面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

同济版习题解析
考研试题解析

高等数学·微积分学习指导与习题解析（下册）

COLLEGE MATHMATICS

张学元

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学·微积分 学习指导与习题解析

（下册）

同济版习题解析·考研试题解析

张学元 编

湖南大学出版社
2001年·长沙

内 容 简 介

本书是与高等学校数学教材(特别是同济大学编的《微积分》)紧密配套的辅导教材,是高等学校各专业的本、专科学生、考研志士备考及教师备课不可缺少的学习资料.

本书分上、下两册,上册内容为一元微积分与微分方程;下册内容为多元微积分与无穷级数.每章由四部分组成:内容、方法提要;习题解析;综合题解析;应试题训练.在附录里汇集了近五年招收硕士研究生的入学考试试题和解答.旨在从整体上培养学生的扎实基本功,以提高学生的综合运用能力与“应试思维”“应试能力”.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·微积分学习指导与习题解析·下/张学元编.—长沙:湖南大学出版社,2001.9

ISBN 7-81053-407-6

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料②微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第(066367)号

高等数学·微积分学习指导与习题解析(下册)

Gaodeng Shuxue·Weijifen Xuexi Zhidao yu Xiti Jiexi(Xia Ce)

张学元 编

□责任编辑 李刚 卢宇
□总 策 划 龙挺
□出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731-8821691 0731-8821315
□经 销 湖南省新华书店
□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 32开 □印张 17.75 □字数 445千
□版次 2001年10月第1版 □2001年10月第1次印刷
□印数 1-6 000册
□书号 ISBN 7-81053-407-6/O·28
□定价 22.00元 (上、下册总定价:44.00元)

前 言

随着知识经济时代的到来,高等教育面向21世纪教学内容和课程体系的改革在全国各高校方兴未艾,本书就在这一形势下应运而生.它是以教育部面向21世纪教改计划为指导,以同济大学编写的面向21世纪高等学校课程教材《微积分》为脉络,与高等学校数学教材紧密配套的辅导教材,是高等工科学校各专业本、专科学生不可缺少的学习资料.

本书的主要特点有:

1.侧重于基础知识(概念、定理、体系)和方法的归纳.为此我们在每章提炼出了"内容、方法提要",旨在帮助学生系统地掌握每章的基本知识和基本技能;

2.突出解题思路分析,我们对每节的习题一般先给出分析思路,指出怎样"想"?为什么这样"想"?并在注脚里指出学生容易混淆的概念和可能出现的错误;

3.强化综合运用能力和应试能力.我们在每章都精选了具有一定梯度的足够数量的综合题解析和应试题,旨在帮助学生融会贯通,提高解题、建模能力以及应试思维能力.

王成、王鹤、李承德、李林、刘绍刚、刘美林、刘改平、陈勇、张刚毅、曹刚等或提供了资料,或提出了宝贵意见,在此表示衷心感谢.由于编者水平有限,不妥之处在所难免,敬请广大读者不吝批评、指正.

张学元

2001年6月

目　次

第五章　向量代数与空间解析几何

一、内容、方法提要

1. 空间直角坐标系·基本公式

(1) 空间直角坐标系

过空间一定点O作三条互相垂直的数轴：x轴、y轴、z轴，它们的正向符合右手法则，这样的三条轴组成了空间直角坐标系.

对于空间内的任意一点M，过点M作三个平面分别垂直于x轴、y轴、z轴，其交点的坐标x,y,z叫做点M的坐标.

(2) 空间两点的距离公式

设$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，则P_1，P_2之间的距离为$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

(3) 定比分点公式

设有向线段P_1P_2被分点P分为

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{m}{n}=\lambda(\lambda>0\text{ 内分},\lambda<0\text{ 外分}),$$

则分点P的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

当$\lambda=1$时，得线段P_1P_2中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

(4) 球面方程

以点$M(a,b,c)$为球心，r为半径的球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

当球心在原点 $O(0,0,0)$ 时，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=r^2$.

2. 向量的有关概念

(1) 向量的定义　具有大小和方向的量称为向量.

(2) 向量的坐标表示法.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量，$\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影 a_x,a_y,a_z 叫做向量 a 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 或 $a=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$. 用起点和终点的坐标表示，则为

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

或　$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$. 其中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 分别为与 x 轴正向、y 轴正向、z 轴正向方向相同的单位向量.

注意　向量 a 在某轴 u 上的投影是一个数. 向量 a 在三个数轴上的投影是该向量三个坐标.

