杨纶标　高英仪　编著

模糊数学

·原理及应用·

（第三版）

华南理工大学出版社

·工科研究生用书·

模糊数学

·原理及应用·

（第三版）

杨纶标　高英仪　编著

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书是工科硕士研究生教材，简明地阐述模糊数学的基本理论和基本方法。全书共十一章，内容包括：F 集合、F 模式识别、F 关系与聚类分析、F 映射与综合评判、扩张原理与 F 数、F 逻辑、F 语言与 F 推理、F 控制、F 积分与可能性理论、F 规则，书后附录介绍了集合及其运算、映射、格等预备知识。根据工科院校的特点，还介绍应用于各专业领域中较成熟的实例。各章配有习题，书后附有答案及提示。

本书也可作为本科高年级教材，或供工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学原理及应用/杨纶标，高英仪编著．—3 版．—广州：华南理工大学出版社，2001.3

(工科研究生用书)

ISBN 7-5623-0440-8

Ⅰ．模…　Ⅱ．①杨…②高…　Ⅲ．模糊数学　Ⅳ．O159

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山　邮编 510640)

责任编辑　胡　元　江厚祥

各地新华书店经销

中山市新华印刷厂印装

*

2001 年 3 月第 3 版第 6 次印刷

开本：850×1168　1/32　印张：13.5　字数：343 千

印数：19001—24000 册

定价：21.50 元

出版说明

研究生教材建设是研究生教育的基础工程,是提高研究生教学质量的重要环节。自1978年恢复招收研究生以来,我校先后编写了多种供研究生使用的教材和教学参考书,有的已正式出版,但更多的是采用讲义形式逐年印发。为满足研究生教育事业发展的需要,我校决定出版“工科研究生用书”系列教材。

“工科研究生用书”以公共课和部分学术专著为主,专业学位课程将根据学科设置和国内相同学科的需求情况有计划地分批出版。我们希望,本系列教材能从研究生的教学需要出发,根据各门课程在教学过程中的地位和作用,既包含本门课程的基本内容,又反映我校工科研究生的特点,并在该学科领域内求新、求深、求精,使学生掌握必需的基础理论和专门知识。学位课教材还应包含学科前沿和交叉学科的丰富内容,反映国内外最新研究成果,学术思想活跃,适应目前科学技术发展的形势。学术专著要充分反映作者的研究成果和学术水平,阐述自己的学术见解,对实现研究生培养目标、提高教育质量起重大作用。

“工科研究生用书”的内容结构和阐述方法,力求条理清楚,论证严谨,具有科学性、系统性和先进性。

由于我校研究生教材建设起步较晚,限于我们的水平和经验,本系列教材难免有错误和不足之处,恳请读者指正,我们将非常感谢。

华南理工大学研究生处

第三版前言

本书自1993年出版以来，受到广大读者欢迎。在这段时间内，已印刷了5次。目前，按工科数学基地建设的原则，即要求编写与时代相适应的工科数学系列教材，并根据我们多年的教学经验和兄弟院校的教师所提出的意见，决定修改再版。

这次修改主要做了如下工作：①采用数模的思想和最新成果，重写了F逻辑函数及其最小化，无限论域上扩张F集及F数的运算，以及F集的隶属函数的确定方法。②对常用的“取小取大”运算和一些例子，给予了较详细的叙述。③一些文字叙述不很确切和习题不妥之处也作了修正。④考虑到读者查阅方便，将普通集的内容作为附录放在书后。

我们对关心本书并提出宝贵意见的教师和读者，表示衷心感谢。

本书第三版得到工科数学基地项目的资助。

编　者

2001年3月

前　言

模糊数学是一门新兴学科，自1965年发表第一篇模糊集论文开始，20多年来发展非常迅速，它已被用到国民经济和科学技术各个领域，许多高等院校把它作为研究生必修或选修课程。本书就是在我校研究生处的关心和大力支持下，由使用多年的打印教材改编而成的。

