张锦豪　邱维元

复变函数论

Functions of A Complex Variable

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

高等学校教材

复变函数论

Functions of A Complex Variable

张锦豪　邱维元

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

图书在版编目（CIP）数据

复变函数论 / 张锦豪 邱维元．—北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，2001.2

ISBN 7-04-009115-1

I.复… II. ① 张… ② 邱 III. 复变函数论 IV. 0174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 47530 号

责任编辑：徐 可 **封面设计**：王凌波 **责任印制**：陈伟光

复变函数论

张锦豪 邱维元

出版发行	高等教育出版社 施普林格出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电 话	010-64054588	**传 真**	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京民族印刷厂		
开 本	880×1230 1/32	**版 次**	2001 年 2 月第 1 版
印 张	9.375	**印 次**	2001 年 2 月第 1 次印刷
字 数	280 000	**定 价**	15.00 元

前 言

本书是在复旦大学数学系讲授“复变函数论”这门课程的基础上写成的. 由于这门课在我校一般被安排在大学二年级第二学期开设, 所以只假定读者具备数学分析与高等代数等预备知识.

复变函数论是历史悠久, 发展成熟, 又十分活跃的一个数学分支, 其丰富的内容, 深刻的结果, 与其它数学分支的密切关系, 以及对其他学科与工程的重要应用, 使它一直是大学数学教育的基本内容之一. 国内外每年都有好几本有关的教材出版. 这些教材从各个不同的视角展示复变函数论的基本内容.

全纯函数无疑是复变函数论的主要对象. 它的良好性能, 使得数学分析中几乎所有的工具都能对它有所作为. 问题在于它的取值是复数. 因此如何使读者从实坐标过渡到复坐标是本书的首要任务. 本书前三章从介绍平面上的复坐标开始, 详细地论述了函数的连续, 微分, 曲线积分等分析概念在实坐标与复坐标下的异同. 通过复平面上的曲线, 辐角函数和初等函数的描述, 以及复坐标下 Taylor 展开等讨论使读者熟悉复坐标. 本书正文中的积分述及的曲线都假定是分段光滑的. 这不仅减少了许多有关 Riemann-Stieltjes 积分的繁琐处理, 而且对本书以后的应用也已足够, 得到的结论大部分对可求长曲线都成立. 为了对可求长曲线有较多了解, 本书在附录 I 中对连续函数在可求长曲线上积分的存在性与基本性质给出了详细的证明. 从而使得复坐标下的微积分有较完整的理论.

处理多值函数是复变函数论的一个特点. 本书述及的多值函数主要由复数的辐角多值性引起. 因此对连续辐角函数的存在性从分析的角度给出了严格的构造性证明, 以方便读者理解多值函数的理论. 另一方面, 为减轻阅读这部分内容的困难, 本书的第 3 章仅在单连通区域上定义对数函数与幂函数的单值支, 而将一般理论放在最后的第 7 章. 使读者在具备相当的复变函数论知识以后再来接触这部分内容, 会更容易接受.

Cauchy 定理反映了全纯函数与积分曲线的拓扑性质的深刻联系,

是复变函数论的一块基石. 本书首先将数学分析中的 Green 公式写成复的形式, 然后应用它得出特殊的 Cauchy 定理与 Cauchy 公式. 最后在第 4 章 4.1 节给出了这个定理与绕数有关的一般形式. 由此开始介绍全纯函数的最基本性质, 包括幂级数展开、辐角原理、最大模原理等. 作为 Cauchy 定理的一个推论, 留数定理不仅在理论上有重要作用, 而且是计算定积分的有力工具. 但是由于应用的方法雷同, 在第 4 章 4.3 节仅以少量的例子说明之. 一些常用的情形归类后放在附录 II 中, 以备需要的读者查考. 由于零点与极点对于全纯函数与半纯函数具有特殊的意义, 所以在这一章 4.4 节还介绍了函数分解的初步知识.

由于调和函数与全纯函数的密切关系, 在建立了全纯函数的基本性质之后, 调和函数往往是首先被应用的实函数. 本书第 5 章利用均值性质定义调和函数, 把与 Laplace 方程的联系放在后面. 在中文书籍中少有述及的次调和函数在高维复分析中起着相当重要的作用. 因此本书在这一章的 5.2 节介绍了它的基本性质. 并用它在较一般的区域上给出 Dirichlet 问题解.

