

流体力学

张兆顺 崔桂香 编著



清华大学出版社
<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

流 体 力 学

张尧顺 崔桂香

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是为工程力学专业大学本科专业基础课程“流体力学”编写的教材,也可作为大学工科专业和研究生学习流体力学的参考书。内容包括流体力学的基本概念、原理、应用和一部分重要的近代流体力学知识。全书共分 10 章,第 1 章到第 4 章是流体力学的基本原理,包括流体的性质、模型、运动学和动力学基本原理;第 5 章到第 8 章是流体力学原理在各方面的应用,包括不可压缩理想流体动力学、气体动力学、水波动力学、粘性流体动力学;第 9 章湍流和第 10 章涡动力学是近代流体力学中发展较快的部分。书中每章列举丰富的例题和提供大量的习题。认真学习本书后,读者将具备进一步学习流体力学的专门知识或着手研究和解决工程以及自然界流动问题的扎实基础。

图书在版编目(CIP)数据

流体力学/张兆顺,崔桂香编著. —北京:清华大学出版社,1998
ISBN 7-302-03168-1

I. 流… II. ①张… ②崔… III. 流体力学-高等学校-教材 IV. 035

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 29776 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者:北京丰台丰华印刷厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:25.75 字数:608 千字

版 次:1999 年 2 月第 1 版 1999 年 2 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-03168-1/O·201

印 数:0001~4000

定 价:25.50 元

前 言

本书是为工程力学专业大学本科专业基础课程“流体力学”编写的教材,也可作为大学工科专业和研究生学习流体力学的参考书。

本书是在作者多年讲授流体力学课程的讲稿基础上编写而成的。根据作者的教学经验,流体力学作为一门专业基础课或技术基础课,必须要求学生对基本概念和原理解得十分准确和透彻;另一方面,要求学生学会应用流体力学理论的基本方法。本书力求能够满足上述要求,在本书前几章讲述基本原理时,对重要概念和定理都列举示范例题,这些例题可以在课堂讲授也可以要求学生自学。俗话说,熟能生巧,经过反复练习以后,就能将理论运用自如。流体力学是一门应用很广的基础课,自学或初学的读者往往忽视基本理论的学习和运用理论的熟练程度,急于想去解决复杂的实际问题,这样常常事倍功半。所以,我们建议初学流体力学的学生或自学的读者循序前进,扎扎实实掌握原理,认认真真练习,才能较快入门。

随着近代科学技术突飞猛进的发展,流体力学学科本身也在不断发展。在处理新旧知识的更新方面,我们保留了流体力学的基本概念和原理部分,并尽量用现代观念和方法来叙述。近代流体力学需要解决的问题愈来愈复杂,不论是几何外形或流动中包含的物理、化学过程都愈来愈复杂。但是,不论运动怎样复杂,它的基本规律是共同的。例如,流体运动的分析,控制流动的质量、动量和能量的输运方程是一样的。对于这一部分内容不仅保留,还应当反复练习。对于概念的叙述和表达,我们尽量采用已经比较成熟的近代数学方法。例如,全书用向量和张量的表达式描述流体运动学和动力学。在流体力学的解题方法方面,本书保留和发展了经典流体力学中对于流动模型的简化和流动问题的准确数学提法,这些方法对于用数值计算方法解决日益增多的复杂流动问题仍然是基本的和重要的,例如,边界层模型、理想流体运动模型;线性化方法和近代摄动法。至于经典流体力学中一些已经不常用的方法则予以删除。本书是流体力学的入门课程,不包括流体力学全部专门知识。学完本书以后,有些学生将进一步修习流体力学专门的课程,有的读者将以本课程知识为基础,通过参阅专门的书刊和文献,着手解决实际流动问题。无论对于哪一种读者,本书将为他们铺平顺利过渡的道路。

全书的编排如下。第1章到第4章是流体力学的基本原理,所有学习流体力学的学生都必须准确和完整地掌握。第5章到第8章是流体力学原理在各方面的应用,这一部分可以根据专业的性质,有选择地重点讲授。例如,以水动力学为主的专业,可以对气体力学部分有重点地宣讲,以空气动力学为主的专业可以对水动力学部分有重点地讲授。第9章湍流和第10章涡动力学是近代流体力学中发展较快的部分,凡是有学时的专业,我们建议安排学习这两章的基本内容。