本书结合编者多年在教学实践中的经验和体会，较简明扼要地介绍了该门学科的基本理论和基本方法，并根据工科院校的特点，注意介绍应用于各领域中较成熟的实例，尽量做到内容全面、叙述清楚、说理通俗。各章都配有适量的例题和习题，书后附有习题答案及较详细的提示，便于具备有“高等数学”和“工程数学”基础知识的读者使用。因此，该书既可作为研究生和本科高年级的教材，也可供工程技术人员自学参考之用。书中带有*号的章节内容较难或专业性较强，可灵活选读。

本书在编写过程中，曾得到“广州模糊系统与知识工程研究所”的程里春副教授的热情帮助，并为本书提供了部分资料。我校数学系原系主任张正寅教授及有关同志，对本书的出版给予极大鼓励和支持，并提出了许多宝贵意见。我校自动化系毛宗源教授为本书提供了模糊控制的应用实例。在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中一定存在不少缺点，恳请广大读者批评指正。

编　者

1992年8月

目　　录

第一章 F集合

模糊数学是描述模糊现象的数学.而模糊集合是模糊数学的理论基础.本章首先简述了模糊数学与经典数学的区别,特别是与概率、数理统计的区别;然后介绍模糊集的基本概念、运算法则以及它的分解定理和表现定理,从而揭示了它与普通集的联系.为了度量模糊性的程度,本章末给出了模糊度的概念和计算公式.

§1.1 引　言

科学研究的不断深入,人们需要研究的关系越来越复杂,对系统的判别和推理的精确性要求也越高.为了精确地描述复杂的现实对象,各类新的数学分支就不断地产生和发展起来.迄今为止,处理现实对象的数学模型可分为三大类:

一类是确定性数学模型.这类模型的背景对象具有确定性或固定性,对象间具有必然的关系.

二类是随机性数学模型.这类模型的背景对象具有或然性或随机性.

三类是模糊性数学模型.这类模型的背景对象及其关系均具有模糊性.

前两种模型的共同特点是所描述的事物本身的含义是确定的,它们赖以存在的基石——集合论,它满足互补律就是这种非此即彼的清晰概念的抽象.

模糊性的数学模型所描述的事物本身的含义是不确定的,例

如:

(1)所有远远大于 1 的实数的集合.(25 是这集合的一员吗?)

(2)健康人的集合.(我是这集合的一员吗?)

(3)动物的集合.(细菌是这集合的成员吗?)

事实上,现实世界中遇到的对象很多是这种模糊的、不精确定义的类型,它们的成员没有精确定义的判别准则.模糊集正反映了这类“亦此亦彼”的模糊性.它是不满足互补律的.

应当指出:随机性与模糊性的数学模型,虽然都具有不确定性,但它们是有区别的:

随机性,是指事件的某种结果的机会而言,由于条件不充分,而导致各种可能的结果,这是因果律的破缺而造成的不确定性.概率与统计数学就是处理这类随机现象的数学.

模糊性,是指存在于现实中的不分明现象.如“稳定”与“不稳定”、“健康”与“不健康”之间找不到明确的边界.从差异的一方到另一方,中间经历了一个从量变到质变的连续过渡过程.这是由于排中律的破缺而造成的不确定性.于是,作为研究模糊现象的定量处理方法——模糊数学便出现了.

可见,如果说概率与统计数学将数学的应用范围从必然现象扩大到随机现象的领域,那么模糊数学则将数学的应用范围从清晰现象扩大到模糊现象的领域.

§1.2 F 集的基本概念

我们所熟悉的普通集合(为了与模糊集相区别,故称之为普通集合)论要求:论域 U 中每个元 u,对于子集 $A \subset U$ 来说,要么 $u \in A$,要么 $u \overline{\in} A$,二者必居其一,且仅居其一,决不允许模棱两可.因而,子集 A 由映射

$$C_A: \quad U \longrightarrow \{0,1\}$$

唯一确定．即集合 A 可由特征函数

$$C_A(u)=\begin{cases}1 & u\in A\\ 0 & u\overline{\in} A\end{cases}$$

来刻画．由于这种函数仅取两个值，所以在表达概念方面有其局限性——只能表达“非此即彼”的现象，而不能表达存在于现实中的“亦此亦彼”的现象．

例1　从图 1-1 的 30 条线段中，选出“长的线段”．

这就要逐条考虑它是否能成为“长线段”的成员．显然．从左数起，第 1 条是属于“长线段”．那么第 2 条、第 3 条呢？……继续下去就会觉得，越靠右的线段作为“长线段”成员的资格就越低了．至于第 29 条，尤其是第 30 条线段根本不能作为“长线段”的成员，即应属于“短线段”．