第 6 章主要介绍 Riemann 映射定理, 包括 Schwarz 引理等全纯函数的映射性质. Riemann 映射的边界性质的一般结论与证明都比较麻烦. 所以本书仅讨论边界是简单闭曲线的情形. 这一章 6.3 节利用 Schwarz 对称原理构造了一些特殊情形的 Riemann 映射. 考虑到 Bergman 核的日显重要, 它赖以存在的全纯函数空间的典型意义, 以及我国几代数学家对它的贡献, 我们将有关内容写进了这一章.

关于解析延拓的简单介绍, Riemann 面的概念, 单值性定理等结论放在最后一章. 为便于读者进一步学习, 这里举了一些初等 Riemann 面的例子后, 还给出了一般定义.

本书前三章与第 4 章前三节的内容是最基本的. 略去 4.4 节与 5.2 节对本书其他部分的阅读基本没有影响. 第七章也可提前到 4.2 节后阅读.

数学与科学技术的迅速发展对大学的基础教育的要求发生了变化. 为适应新的形势, 复旦大学设立了 “重点课程建设” 项目. 这本教材正是这个项目的产物之一. 在本书写作过程中, 还得到了任福尧教授、何

成奇教授、童裕孙教授、陈纪修教授、於崇华教授与金路博士、陈伯勇博士等许多帮助与关心，在此一并表示感谢. 另外，我们将通过网站

math.fudan.edu.cn/teacher/123/index.html

与

seminar.533.net
seminar.yeah.net

和读者进行交流，增补内容，使本书不断完善.

目 录

第1章　复数与复值函数

本章介绍如何在平面上引入复坐标与无穷远点，以及在描述点集与函数时由此引起的变化. 并且表明，在连续的范围内，对一个允许取复数值的函数的讨论，等价于两个实值函数的讨论.

§1.1　复平面与扩充复平面

A. 复数　以 $\mathbb{R}$ 记实数全体. 令 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 对于 $x,y\in\mathbb{R}$, 称 $x+\mathrm{i}y$ 为 **复数**. 复数全体记成 $\mathbb{C}$.

两个复数 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$ 的 **和**, **差**, **积** 分别定义为

$$\begin{aligned}
z+w &= (x+u)+\mathrm{i}(y+v),\\
z-w &= (x-u)+\mathrm{i}(y-v),\\
zw &= (xu-yv)+\mathrm{i}(xv+yu).
\end{aligned}$$

容易验证，上述运算满足结合律，交换律和分配律.　$z=0$ 当且仅当 $x=y=0$. 当 $w\neq 0$ 时，定义 **商** 为

$$\frac{z}{w}=\frac{(x+\mathrm{i}y)(u-\mathrm{i}v)}{(u+\mathrm{i}v)(u-\mathrm{i}v)}=\frac{xu+yv}{u^2+v^2}+\mathrm{i}\frac{yu-xv}{u^2+v^2}.$$

例如设 $z=1+\mathrm{i}$, $w=-3+4\mathrm{i}$. 那么

$$z+w=-2+5\mathrm{i},\quad z-w=4-3\mathrm{i},\quad zw=-7+\mathrm{i},\quad \frac{z}{w}=\frac{1}{25}-\frac{7}{25}\mathrm{i}.$$

给出复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 记 $\mathrm{Re}\,z=x$, $\mathrm{Im}\,z=y$, 分别称为 z 的 **实部** 和 **虚部**. 记 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, 称为 z 的 **模**.

记 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$, 称为 z 的 **共轭**. 容易验证

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\overline{z}}{2},\qquad \mathrm{Im}\,z=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}},$$

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\quad \overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w},\quad \overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w},\quad \overline{\overline{z}}=z,$$

$$|z|^2=z\cdot\overline{z},\qquad |zw|=|z|\cdot|w|.$$

从关系式 $|z|=\sqrt{(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2}$ 可知

$$|\operatorname{Re}z|\le|z|,\qquad |\operatorname{Im}z|\le|z|,\qquad |z|=|\overline{z}|.\tag{1.1}$$

因此有

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}\\&=|z|^2+2\operatorname{Re}(z\overline{w})+|w|^2\\&\le|z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2\\&=|z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

这就得到所谓的三角不等式

$$|z+w|\le|z|+|w|.\tag{1.2}$$

将 $z-w$ 看成两个数 $x-u$, $\mathrm{i}(y-v)$ 相加，由 (1.1) 与 (1.2) 得到

$$\max(|x-u|,|y-v|)\le|z-w|\le|x-u|+|y-v|.\tag{1.3}$$

B. 复数的平面表示 每个实数对 (x,y) 表示平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个点. 同时每个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对实数 (x,y) 决定. 所以 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 成一一对应. 每个复数可以表示成平面上的一个点，平面上的点也可以用唯一的一个复数表示. 用复数来表示的平面称为 **复平面**, 仍记成 $\mathbb{C}$. 在复平面上，横坐标轴称为 **实轴**, 纵坐标轴称为 **虚轴**, 分别用 X, $\mathrm{i}Y$ 表示 (图 1.1). 在图 1.1 上， z 与 $\overline{z}$ 关于实轴对称， z 与 $-z$ 关于原点对称.