本书第1,2,3,6,9,10章由张兆顺撰写,第4,5,7,8章和附录以及全部习题由崔桂香

撰写,全部内容都经两人反复讨论和修改后定稿。清华大学工程力学系流体力学教研组的
部分教师和学生曾对书稿提出过宝贵的意见,张晓航同学描绘本书部分插图,作者对他们
表示深切的感谢。

作者

1998 年 7 月于北京清华园

目 录

第 1 章 流体的物理性质	1
1.1 流体的连续介质模型	1
1.2 作用在流体上的体积力和表面力	2
1.3 流体的易流性和压缩性	7
1.4 流体的界面现象和性质	8
习题	12
第 2 章 流体运动学	14
2.1 描述流体运动的两种方法	14
2.2 流场的几何描述	16
2.3 质点的加速度公式和质点导数	23
2.4 流体微团运动分析	25
2.5 流场的旋度	34
2.6 给定流场的散度和旋度求速度场	37
习题	42
第 3 章 流体动力学的基本原理	46
3.1 流体动力学的积分型方程	46
3.2 定常流控制体积分型守恒方程的应用	55
3.3 流体动力学的微分型控制方程	66
3.4 流体静力学	71
习题	81
第 4 章 理想流体动力学	91
4.1 理想流体运动的基本方程和初边值条件	91
4.2 理想流体在势力场中运动的主要性质	96
4.3 兰姆型方程和理想流体运动的几个积分	99
4.4 理想不可压缩无旋流动问题的数学提法及主要性质	105
4.5 不可压缩无旋流动速度势方程的基本解叠加法	113
4.6 物体在不可压缩理想流体中运动时的附加惯性	118
习题	128
第 5 章 不可压缩流体的二维定常无旋流动	132
5.1 二维流动概述	132
5.2 不可压缩轴对称定常无旋流动	133
5.3 解不可压缩平面无旋流动问题的复变函数方法	139

5.4	不可压缩流体绕圆柱的定常无旋流动	146
5.5	解平面不可压缩无旋绕流的保角映象法	152
5.6	翼型气动力特性和库塔-儒可夫斯基条件	161
5.7	奇点镜像法	168
	习题	171
第6章	水波动力学	175
6.1	水波动力学的基本方程和边界条件	175
6.2	等深度水域中小振幅波的线性近似	177
6.3	线性水波的色散关系	187
6.4	缓变水深中线性水波的传播	191
6.5	等深度浅水波	195
	习题	200
第7章	气体动力学基础	202
7.1	气体动力学基本方程	202
7.2	声传播方程和马赫数	203
7.3	理想气体等熵流动的主要性质	208
7.4	激波理论及应用	212
7.5	定常超声速气流绕凸角流动(普朗特-迈耶流动)	228
7.6	完全气体在变截面绝热管内的准一维定常流动	230
	习题	240
第8章	粘性流体力学基础	244
8.1	粘性流体的本构方程	244
8.2	牛顿型流体的运动方程——纳维-斯托克斯方程	251
8.3	粘性流体运动的相似律	254
8.4	不可压缩粘性流体的解析解	259
8.5	粘性流体运动的近似解	267
8.6	牛顿流体大雷诺数的定常绕流	272
8.7	不可压缩流体层流边界层的相似性解	279
8.8	卡门动量积分关系式	291
8.9	边界层内的流动和分离	294
	习题	297
第9章	湍流	299
9.1	湍流的发生	299
9.2	流动的稳定性分析	301
9.3	湍流的统计理论	306
9.4	湍流封闭模式	315
9.5	圆管中的定常湍流	318
9.6	不可压缩粘性流体管内流动的阻力及水力管路计算	326