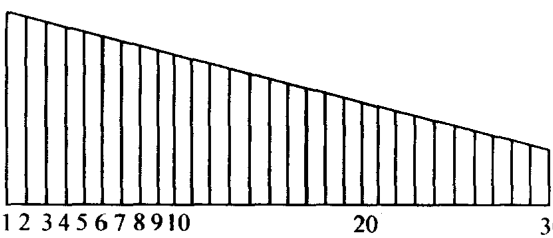

图 1-1

例2　在标志年龄(0～100)的数轴上，标出“年老”、“年轻”的区间．

这就要求考虑：…，40 岁，…，50 岁，…，60 岁，…等年龄是属于“年轻”还是“年老”呢？

在上面的问题里，由于“长线段”与“短线段”之间、“年轻”与“年老”之间，都不存在明确的边界．由“长”到“短”，由“年轻”到“年老”，中间经历了一个从量变到质变的连续过渡过程．所以，对于“长的线段”、“年轻”、“年老”的集合不能用普通集合论里仅取 0 或

1 两个值的特征函数来刻画. 为了体现类似问题中的这种连续过渡过程的共性,美国控制论专家查德于 1965 年,将普通集合论里特征函数的取值范围由{0,1}推广到闭区间[0,1],于是便得到模糊集的定义.

定义 1 设在论域 U 上给定了一个映射

$$A: \quad U \longrightarrow [0,1]$$
$$u \longmapsto A(u)$$

则称 A 为 U 上的模糊(Fuzzy)集,$A(u)$称为 A 的隶属函数(或称为 u 对 A 的隶属度).

为简便计,"模糊(Fuzzy)"记为"F",即"模糊集",写为"F 集".

在例 1 中,论域 U 为图 1-1 中 30 条线段的集. 设 u_i 表示第 i $(i=1,2,\cdots,30)$条线段,则

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_{30}\}$$

若 A 为"长线段"的集,那么,诸线段作为集 A 的成员资格,就是该线段对 A 的隶属度 .

因为线段长度按线性递减,所以 F 集"长线段"的隶属函数 $A(u_i)$是条数 i 的线性函数 .

选 $A(u_1)=1, A(u_{30})=0$,作直线(见图 1-2),按两点式,有

$$\frac{A(u_i)-0}{i-30}=\frac{1-0}{1-30}$$

于是得第 i 条线段 u_i 相对属于"长线段"的隶属度

$$A(u_i)=\frac{1}{29}(30-i), i=1,2,\cdots,30$$

在例 2 中,取论域 $U=[0,100]$,集合 A 和 B 分别表示"年老"和"年轻". 查德给出它们的隶属函数分别为:

$$A(u)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant u\leqslant 50 \\ \left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50< u\leqslant 100 \end{cases}$$

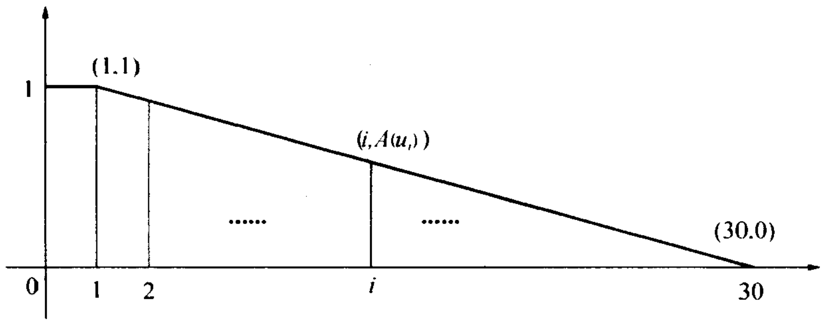

图 1-2

$$B(u)=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25<u\leqslant 100\end{cases}$$

从图 1-3 可见，当 u 取 50 岁以下诸值时，$A(u)=0$，即 50 岁以下不属"年老"；当 u 取值超过 50 岁，逐渐增大时，对于"年老"的隶属度也愈来愈大，如 $A(70)=0.94$，说明年龄为 70 岁时属于"年老"的隶属程度已达 94%. 对于函数 $B(u)$ 也可类似地分析所取值的含义 .

