

高等学校试用教材

高等数学

(物理专业用)

第三册 第二分册

四川大学数学系高等数学教研组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高等数学

(物理专业用)

第三册 第二分册

四川大学数学系高等数学教研组编

人民教育出版社

左淑华

本书主要讲常微分方程及其各种解法, 一阶偏微分方程, 和概率论初步, 适合综合大学物理类专业使用, 也可供其他相近的专业参考。

345/14

高等学校试用教材

高等数学

(物理专业用)

第三册 第二分册

四川大学数学系高等数学教研组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 158,000

1979年3月第1版 1979年7月第1次印刷

印数 00,001—100,000

书号 13012·0322 定价 0.50 元

目 录

第十三章 微分方程	1
第一节 一阶常微分方程	1
§ 13.1.1 一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 解的存在与唯一性定理	1
§ 13.1.2 未解出导数的一阶方程 $F(x, y, y') = 0$	12
第二节 高阶常微分方程	17
§ 13.2.1 一般概念	17
§ 13.2.2 n 阶线性微分方程	20
§ 13.2.3 微分方程的级数解法和数值解法举例	47
第三节 微分方程组	60
§ 13.3.1 标准方程组	60
§ 13.3.2 线性方程组的理论	74
第四节 常微分方程在物理学中的应用举例	85
§ 13.4.1 振动问题	85
§ 13.4.2 落体运动	94
§ 13.4.3 双回路电路	96
第五节 一阶偏微分方程	98
§ 13.5.1 偏微分方程的基本概念	98
§ 13.5.2 一阶线性及拟线性偏微分方程	101
§ 13.5.3 法夫 Pfaff 方程与一阶相容偏微分方程组	109
§ 13.5.4 一阶非线性偏微分方程	116
附录 常系数非齐次线性方程的算子解法	122
第十四章 概率论初步	135
第一节 基本概念	136
§ 14.1.1 随机事件及其运算	136
§ 14.1.2 概率的概念	141
§ 14.1.3 条件概率·独立性	149
§ 14.1.4 全概率公式及贝叶斯公式	157
§ 14.1.5 贝努里 (Bernoulli) 概型	160

第二节 随机变量及其分布	165
§ 14.2.1 随机变量的概念	165
§ 14.2.2 离散型随机变量	167
§ 14.2.3 连续型随机变量	173
第三节 随机变量的数字特征	182
§ 14.3.1 数学期望(均值)	183
§ 14.3.2 方差	187
§ 14.3.3 正态分布和中心极限定理	192
附录一 排列和组合简介	199
附录二	202

第十三章 微分方程

在本书第一册第四章中介绍了微分方程的基本概念,常用的一阶方程(可分离变量的方程和一阶线性微分方程)和二阶方程(不显含变量或一阶导数的二阶方程和二阶常系数线性微分方程)的解法.本章是第四章的深入和发展,介绍作为微分方程理论基础和应用基础的“解的存在与唯一性定理”,某些未解出导数的一阶方程的解法,高阶微分方程特别是高阶线性微分方程,微分方程组特别是线性微分方程组的基础知识,以及常微分方程在物理学中的某些应用,最后介绍了与常微分方程密切相关的一阶偏微分方程的基本知识.

第一节 一阶常微分方程

§ 13.1.1 一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 解的存在与唯一性定理

在第四章中,我们已经学会解几种一阶微分方程,但是事先并不知道这些方程是否有解.

如果一个微分方程不属于能求解(或可积)的类型,那么能否事先断定它有适合初始条件的解存在?若其解存在,此解是否唯一?确切地说,已知一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 和初始条件 (x_0, y_0) , 求其特解 $y = y(x)$, 使 $y(x_0) = y_0$, 或者说,求该方程过点 (x_0, y_0) 的积分曲线(或解).由初值条件求特解称为该方程的初值问题,也称为哥西(Cauchy)问题或哥西初值问题,初始值 (x_0, y_0) 又称为

初始数据或初始条件.