9.7 绕平板定常湍流边界层	332
9.8 切变湍流的拟序结构	336
习题	339
第 10 章 涡及涡动力学	341
10.1 旋涡运动概述	341
10.2 不可压缩理想流体中的旋涡运动	345
10.3 涡动力学基础	349
10.4 势力场中理想不可压缩流体的平面有旋流动	356
10.5 势力场中不可压缩理想流体的轴对称有旋流动	360
习题	362
附录	363
Ⅰ 张量(包括向量)运算基础	363
Ⅱ 广义高斯定理和斯托克斯定理	367
Ⅲ 正交曲线坐标系	368
Ⅳ 流体的变形速率张量和牛顿流体本构方程	372
V 牛顿型流体运动的基本方程(纳维-斯托克斯方程)	374
附表	379
1 常见液体物性参数表	379
2 常压下空气和水的 ρ, μ, ν 值	379
3 标准大气	380
4 完全气体等熵流动函数表	381
5 完全气体正激波前后参数表	389
6 完全气体的普朗特-迈耶函数	394
名词索引	397

流体的物理性质

流体力学研究液体和气体的宏观运动以及它们和周围物体的相互作用,如力的作用和传热等。研究流体的宏观运动必须首先了解流体的宏观性质。

1.1 流体的连续介质模型

流体力学研究流体的宏观运动,它是在远远大于分子运动尺度的范围里考察流体运动,而不考虑流体分子的个别行为,因此我们可以把流体视为连续介质。它具有以下性质:

- (1) 流体是连续分布的物质,它可以无限分割为具有均布质量的宏观微元体;
- (2) 不发生化学反应和离解等非平衡热力学过程的运动流体中,微元体内流体状态服从热力学关系;
- (3) 除了特殊面外,流体的力学和热力学状态参数在时空中是连续分布的,并且通常认为是无限可微的。

连续介质是一种力学模型,它适用于所考察的流体运动尺度 L (如管道流动中管道的直径,机翼绕流中机翼的长度等) 远远大于流体分子运动平均自由程 l 的情况,即:

$$L/l \gg 1 \quad (1.1)$$

物质分子运动理论指出,尺度远远大于分子运动平均自由程的闭系统是热力学平衡体,它的统计特性,也就是宏观物理性质与个别分子行为无关。举例来说,在常温常压下空气分子运动平均自由程约为几十纳米(10^{-8}m)量级,这时我们即使用微米(10^{-6}m)尺度的测针来量度流体特性,测得的仍是巨量分子运动的统计平均量,即宏观属性。也就是说,在这么小的尺度上来观察流体运动,完全可以把流体视作连续介质。在外层空间中航天器运动的情况恰好相反,在那里气体十分稀薄,分子运动的平均自由程高达几米以上,如航天器的尺度为几十米,它周围的气体运动就不能采用连续介质模型。不满足 $L/l \gg 1$ 的气体运动属于稀薄气体动力学,它不在本课程范围内。

把流体无限分割为具有均布质量的微元,它是研究流体运动的最小单元,称之为**流体微团**,它是流体力学中最基本的概念。流体微团具有如下性质。

流体微团的体积 δV 相对于被考察的流体运动尺度 L 应有:

$$\frac{\delta V}{L^3} \ll 1$$

而微团相对于分子运动尺度 l , 应有:

$$\frac{\delta V}{l^3} \gg 1$$

直观地说,流体微团是宏观上无限小、微观上无限大的一个质量体。为了更好地理解

宏观微团概念,我们考察流体中的质量分布。假设我们用不同尺度的立方“采样”盒子来测量流体质量密度。设 s 为采样盒子边长, M_s 为采样盒子中的流体质量,则采样盒子中的流体密度为:

$$\rho_s = \frac{M_s}{s^3}$$

当采样盒子尺度 s 为分子运动尺度时(图 1.1 中 $s \sim l$),分子的随机行为使盒子中流体总质量 M_s 为不确定值,因此盒子中的质量密度随 s 变化极不规则;当采样盒子的尺度是宏观上无限小、微观上无限大时,即 $L \gg s \gg l$,个别分子行为不影响质量密度的度量,另一方面采样尺度相对于流场尺度是无限小,所以宏观的不均匀性在这一尺度范围可以忽略不计,这时盒中流体有一确定的均匀密度值

$$\rho = \left(\frac{\delta m}{\delta V} \right) \quad L^3 \gg \delta V \gg l^3 \quad (1.2)$$