(3) 向量的模和方向

向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的模(大小)为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与三个坐标轴正向量的夹角 α,β, $\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

用向量坐标求方向余弦的公式为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}.$$

方向余弦满足条件 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(4) 单位向量

与非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}$$

$$= \{\frac{a_x}{|a|}, \frac{a_y}{|a|}, \frac{a_z}{|a|}\}$$
$$= \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

即$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$恰为与$\vec{a}$方向相同的单位向量.

3. 向量的运算及性质

(1) 向量的线性运算(加法、数乘)

向量的加法满足平行四边形法则或三角形法则.

设向量$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. λ是数,则

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\};$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda b_y, \lambda a_z\};$$
$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\};$$

$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$(共线)$\Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbf{R}$,使得$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

(2) 向量的乘法

1° 数量积(内积、点积)

设$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,则

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$
$$P_{rj_a}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{e}_a \cdot \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}^2|, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, (\lambda\boldsymbol{a}) \cdot (\mu\boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}),$$
$$\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_4^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$(0 \leqslant (\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) \leqslant \pi)$.

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

2° 向量积(叉积、外积)

两向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的向量积为一向量,其模等于$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b})$,其方向垂直于$a, b$,且$a, b$与该向量成右手系.

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}),$

$$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

3° 混合积

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\\&=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\\&=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$.

$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

4. 平面与直线

(1) 平面的表示及有关公式

点法式方程　$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$,其中$(x_0,y_0,z_0)$为平面上的一点,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量.

一般式方程　$Ax+By+Cz+D=0$,

截距式方程　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,

两平面的夹角

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

点到平面的距离　$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

两平面垂直的条件　$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow A_1B_1+A_2B_2+C_1C_2=0$,

两平面平行的条件　$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

(2) 直线的表示及有关公式

参数式方程　$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$. 其中 (x_0, y_0, z_0) 为直线上的一点，$\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 为直线的方向向量.

点向式方程 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

如 $m = 0$，则为 $\begin{cases} x = x_0, \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}; \end{cases}$ 如 $m = n = 0$，就是

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0. \end{cases}$$

一般式(面交式) 方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ 此直线的方向向量 $\boldsymbol{s} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$.

两点式方程　$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$;

两直线夹角　$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}};$$

线与面夹角　$$\sin\varphi = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{s}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + P^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

两直线垂直条件　$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$;

两线平行条件　$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$;

线面垂直条件　$L \perp \pi \Leftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$;

线面平行条件　$L \parallel \pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$;

平面束方程　$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 +$

$\lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$

5. 曲面与曲线

(1) 曲面的表示

1° 柱面　只含 x,y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$ 在空间表示母线平行于 z 轴的柱面，准线是 $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

同样，缺一变量方程 $G(x,z)=0$ 与 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴与 x 轴的柱面.

2° 旋转曲面　将曲线方程 $f(y,z)=0$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，即得此曲线绕 z 轴旋转而成的曲面方程

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

同样，$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$ 是此曲线绕 y 轴旋转而成的曲面方程.

3° 锥面　$z^2=k^2(x^2+y^2)$ 是顶点在原点，旋转轴为 z 轴的圆锥面，$\alpha=\arctan\dfrac{1}{k}$ 是圆锥面的半顶角.

4° 一般方程　$F(x,y,z)=0$；

5° 参数方程　$x=x(u,v),y=y(u,v),$
$z=z(u,v).(u,v)\in D$；

6° 常见二次曲面的标准方程

椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c>0)$，

抛物面：

椭圆抛物面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$；

双曲抛物面(鞍面) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z.$

双曲面：

单叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1.$

常用截痕法画出曲面的形状.

(2) 曲线的表示

1° 一般式方程(面交式). $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0;\end{cases}$ (*)

2° 参数式方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t).$

螺线: $x=a\cos\theta,y=a\sin\theta,z=b\theta;$

3° 空间曲线 Γ 在坐标面上的投影

以 Γ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面叫做 Γ 对 xoy 面的投影柱面,投影柱面与 xoy 面的交线 L 叫做 Γ 在 xoy 面上的投影曲线,由(*)消去 z,得投影柱面方程 $H(x,y)=0$,故投影曲线 L 的方程为 $\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$

二、习题解析

习题 5-1 向量及其线性运算

2. 设长方体的各棱与坐标轴平行,已知长方体的两个顶点的坐标,试写出余下六个顶点的坐标

(1)(1,1,2), (3,4,5); (2)(4,3,0), (1,6,−4).