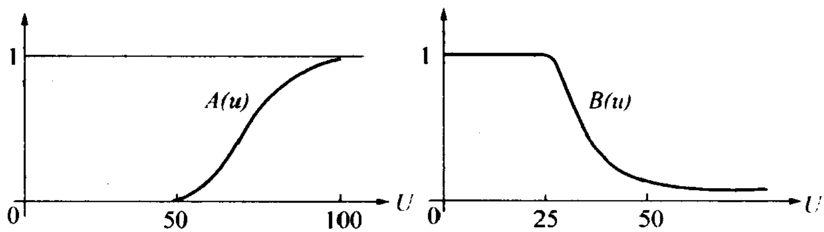

图 1-3

由定义 1 不难看出，对于某 F 集 A，若 $A(u)$ 仅取 0 和 1 两个数时，A 就蜕化为普通集合. 所以，普通集合是模糊集的特殊形态. 若 $A(u)\equiv 0$，则 A 称为空集 $\varnothing$；若 $A(u)\equiv 1$，则 A 称为全集

U.

在给定的论域 U 上可以有多个 F 集，记 U 上的 F 集的全体为 $\mathscr{F}(U)$，即

$$\mathscr{F}(U)=\{A \mid A:\quad U \longrightarrow [0,1]\}$$

称 $\mathscr{F}(U)$ 为 U 上 F 的幂集．显然，$\mathscr{F}(U)$ 是一个普通集合，且

$$\mathscr{P}(U) \subseteq \mathscr{F}(U)$$

F 集合 A 有各种不同的表示法：

一般情形下，可表示为

$$A=\{(u, A(u)) \mid u \in U\}$$

如果 U 是有限集或可数集，可表示为

$$A=\sum A(u_i)/u_i$$

或表示为向量（称为 F 向量）

$$A=(A(u_1), A(u_2), \cdots, A(u_n))$$

如果 U 是无限不可数集，可表示为

$$A=\int A(u)/u$$

式中“/”不是通常的分数线，只是一种记号，它表示论域 U 上的元素 u 与隶属度 $A(u)$ 之间的对应关系；符号“$\sum$”及“$\int$”也不是通常意义下的求和与积分，都只是表示 U 上的元素 u 与其隶属度 $A(u)$ 的对应关系的一个总括．

例 3　设 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，A 表示“靠近 4”的数集，则 $A \in \mathscr{F}(U)$，各数属于 A 的程度 $A(u_i)$ 如表 1-1 所示．

表 1-1

u	1	2	3	4	5	6
$A(u)$	0	0.2	0.8	1	0.8	0.2

则 A 可用不同方式表示为：

(1) $A=\{(1,0),(2,0.2),(3,0.8),(4,1),(5,0.8),(6,0.2)\}$，或舍弃隶属度为 0 的项，而记为

$$A=\{(2,0.2),(3,0.8),(4,1),(5,0.8),(6,0.2)\}$$

(2) $$A=\frac{0}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{0.2}{6}$$
$$=\frac{0.2}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{0.2}{6};$$

(3) $A=(0,0.2,0.8,1,0.8,0.2)$.

在最后的表达式中，没有直接写明元素 u_i，故隶属度为 0 的项不能舍弃，且相应的元素 u_i 的次序也不能随意调换.

例 4 设论域为实数域 R，A 表示"靠近 4 的数集"，则 $A\in\mathscr{F}(R)$. 它的隶属函数是

$$A(x)=\begin{cases}e^{-k(x-4)^2} & |x-4|<\delta\\ 0 & |x-4|\geqslant\delta\end{cases}$$

参数 $\delta>0$，$k>0$，见图 1-4.

例 5 设论域为实数域 R，A 是"比 4 大得多的数集". 它的隶属函数是

$$A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 4\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{(x-4)^2}} & x>4\end{cases}$$

见图 1-5.

对一个 F 集来说，最关键的问题是隶属函数的确定. 怎样的隶属函数合适，这个问题既重要又比较复杂，留待后面对 F 集有进一步的认识时再来讨论.