当采样盒子尺度与流场尺度相当时($s \sim L$),宏观不均匀性逐渐显示出来,从而使质量密度随量度的尺度有规则地变化,如图 1.1 所示。

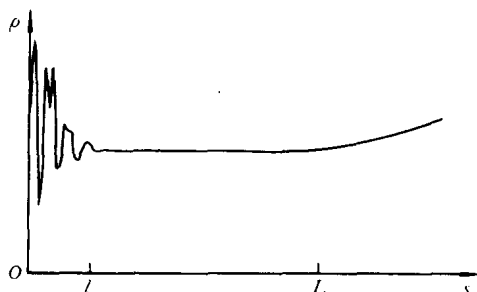


图 1.1 质量密度的分布

微团具有宏观无限小体积,因而可以用时空中一个点标记它,不均匀连续介质的当地物性可以用时空变量 (x, t) 的函数来描述。例如,气体中密度分布 $\rho = \rho(x, t)$ 、温度分布 $T = T(x, t)$ 等。微团的体积或它的表面积在宏观上都是无限小,但发生在体积内或表面上的物理过程都属于宏观的力学和热力学过程。当不需要考虑微团的体积和变形,只研究它的位移和各物理状态时,我们可以把它视作没有体积的质点,这时我们称流体微团为流体质点。

1.2 作用在流体上的体积力和表面力

在流体中任取一个微团,其上受到两种外力:第一种外力作用在微团内均布质量的质心上,这种力通常和微团的体积成正比,称为体积力;第二种外力是周围流体或物体作用在流体微团表面上的力,它和力的作用面大小成正比,称为表面力。下面分别讨论这两种力的性质。

1 体积力和体积力强度

在地球引力场中流体微团受到的引力 δG 与它的质量 δm 成正比:

$$\delta G = g\delta m \quad (1.3)$$

上式中 g 是重力加速度。由于微团的质量 δm 和它的体积 δV 成正比 $\delta m = \rho\delta V$, 因此引力 δG 也和微团的体积成正比, 它是体积力:

$$\delta G = \rho g\delta V \quad (1.4)$$

除了引力外, 还有其他形式的体积力。例如: 带电质点在静电场中运动时, 静电力也是一种体积力。设流体微团的电荷密度为 $q(\text{C}/\text{m}^3)$, 则在静电场 E 中, 该微团受到的静电力为

$$\delta F = qE\delta V \quad (1.5)$$

微团单位体积上作用的体积力称为体积力强度, 它的数学表达式为:

$$f_v = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta V} \quad (1.6)$$

上述例子中引力的体积力强度为 ρg , 静电力的体积力强度为 qE 。

有限体积流体上所受体积力的合力以及体积力相对于某参考点的合力矩可以用求和方法求出。

体积力的合力:

$$F = \int_V f_v dV \quad (1.7)$$

体积力的合力矩:

$$L = \int_V r \times f_v dV \quad (1.8)$$

r 为任意一流体微团相对于参考点的向径。

2 表面力和应力

任取一有限体积的流体, 它的表面上受到周围流体或物体的接触力, 这种力分布于有限体的表面, 称为表面力, 并示于图 1.2(a)。

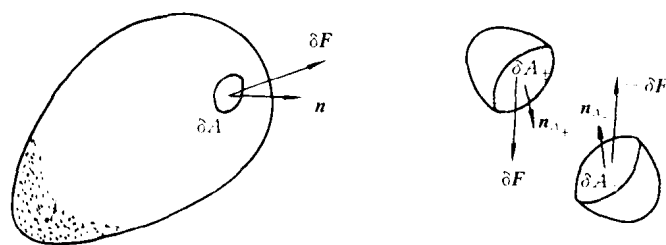
有限体表面微元面积 δA 上单位面积的表面力称为表面力的局部强度, 又称为应力, 定义如下:

$$T_n = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A} \quad (1.9)$$

上式中 δF 是面积 δA 上的作用力, T_n 表示应力, 下标 n 表示表面力作用面 δA 的法向量。

我们要强调指出, 应力和它的作用面方向有关。一般情况下, 流体内部同一空间点而不同方向的作用面上, 流体所受应力是不等的, 所以必须标注应力作用面的法向量。约定作用面的法向量以指向域外为正, 例如图 1.2(b) 中, δA_+ 面的法向量为 n_{A+} , 作用于其上的应力为 $T_{n_{A+}}$, 相邻面 δA_- 的法向量为 n_{A-} 其上应力符号写作 $T_{n_{A-}}$ 。