1. 解的存在与唯一性定理 已知一阶微分方程

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

和初值条件

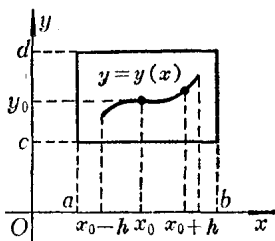
$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

如果在以点 (x_0, y_0) 为中心的闭矩形区域(图 13.1)

$$R = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

上, 二元函数 $f(x, y)$ 连续并且对 y 有有界偏导数, 则存在着这个方程的唯一解 $y = y(x)$, 它确定在 (a, b) 的某个子区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上, 而且当 $x = x_0$ 时 $y = y_0$.

换句话说, 对于矩形 R 内部取的任何初始数据, 存在着与之对应的唯一解, 只要 $f(x, y)$ 满足所设的各项条件. (这些条件也可以削弱一些而得到多种多样的形式, 例如, 偏导数 f'_y 在 R 上存在而且有界的条件可以削



(图 13.1)

弱*成所谓李卜希兹(Lipschitz)条件: 对于 R 上任意两点 (x, y_1) , (x, y_2) 有不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2| \quad (L)$$

成立, 其中 $N > 0$ 为一个定数).

因此, 有相当广泛的一类方程, 不必去解它, 就可判定它们有适合初始数据的唯一解, 例如, 对于方程 $y' = x + y^2$, 可以提出具有任意初始值 x_0, y_0 的哥西问题. 因为方程的右端 $f(x, y) = x + y^2$ 在 x, y 平面上任何闭矩形域上连续且有连续偏导数, 也就有关于 y 的有界偏导数, 所以这样的初值问题有解而且这样的解是唯

* 由微分学中值定理 $f(x, y_1) - f(x, y_2) = f'_y(x, y^*)(y_1 - y_2)$, (其中 y^* 为介于 y_1, y_2 之间的某数) 又由 f'_y 的有界性立即推出 (L) 成立.

一的.

有许多种方法证明这个定理,这些证明方法中,有一种叫比卡(E. Picard)的逐次逼近法.它对定理的证明过程本身就提供了求方程近似解的方法.

我们来介绍这一方法并证明这个定理.取函数 $y_0(x) = y_0$ 作为解的零次近似.将函数 $y_0(x)$ 代替方程(1)中的 y 得方程

$$y' = f(x, y_0(x)) \quad (3)$$

其初值条件同于初值条件(2).我们取方程(3)的哥西问题的解作为方程(1)的解的一次近似 $y_1(x)$.

方程(3)因其右端只是 x 的函数,容易积分而得出其哥西问题的解为

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx$$

再将方程

$$y' = f(x, y_1(x))$$

的适合初始条件(2)的解取作(1)的解的二次近似 $y_2(x)$:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

此法继续下去.如果已求出方程(1)的第 k 次近似 $y_k(x)$,则第 $k+1$ 次近似 $y_{k+1}(x)$ 可按公式

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_k(x)) dx \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

求出.

下面来证明定理.证明过程较长,但其基本思想是简单的,即证明以上近似序列 $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x), \dots$ (简记为 $\{y_k(x)\}$) 一致收敛,而且其极限函数就是方程(1)的初值问题的解,然后证明这个解是唯一的.

在证明过程中要用到数学分析的一些结论,读者已在本书前

两册中学过,现将它们($1^\circ-6^\circ$)列举如下,以便在证明过程中引用.

1° . 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上有界. 即是说, 存在一个数 $M > 0$ 使得

$$|f(x, y)| \leq M$$

对 D 上一切点 (x, y) 成立.

2° . 设 $g(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 连续, 则函数

$$h(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

在 $[x_0, x_1]$ 也连续.

3° . 设 $f(t)$ 在区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 可积, 则

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt$$

如果 $|f(t)| \leq M$, 则

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| \leq M(\beta - \alpha)$$

4° . 关于一致收敛性的维尔斯脱拉斯(Weirstrass) M 判别法: 设 $\{g_n(x)\}$ 是区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上的函数序列. 如果在此区间上有 $|g_n(x)| \leq M_n (n=1, 2, \dots)$ 而且 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ 在区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 一致收敛于唯一的极限函数 $g(x)$.

5° . 设 $f(x, y)$ 关于变数 y 在闭区间 $y_1 \leq y \leq y_2$ 上连续. 当 $\alpha \leq x \leq \beta$ 时 $y_1 \leq y_k(x) \leq y_2 (k=0, 1, 2, \dots)$ 而且 $\{y_k(x)\}$ 一致收敛于函数 $y(x)$, 则序列 $\{f(x, y_k(x))\}$ 在区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上一致收敛于 $f(x, y(x))$.

