= \frac{1}{2} \{\bar{\delta}\}^T \{\bar{k}\} \{\bar{\delta}\} - \{\bar{\delta}\}^T \{\bar{F}\}\end{aligned}\quad (1-44)$$

最小势能原理

$$\delta \Pi = 0$$

求得

$$\{\bar{F}\} = \{\bar{k}\} \{\bar{\delta}\}$$

证毕。

1.3 坐标变换

1.3.1 坐标变换

设单元局部坐标系为 $\bar{x}\bar{y}$ ，结构整体坐标系为 xy (图 1-4)。

坐标变换为

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (1-45)$$

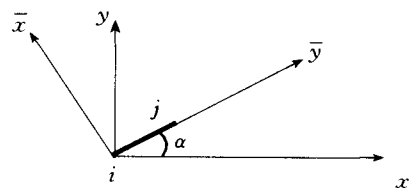


图 1-4

1.3.2 坐标变换矩阵

设单元在局部坐标系下结点位移向量和结点力向量分别为 $\{\bar{\delta}\}$, $\{\bar{F}\}$; 单元在整体坐标系下结点位移向量和结点力向量分别为 $\{\delta\}$, $\{F\}$, 则坐标变换为

$$\{\bar{\delta}\} = [T] \{\delta\} \quad (1-46)$$

$$\{\bar{F}\} = [T] \{F\} \quad (1-47)$$

式中, $[T]$ 为坐标变换矩阵。

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-48)$$

1.3.3 整体坐标系下单元刚度矩阵

设单元局部坐标系下单元刚度矩阵为 $\{\bar{k}\}$; 结构整体坐标系下单元刚度矩阵为 $[k]$, 则

$$[k] = [T]^T [\bar{k}] [T] \quad (1-49)$$

式中, $[T]^T$ 为坐标变换矩阵 $[T]$ 的转置矩阵。

证明: 在局部坐标系下

$$\{\bar{F}\} = \{\bar{k}\} \{\bar{\delta}\}$$

在整体坐标系下

$$\{F\} = [k] \{\delta\} \quad (1-50)$$

将式(1-46), (1-47)代入式(1-19)进行坐标变换得

$$[T] \{F\} = [\bar{k}] [T] \{\delta\} \quad (1-51)$$

由于坐标变换矩阵为正交矩阵, 则逆矩阵等于转置矩阵。

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

所以

$$\{F\} = [T]^T [\bar{k}] [T] \{\delta\} \quad (1-52)$$

比较式(1-52)和式(1-50)得

$$[k] = [T]^T [\bar{k}] [T]$$

证毕。

1.4 结构总刚度矩阵与荷载向量

1.4.1 结构总刚度矩阵

设 $[k_i]$ 为第 i 个单元在整体坐标系下的单元刚度矩阵;

$\{\delta_i\}$ 为第 i 个单元的结点位移向量;

$\{\Delta\}$ 为结构的结点位移向量($N \times 1$), N 为结构总自由度数。

$$\{\delta_i\} = [C_i] \{\Delta\} \quad (1-53)$$

式中, $[C_i]$ 为第 i 个单元定位向量矩阵($6 \times N$)。

结构总刚度矩阵为 $[K]$, NE 为单元总数, 则

$$[K] = \sum_{i=1}^{NE} [C_i]^T [k_i] [C_i] = \sum_{i=1}^{NE} [K_i] \quad (1-54)$$

式中, $[K_i]$ 为第 i 个单元刚度矩阵对结构总刚度矩阵的贡献。

$$[K_i] = [C_i]^T [k_i] [C_i] \quad (1-55)$$

证明: 设第 i 个单元的应变能为

$$U_i = \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T [k_i] \{\delta_i\} \quad (1-56)$$

结构的总应变能为

$$U = \sum_{i=1}^{NE} U_i = \sum_{i=1}^{NE} \frac{1}{2} \{\delta_i\}^T [k_i] \{\delta_i\} \quad (1-56)$$

$$= \sum_{i=1}^{NE} \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [C_i]^T [k_i] [C_i] \{\Delta\}$$

$$= \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [K] \{\Delta\} \quad (1-57)$$

得结构总刚度矩阵为

$$[K] = \sum_{i=1}^{NE} [C_i]^T [k_i] [C_i]$$

证毕。

例 1-1 图 1-5 形成结构总刚度矩阵。

解：设单元在整体坐标系下的单元刚度矩阵为

$$[k_1] \quad [k_2] \quad [k_3]$$

结点定位向量

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

单元定位向量

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

单元定位向量矩阵为

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [C_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [C_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单元贡献刚度矩阵为

$$[K_1] = [C_1]^T [k_1] [C_1]$$

$$= \begin{bmatrix} k_{44}^{(1)} & k_{46}^{(1)} & 0 \\ k_{64}^{(1)} & k_{66}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [C_2]^T [k_2] [C_2]$$

$$= \begin{bmatrix} k_{44}^{(2)} & 0 & k_{46}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{64}^{(2)} & 0 & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$[K_3] = [C_3]^T [k_3] [C_3]$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} + k_{14}^{(3)} + k_{41}^{(3)} + k_{44}^{(3)} & k_{13}^{(3)} + k_{34}^{(3)} & k_{16}^{(3)} + k_{46}^{(3)} \\ k_{31}^{(3)} + k_{43}^{(3)} & k_{33}^{(3)} & k_{36}^{(3)} \\ k_{61}^{(3)} + k_{64}^{(3)} & k_{63}^{(3)} & k_{66}^{(3)} \end{bmatrix}$$

结构总刚度矩阵为

$$[K] = \sum_{i=1}^3 [K_i]$$

解毕。

1.4.2 形成结构总刚度矩阵的步骤

- (1) 对结构进行结点编号和单元编号；
- (2) 确定每个结点的位移未知量的编号，即结点定位向量；

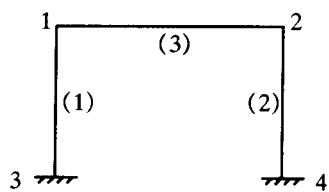


图 1-5