应力 T_n 是向量, 一般情况下, 它并不垂直于它的作用面, 所以通常可将它分解为垂直于作用面的分量 T_m 和平行于作用面的两个相互垂直分量 T_{τ} 和 T_{σ} 。约定 (n, t, s) 组成右



(a) 有限体上的表面力

(b) 微元体上的表面力

图 1.2 流体中表面力的示意图

手直角坐标系。根据上述约定,应力分量第一个下标符号表示应力作用面的法向量,第二个下标表示应力分量的方向。

定义 应力向量在作用面法线方向的分量称为正应力。

根据应力分量的约定,正值的正应力指向作用面外,因此是拉力;而负值的正应力指向作用面内,因而是压力。

定义 应力向量在作用面切向的分量称为剪应力,或称切应力。

应力具有以下性质:

(1) 相邻两微元面上的表面力是作用力与反作用力,因此它们大小相等方向相反(见图 1.2),令 $n_{A+} = n$, 则 $n_{A-} = -n$, 并将应力写作 $T_{n_{A+}} = T_n, T_{n_{A-}} = T_{-n}$, 则有

$$T_{-n} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} - \frac{\delta F}{\delta A} = -T_n \quad (1.10)$$

(2) 相邻微元面上的正应力和切应力值都相等。

在 δA_+ 面上的正应力 T_{nn} 等于

$$T_{nn} = T_n \cdot n \quad (1.11)$$

在相邻面 δA_- 上正应力为 $T_{-n-n} = T_{-n} \cdot (-n)$, 由 (1.10) 式, 我们很容易证明相邻面上的正应力相等:

$$T_{-n-n} = T_{-n} \cdot (-n) = -T_n \cdot (-n) = T_n \cdot n = T_{nn} \quad (1.12)$$

在 δA_+ 面上的剪应力等于:

$$\begin{aligned} T_{nt} &= T_n \cdot t \\ T_{ns} &= T_n \cdot s \end{aligned} \quad (1.13)$$

在相邻面 δA_- 上建立的右手坐标系应为 $(-n, -t, -s)$, 相应的切应力分量为 T_{-n-t}, T_{-n-s} , 很容易证明, 两相邻面上的切应力分量也相等, 即:

$$\begin{aligned} T_{-n-t} &= T_{-n} \cdot (-t) = -T_n \cdot (-t) = T_n \cdot t = T_{nt} \\ T_{-n-s} &= T_{-n} \cdot (-s) = -T_n \cdot (-s) = T_n \cdot s = T_{ns} \end{aligned} \quad (1.14)$$

3 一点的应力张量及其性质

通过同一点不同面上的应力一般不相等, 但是我们将证明只要知道通过一点三个互

相垂直坐标面上的应力值,就可以确定该点任意方向面上的应力。下面我们证明这一性质。为了论述简明起见,我们在点 O 处取一直角四面体(图 1.3),其中三个面为坐标面,任意倾斜面具有法向量 $\mathbf{n}$ 和面积 δA_n 。

图 1.3 中四面体四个面上的法向量分别为 $\mathbf{n}$, $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$, 作用的应力分别为 $\mathbf{T}_n, \mathbf{T}_{-1}, \mathbf{T}_{-2}, \mathbf{T}_{-3}$, 直角四面体的四个表面积分别为 $\delta A_n, \delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$, 根据面积投影定理, $\delta A_i (i=1, 2, 3)$ 与 δA_n 的关系为:

$$\delta A_i = \delta A_n n_i \quad (1.15)$$

现在我们来建立该微元四面体的力学平衡式, 假定微元体处于体积力强度 $\rho \mathbf{f}$ 的外力场中, 则按牛顿定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ($m = \rho \delta V$ 是微元体的质量, $\mathbf{a}$ 是微团加速度), 四面体的平衡方程应为:

$$\rho \mathbf{a} \delta V = \rho \mathbf{f} \delta V + \mathbf{T}_n \delta A_n + \mathbf{T}_{-1} \delta A_1 + \mathbf{T}_{-2} \delta A_2 + \mathbf{T}_{-3} \delta A_3$$