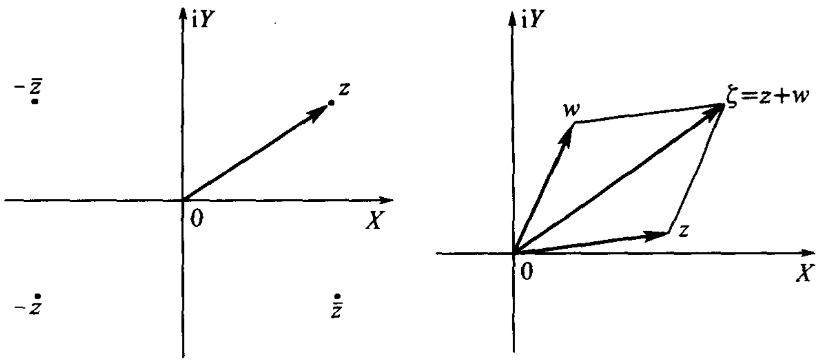

图 1.1

复平面上的一点 $z \neq 0$ 对应着从原点到 z 的一个向量, 记成 $\overrightarrow{0z}$. 复数 z 的模 $r=|z|$ 即为向量 $\overrightarrow{0z}$ 的长度. 它同时表示 z 到原点的距离. 而 $|z-w|$ 表示点 z 到另一点 w 的距离, 即向量 $\overrightarrow{zw}$ 的长度.

从正实轴开始按逆时针方向旋转到达向量 $\overrightarrow{0z}$ 所扫过的角度记成 θ, 它决定了 $\overrightarrow{0z}$ 的方向. 但是, 对于任何一个整数 k, $2k\pi+\theta$ 都能确定向量 $\overrightarrow{0z}$ 的方向. 确定向量 $\overrightarrow{0z}$ 的方向的这个角称为 z 的 **辐角**. 每个非零复数都有辐角. 当 $z \neq 0$, 常以 $\arg z$ 记 z 的某个特定辐角. 令

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \tag{1.4}$$

利用三角函数的性质不难验证

$$e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi}=e^{i(\theta+\varphi)}, \qquad e^{i(2k\pi+\theta)}=e^{i\theta}.$$

复数 z 可以用它的模与辐角表示成

$$z=re^{i\arg z}.$$

这种表示又称为复数 z 的 **极坐标表示的复形式**. 显然, z 是实数 ($\operatorname{Im} z=0$) 当且仅当 $\arg z=k\pi$; z 是正实数当且仅当 $\arg z=2k\pi$. 设 θ, φ 为 z 的两个辐角, 那么 $\varphi-\theta=2k\pi$. 这个事实用同余式符号记成

$$\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}.$$

不难验证

$$\arg \overline{z} \equiv -\arg z \pmod{2\pi}, \quad \arg(zw) \equiv \arg z + \arg w \pmod{2\pi},$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}, \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \arg z - \arg w \pmod{2\pi}.$$

显然，当辐角的取法使得上面的同余式两边之差的绝对值小于 2π 时，同余式变成等式．例如取 $0 \le \arg z < 2\pi, \forall z \in \mathbb{C}$, 有

$$\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arg(-\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{2},$$
$$\arg[-\mathrm{i}(-1+\mathrm{i})] = \frac{\pi}{4} = \arg(-\mathrm{i}) + \arg(-1+\mathrm{i}) - 2\pi.$$

如果取 $-\pi \le \arg z < \pi, \forall z \in \mathbb{C}$. 那么

$$\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arg(-\mathrm{i}) = \frac{-\pi}{2},$$
$$\arg[-\mathrm{i}(-1+\mathrm{i})] = \frac{\pi}{4} = \arg(-\mathrm{i}) + \arg(-1+\mathrm{i}).$$

两个复数 z, w 的和 $\zeta = z + w$ 所对应的向量恰为向量 $\overrightarrow{0z}$ 与 $\overrightarrow{0w}$ 之和 (图 1.1). 由于从 z 到 ζ 的向量与从 0 到 w 的向量相等，所以不等式 (1.2) 的几何意义即为三角形的一边小于另外两边之和． z 与 w 位于从原点出发的同一条射线上，当且仅当

$$\arg z - \arg w, \qquad \arg(z\overline{w}), \qquad \arg\left(\frac{z}{w}\right)$$

这三个辐角中有一个是 2π 的整数倍．

两个向量 $\overrightarrow{0z}$ 与 $\overrightarrow{0w}$ 的 **内积** 用复数表示为

$$< z, w >= \operatorname{Re} z\overline{w}.$$

两个向量 $\overrightarrow{0z}$ 与 $\overrightarrow{0w}$ 垂直，当且仅当 $< z, w >= 0$.