事实上, 因 $\{y_k(x)\}$ 在 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上一致收敛于 $y(x)$, 故对任给正数 $\delta > 0$, 存在一个与 x 无关的自然数 $n_0 > 0$, 使不等式

$$|y_k(x) - y(x)| < \delta$$

当 $k > n_0$ 时在 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上一致成立. 又 $f(x, y)$ 关于 y 在闭区间

$[y_1, y_2]$ 连续; 由此可知, 对任给正数 $\varepsilon > 0$, 存在一个与 y 无关的正数 $\delta_0 > 0$, 使不等式

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon$$

当 $|y' - y''| < \delta_0$ 时在 $[y_1, y_2]$ 上一致成立. 综合上述可知, 对于任给正数 $\varepsilon > 0$, 存在一个与 x 无关的正整数 n_0 , 当 $k > n_0$ 时在区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上一致成立下述不等式

$$|f(x, y_k(x)) - f(x, y(x))| < \varepsilon$$

这就表示函数序列 $\{f(x, y_k(x))\}$ 在 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上一致收敛于函数 $f(x, y(x))$.

6°. 假设在区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 连续的函数序列 $\{g_k(x)\}$ 一致收敛于函数 $g(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续, 而且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g_k(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

证明 根据假设, $f(x, y)$ 在 R 上连续, 因此由 1°, 对 R 中一切点 (x, y) 有

$$|f(x, y)| \leq M$$

$|f(x, y)|$ 在 R 上的上界 M 可取无穷多个值, 这里取 $|f(x, y)|$ 在 R 上的最小上界(即上确界) M 为佳. 令

$$h = \min\left(b - a, \frac{d - c}{M}\right) \quad (4)$$

1) 首先证明序列 $\{y_k(x)\}$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上满足不等式

$$|y_k(x) - y_0| \leq b \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

当 $k = 0$ 时(5)显然成立. 假设(5)对于 $k = s - 1$ 成立, 则由归纳法假设及 1°, 3° 和(4)有

$$\begin{aligned} |y_s(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(x, y_{s-1}(x)) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_{s-1}(x))| dx \right| \\ &\leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| = M|x - x_0| \leq Mh \leq b \end{aligned}$$

因此, (5)已证明.

由(5)可知, 当 $|x-x_0| \leq h$ 时 x, y 平面上的点 $(x, y_k(x))$ 一定属于闭区域 R , 因而 $f(x, y_k(x))$ 是 x 的连续函数. 由此利用数学归纳法及性质 2° 容易证明各 $y_k(x)$ 在区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上连续.

2) 其次, 用数学归纳法可以证明

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq MN^{k-1} \frac{|x-x_0|^k}{k!} \leq \frac{MN^{k-1}h^k}{k!} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (6)$$

其中 N 为李卜希兹常数 (由于 $f(x, y)$ 在 R 上有有界偏导数, 因此 $f(x, y)$ 必满足李卜希兹条件 (L))

如果 $k=1$, 我们得

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0(x)) dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| \\ &= M|x-x_0| \leq Mh \end{aligned}$$

因此(6)对于 $k=1$ 成立.

今设(6)对于 $k=s$ 成立, 并证明(6)对 $k=s+1$ 也成立. 当 $k=s$ 时(6)成为

$$|y_s(x) - y_{s-1}(x)| \leq MN^{s-1} \frac{|x-x_0|^s}{s!} \leq \frac{MN^{s-1}h^s}{s!}$$

因此, 由不等式 (L) 及性质 3° 有

$$\begin{aligned} |y_{s+1}(x) - y_s(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(x, y_s(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_{s-1}(x)) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_s(x)) - f(x, y_{s-1}(x))| dx \right| \\ &\leq N \left| \int_{x_0}^x |y_s(x) - y_{s-1}(x)| dx \right| \\ &\leq \frac{MN^s}{s!} \left| \int_{x_0}^x |x-x_0|^s dx \right| \\ &= \frac{MN^s |x-x_0|^{s+1}}{(s+1)!} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{MN^s h^{s+1}}{(s+1)!}$$

3) 下面证明函数序列 $\{y_k(x)\}$ 在区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上一致收敛于它的极限函数 $y(x)$.