式中 δV 是微元体的体积。方程左端为微元体的质量和加速度的乘积, 右端第一项是作用在四面体上的体积力的合力, 右端后四项是作用在四面体表面上的表面力的合力。将等式两边同除以 δA_n , 则明显有

$$\lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta V}{\delta A_n} = 0$$

以及(1.15)式 $\frac{\delta A_i}{\delta A_n} = n_i$, 因而有:

$$\mathbf{T}_n + \mathbf{T}_{-1} n_1 + \mathbf{T}_{-2} n_2 + \mathbf{T}_{-3} n_3 = 0$$

注意到相邻面上应力关系式(1.10): $\mathbf{T}_{-i} = -\mathbf{T}_i$, 上式可写作:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_1 n_1 + \mathbf{T}_2 n_2 + \mathbf{T}_3 n_3 = \mathbf{T}_i n_i \quad (1.16)$$

该式说明过一点任意面(它的法向量为 $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$)上的应力由通过该点三个相互垂直面上的应力按公式(1.16)确定。也就是说, 只要知道一点的三个应力 $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3\}$, 于是任意面上的应力可以计算出来。因此我们称 $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3\}$ 为一点的应力状态。

众所周知, 一个向量可以分解为三个分量, 因此每个应力向量 $\{\mathbf{T}_i\}$ 都可以分解为三个分量如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= T_{11} \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_2 + T_{13} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}_2 &= T_{21} \mathbf{e}_1 + T_{22} \mathbf{e}_2 + T_{23} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{T}_3 &= T_{31} \mathbf{e}_1 + T_{32} \mathbf{e}_2 + T_{33} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (1.17)$$

于是一点应力状态还可以用九个代数数值组成的方阵表示:

$$\{\mathbf{T}_{ij}\} = \begin{Bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Bmatrix} \quad (1.18a)$$

应用应力状态的公式(1.17), 任意面上的应力可写作:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_i n_i = T_{ij} n_i \mathbf{e}_j \quad (1.18b)$$

利用张量识别定理(见附录)我们可以证明一点应力状态是张量,因而 T_{ij} 称为应力张量的分量。

4 应力张量的对称性

由微团的力矩平衡原理,我们可以进一步证明,九个应力分量不是相互独立的,而有以下的对称关系式

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (1.19)$$

即应力分量的方阵是对称方阵,或应力张量是对称张量。

证明 根据动量矩定理:有限质量体的动量矩增长率应等于作用在该质量体上的外力矩之和。在流体中取任意一有限体积流体,作用在该有限体表面 Σ 上的外力矩为。

$$L_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_n) dA = \oint_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_i n_i) dA$$

体积力矩为

$$L_V = \iiint_V \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dV$$

有限体的动量矩增长率等于

$$\dot{K} = \iiint_V \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) dV$$

根据动量矩原理 $\dot{K} = \Sigma L_i$, 应有

$$\iiint_V \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) dV = \oint_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_i n_i) dA + \iiint_V \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dV$$

上式中面积分可以用高斯公式(见附录)转换成体积分

$$\oint_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_i) n_i dA = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_i) dV$$

式中被积函数可以进一步简化为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_i) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \times \mathbf{T}_i + \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial x_i}$$

向量 $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = x_i \mathbf{e}_i$, 故被积函数为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{r} \times \mathbf{T}_i) = \mathbf{e}_i \times \mathbf{T}_i + \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial x_i}$$

将它代入动量矩定理表达式后,得

$$\iiint_V (\mathbf{e}_i \times \mathbf{T}_i + \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial x_i} + \rho \mathbf{r} \times \mathbf{f} - \rho \mathbf{r} \times \mathbf{a}) dV = 0$$

将有限体体积无限缩小,这时被积函数中位置向量 $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$, 因而被积函数中后三项较第一项小一量级,当取极限 $V \rightarrow 0$ 时,后三项可略去不计。于是微团的动量矩定理表达式简化为:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{T}_i = 0 \quad (1.20)$$

用应力张量的分量表示式(1.17), (1.20)式可简化为:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{T}_i = \mathbf{e}_i \times T_{ij} \mathbf{e}_j = T_{ij} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)$$