解 (1) 因为长方体的各棱与坐标轴平行,故其各面与坐标面平行,从而同名坐标相同的顶点各有 4 个,所以长方体的八个顶点的坐标中,已知顶点(1,1,2)位于下底面 $z=2$,下底面的 4 个顶点的 z 坐标均为 2,横坐标 x 只能从 1,3 两个数字中选取,纵坐标 y 只能从 1,4 两个数字中选取,于是,此长方体下底面的四个顶点的坐标依次为:

(1,1,2), (3,1,2), (1,4,2), (3,4,2).

同样，此长方体上底面的 4 个顶点的坐标为

$$(3,4,5),\quad (3,1,5),\quad (1,4,5),\quad (1,1,5).$$

(2) 仿(1) 知长方体的八个顶点坐标为

$$(3,4,0),\quad (4,6,0),\quad (1,3,0),\quad (1,6,0),$$

$$(3,6,-4),(1,3,-4),\quad (4,6,-4),\quad (4,3,-4).$$

4. 证明：以点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

分析 只需证两边相等且三边的长满足勾股定理

证 $\because |AB| = \sqrt{(4-10)^2+(-1-1)^2+(9-6)^2}$

$$= \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2+(4-1)^2+(3-6)^2}$$

$$= \sqrt{98},$$

$$|AC| = \sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2+(9-8)^2}$$

$$= \sqrt{49} = 7,$$

$\therefore |AB| = |AC|$ 且 $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$，

即 ΔABC 为等腰直角三角形.

6. 已给正六边形 $ABCDEF$(字母顺序按逆时针方向)，记$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE} = \boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$ 和$\overrightarrow{CB}$.

解 如图 5-1 所示，由向量加法的三角形法则知

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，故$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

即 $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

$$= \frac{3}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b};$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})$$

$$=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

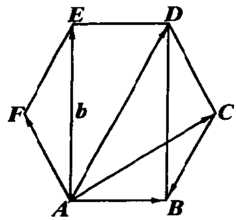

图 5-1

7. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边的长度的一半.

证 如图 5-2 所示，设 DE 为 ΔABC 的中位线，只需证明：$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 事实上，由向量加法的三角形法则有

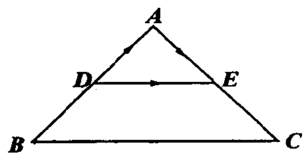

图 5-2

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

故 $DE \overset{\mathbin{/\!/}}{=} \frac{1}{2}BC.$

9. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

解 因 $\boldsymbol{l}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})$

$$-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})$$

$$=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}=(15,7,-15),$$

故 $\boldsymbol{l}$ 在 x 轴上的投影为 15，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

10. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用单位向量 $\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b,\boldsymbol{e}_c$ 表示向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

解 由方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a},\\ \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{b},\\ -2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}.\end{cases}$$

解出 i,j,k 得

$$j=\frac{1}{3}(a-b),k=\frac{1}{4}(a+b+c),i=\frac{5}{12}a+\frac{1}{12}b-\frac{1}{4}c$$

而 $a=|a|e_a=\sqrt{3}e_a,b=|b|e_b=\sqrt{6}e_b,c=|c|e_c=3e_c$. 于是，有

$$i=\frac{5\sqrt{3}}{12}e_a+\frac{\sqrt{6}}{12}e_b-\frac{3}{4}e_c,$$

$$j=\frac{\sqrt{3}}{3}e_a-\frac{\sqrt{6}}{3}e_b,$$

$$k=\frac{\sqrt{3}}{4}e_a+\frac{\sqrt{6}}{3}e_b+\frac{3}{4}e_c.$$

习题 5-2　向量的乘法运算

1.设 $a=3i-j-2k,b=i+2j-k$,求：

(2)$a\times b$;　(4)$\mathrm{Prj}_b a$;　(5)$\cos(\widehat{a,b})$

解　(2) $a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1\end{vmatrix}j$

$$+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2\end{vmatrix}k=5i+j+7k.$$

(4) $\mathrm{Prj}_b a=\dfrac{a\cdot b}{|b|}=\dfrac{3\cdot1+(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$,

$$(5)\ \cos(\widehat{a,b})=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$$

$$=\frac{3\cdot1+(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 $a=2i-3j+k,b=i-j+3k,c=i-2j$,求：

(2) $(a\times b)\times c$; (4)$(a\cdot b)c+(a\cdot c)b$.

解