C. 直线和圆的方程 平面上实坐标下的直线方程的一般形式为

$$\ell:\ \ ax+by+c=0,\qquad a,\,b,\,c\in\mathbb{R},$$

这里 $a,\,b$ 不同时等于 0, $(-b,a)$ 代表了这条直线的方向. 利用坐标变换

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\qquad y=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}},\tag{1.5}$$

直线方程成为

$$\frac{1}{2}(a-\mathrm{i}b)z+\frac{1}{2}(a+\mathrm{i}b)\overline{z}+c=0.$$

令 $\alpha=(a+\mathrm{i}b)/2$, 可以将直线方程写成

$$\ell:\ \ \overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+c=0,\qquad \alpha\neq 0,\ c\in\mathbb{R}.\tag{1.6}$$

$(-b,a)$ 对应着复数 $-b+\mathrm{i}a=\mathrm{i}2\alpha$, 所以 $\mathrm{i}\alpha$ 代表直线方向. 设两点 $p,\,q$ 关于 ℓ 对称. 中点 $(p+q)/2$ 落在 ℓ 上, 同时 $p-q$ 作为向量与 ℓ 垂直. 因此有

$$\overline{\alpha}(p+q)+\alpha(\overline{p}+\overline{q})+2c=0,\qquad \mathrm{Re}[\mathrm{i}\alpha\overline{(p-q)}]=0.$$

由第二式及 (1.5) 的第一式推出 $\overline{\alpha}q+\alpha\overline{p}=\overline{\alpha}p+\alpha\overline{q}$. 代入第一式得到

$$\overline{\alpha}p+\alpha\overline{q}+c=0.\tag{1.7}$$

将 (1.6) 减去 (1.7), 整理后可知, 对于每个 $z\in\ell$, 满足

$$\frac{|z-p|}{|z-q|}=1.\tag{1.8}$$

另一方面, 到两定点的距离相等的点的轨迹是直线. 因此, (1.8) 也是直线的一般方程.

平面上实坐标下圆周的一般方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

令 $z = x + \mathrm{i}y$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, 圆周的方程变成

$$|z - z_0|^2 = r^2 \qquad \text{或者} \qquad |z - z_0| = r. \tag{1.9}$$

它明确地表示出该圆周的圆心为 z_0, 半径为 r. 记该圆周为 $C(z_0, r)$. $C(0,1)$ 又称为 **单位圆周**.

设两点 p, q 分别处于圆周 $C(z_0, r)$ 内外 (图 1.2), 满足

$$(p - z_0)\overline{(q - z_0)} = r^2, \tag{1.10}$$

或者等价地，满足

$$|p - z_0||q - z_0| = r^2, \quad \arg(p - z_0) = \arg(q - z_0) + 2k\pi.$$

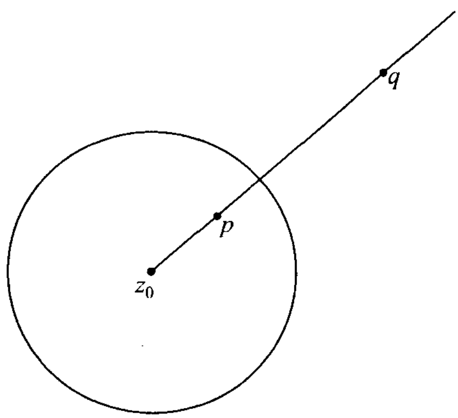

图 1.2

这两个等式表明 p, q 位于从圆心出发的同一射线上，并且到圆心的距离乘积等于半径的平方. 这样的两点 p, q 称为关于圆周 $C(z_0, r)$ **对称**(图 1.2). 例如 $1/2$ 与 2, $\mathrm{i}/3$ 与 $3\mathrm{i}$ 都关于单位圆周 $C(0,1)$ 对称. $1/2$ 与 2 还关于 $C(5/2, 1)$ 对称，等等. 由于

$$\frac{p - z_0}{q - z_0} = \frac{(p - z_0)\overline{(q - z_0)}}{|q - z_0|^2} = \frac{r^2}{|q - z_0|^2} > 0,$$