在向量运算中(见附录)有以下公式

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

式中 ϵ_{ijk} 是轮换指标, 于是 $\mathbf{e}_i \times \mathbf{T}_i = 0$ 可写作

$$T_{ij} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = 0$$

或

$$T_{ij} \epsilon_{ijk} = 0$$

由于 ϵ_{ijk} 有最基本的性质 $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, 和 $\epsilon_{iik} = 0$ (相同下标不求和)。因此对应于一个 k , $T_{ij} \epsilon_{ijk} = 0$ 中只有两项, $T_{ij} \epsilon_{ijk} + T_{ji} \epsilon_{jik} = 0$ (相同下标不求和), 将 $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ 代入, 即可得:

$$(T_{ij} - T_{ji}) = 0$$

于是就证明了应力张量的对称性(1.19)式:

$$T_{ij} = T_{ji}$$

应力张量的对称性说明, 一点应力张量只有六个独立分量。

5 理想流体的应力张量

一般来说运动流体中的应力状态有六个分量, 一种最简单的流体模型称作为**理想流体**, 这种流体中任意一点应力状态是各向同性张量, 即理想流体中任意一点的应力张量可表示为:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (1.21)$$

其中 p 是标量且通常大于零, “-”表示正应力作用方向与作用面的外法线方向相反, δ_{ij} 是单位张量, 即

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & i = j \end{cases} \quad (1.22)$$

公式(1.21)表明, 理想流体中任意面上只有正应力, 并且是压强 p , 即任意面上的正应力 $T_{nn} = -p$, 很容易由式(1.22)导出上述结论。因为由式(1.18b), 任意面上的应力可写作

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_i n_i = T_{ij} \mathbf{e}_j n_i$$

因 $T_{ij} = -p \delta_{ij}$, 故 $T_{ij} \mathbf{e}_j = -p \delta_{ij} \mathbf{e}_j = -p \mathbf{e}_i$, 于是任意面上应力

$$\mathbf{T}_n = -p \mathbf{e}_i n_i = -p \mathbf{n} \quad (1.23)$$

上式表明任意面上的应力为正应力, 同时说明任意面上的应力分量都等于 $-p$, 即理想流体微团表面承受均匀分布的压强。

1.3 流体的易流性和压缩性

流体和固体的基本区别是它的易流性。固体在剪切力作用下发生剪切变形后可以达到新的静平衡状态, 而静止流体不能承受剪切力, 任何微小的剪切力都能驱动流体使之持续的流动。也就是说, 静止流体中的应力只有压强; 而当流体运动时, 流体微团的表面除了压强外还有剪应力。流体运动时, 微团之间具有抵抗相互滑移运动的属性称为流体的粘性。真实流体无论运动与否都具有粘性, 但只有在运动时才能表现出来。关于流体的粘性,

我们将在第8章中详细介绍。上节我们介绍过理想流体运动中应力状态,理想流体中只有压强没有剪应力,这是真实流体忽略粘性的一种近似。根据是否考虑流体的粘性,我们把流体动力学分为两大类,理想流体动力学和粘性流体动力学。后续章节中我们将讨论:在什么样的条件下理想流体动力学是真实流体运动的良好近似。

由于压强变化而引起流体密度的变化称为压缩性。气体和液体的压缩性有明显区别。气体的密度通常随压强的增高而增大,随温度的升高而减小,具有明显的可压缩性,它可用热力学状态方程表示:

$$p = p(\rho, T) \quad (1.24)$$

其中 T 为绝对温度,常见的气体大多数服从完全气体状态方程:

$$p = R\rho T \quad (1.25)$$

R 为气体常数。一般来说液体密度几乎不随压强变化,但当温度增加时,密度稍有减小:

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad (1.26)$$

β 称为膨胀系数,它表示单位温升时液体密度的相对变化率,通常 β 在 $10^{-3}(1/K)$ 量级。流体力学中,按流体运动中流体密度的相对变化率的大小,把流动分为可压缩流和不可压缩流两大类。气体一般视作可压缩的,但是在后面第7章中我们将论述:当气体速度远远小于当地声速时,气体密度的相对变化率十分微小,几乎可以忽略不计,这时我们可以把这种低速气体流动作为不可压缩流体处理。液体的体积相对变化率很小,因此通常认为是不可压缩的;但是在水下强爆炸这种极端的情况中,压强及其变化率都很大,这时水的密度变化率就很可观,我们必须考虑水的压缩性。本书大部分内容讨论不可压缩流体运动,第7章专门介绍可压缩流体运动。

1.4 流体的界面现象和性质

流体和固体或流体和另一互不掺混流体交界面处的力学和热力学现象称为界面现象。界面上流体具有以下性质:

1 流-固界面上流体温度和速度的连续性

我们讨论流体的宏观运动,界面上任意微元面积在宏观上无限小,在微观上远远大于分子运动尺度,因此宏观的微元界面两侧的流体应处于热力学平衡状态,即界面两侧的流体分子运动处于统计平衡态。如果不考虑界面上的表面张力,微元界面两侧的流体速度和温度相等,应力向量大小相等、方向相反:

$$T_n = T_{-n} \quad (1.27)$$

$$V_n = V_{-n} \quad (1.28a)$$

$$T_n = -T_{-n} \quad (1.29a)$$

在理想流体近似中,我们不计粘性,流动界面上不存在剪应力,也就是说界面上允许流体有任意相对滑移,这时界面条件(1.28a), (1.29a)应修正为:

$$V_{+n} \cdot n = V_{-n} \cdot n \quad (1.28b)$$

$$p_{+n} = p_{-n} \quad (1.29b)$$

该边界条件表明理想流体在物体表面或理想流体在互不掺混流体界面上虽然可以滑移,但不能相互侵入或穿透,故条件(1.28a)称为理想流体界面上的不可穿透条件。

2 互不掺混流体界面上的表面张力和界面上的应力平衡条件

自然界许多流动现象中有气、液或液、液共存状态,例如:液滴在气流中运动,气泡在液流中运动,以及油滴在水流中的运动等等。这时我们必须考虑气、液或液、液界面上的力平衡条件。在没有外力场作用下空气中平衡的液滴总是呈圆球形,这表明在热力学平衡时液体表面像一张紧的薄膜包裹着液滴。如果我们用类似应力分析的方法(参见图1.4),把界面分割成两部分,则在分割线上必有某种张力使界面处于平衡,称这种张力为表面张力。单位长度的表面张力称为表面张力系数,并用 γ 表示。表面张力系数和界面两侧的介质有关,例如水银与空气界面上的表面张力系数大于水与空气界面上的表面张力系数。通常表面张力系数还随温度升高而减小。

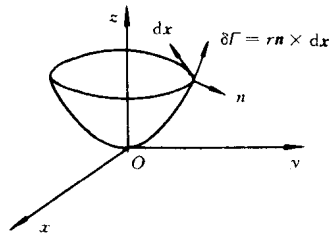


图 1.4 推导液体界面应力条件用图

下面我们导出液-液或气-液界面上的应力关系。表面张力位于界面的切平面内并和分割线垂直,规定界面的法向量指向凸面外法线方向,从张力方向俯视割线时,割线以逆时针方向为正,则在微元弧上表面张力 $\delta\Gamma$ 可表示为

$$\delta\Gamma = \gamma \mathbf{n} \times d\mathbf{x} \quad (1.30)$$

式中 $d\mathbf{x}$ 是微元弧长的位移向量。我们任取一微元曲面,并将坐标设在曲面的顶点,同时假定微元曲面的边界周线为平面曲线且平行于 xy 平面(图1.4)

微元曲面的方程可写作:

$$z = \zeta(x, y) \quad (1.31)$$

在设定的坐标系中,该微元曲面有以下性质:

$$\zeta(0, 0) = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \zeta}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad (1.33)$$

凸面的外法线向量为:

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}}$$

在微元面的原点附近 $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial y} \approx 0$,故它的法向量

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} + \text{高阶小量}$$

于是表面张力的合力

$$\Gamma = \oint \delta\Gamma = \oint \gamma \mathbf{n} \times d\mathbf{x} = \gamma \oint \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) \times (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}) = \gamma \oint \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} dy - \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx \right) \mathbf{k}$$