我们有

$$\begin{aligned} y_k(x) - y_0 &= y_k(x) - y_{k-1}(x) + y_{k-1}(x) - y_{k-2}(x) + \cdots + y_1(x) - y_0 \\ &= \sum_{m=1}^k [y_m(x) - y_{m-1}(x)] \end{aligned} \quad (7)$$

由(7)有

$$\sum_{m=1}^{\infty} |y_m(x) - y_{m-1}(x)| \leq \frac{M}{N} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Nh)^m}{m!} = \frac{M}{N} (e^{Nh} - 1)$$

根据 4° 可知级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} [y_m(x) - y_{m-1}(x)]$$

在区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上一致收敛于唯一的极限函数 $\tilde{y}(x)$. 但是

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k [y_m(x) - y_{m-1}(x)] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [y_k(x) - y_0] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) - y_0 \end{aligned}$$

或者

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = y(x), \quad y(x) = \tilde{y}(x) + y_0$$

这就证明了, 函数序列 $\{y_k(x)\}$ 在区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上一致收敛于极限函数 $y(x)$.

4) 现在来证明 $y(x)$ 在 $|x-x_0| \leq h$ 时是微分方程(1)的解. 因 $f(x, y)$ 是连续函数, 又 $\{y_k(x)\}$ 一致收敛于 $y(x)$, 所以

• 7 •

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k(x)) = f(x, y(x))$$

在 $|x - x_0| \leq h$ 时成立, 而且这种收敛是一致收敛.

由等式

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_k(x)) dx \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

令 $k \rightarrow \infty$ 取极限, 根据 6° 可得

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} y_{k+1}(x) = y_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_k(x)) dx \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{k \rightarrow \infty} f(x, y_k(x)) dx \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad (|x - x_0| \leq h) \end{aligned}$$

将

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad (8)$$

两端对 x 求导数可得

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx = f(x, y(x)) \quad (|x - x_0| \leq h)$$

而且

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y(x)) dx = y_0$$

即是说, 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上确定的函数 $y(x)$ 确实满足微分方程(1)及其初始条件(2), 因而是方程(1)的初值问题的解.

5) 最后证明方程(1)的初值问题的解是唯一的. 用反证法, 假定除了刚才得到的解 $y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x)$ ($|x - x_0| \leq h$) 之外, 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上还有(1)的满足初始条件(2)的另外一个解 $w(x)$. 因此, $w(x)$ 代入方程(1)的右端之后应使 $f(x, w(x))$ 有意义, 即是说, 应当假定当 $|x - x_0| \leq h$ 时 $|w(x) - y_0| \leq b$. 至于 $y(x)$,

当 $|x-x_0| \leq h$ 时当然满足 $|y(x)-y_0| \leq b$, 这可由不等式(5)令 $k \rightarrow \infty$ 取极限得到. 今定义

$$v(x) = |y(x) - w(x)|$$

则 $v(x) \geq 0$, 而且 $v(x)$ 在区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上连续. 因为 $w(x)$ 是

(1)的解, 所以 $\frac{dw(x)}{dx} = f(x, w(x))$, 再注意 $w(x_0) = y_0$ 可得

$$w(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, w(x)) dx \quad (9)$$

由(8)与(9)可得

$$v(x) = \left| \int_{x_0}^x [f(x, y(x)) - f(x, w(x))] dx \right|$$

再由李卜希兹条件(L)可得

$$v(x) \leq N \left| \int_{x_0}^x |y(x) - w(x)| dx \right| = N \left| \int_{x_0}^x v(x) dx \right|$$

显然, 对任何数 $\varepsilon > 0$ 有

$$v(x) \leq \varepsilon + N \left| \int_{x_0}^x v(x) dx \right|$$

根据著名的别尔曼(Bellman)不等式(请参考王柔怀、伍卓群编《常微分方程讲义》201页)有

$$v(x) \leq \varepsilon e^{N|x-x_0|}$$

这表明 $v(x)$ 可以小于任意小的正数; 由 $v(x) = |y(x) - w(x)| \geq 0$, 导致 $v(x) \equiv 0$, 即 $y(x)$ 与 $w(x)$ 恒等. 所以极限函数 $y(x)$ 是(1)的适合初值条件(2)的唯一解.

至此, 关于解的存在与唯一性定理全部证明完毕.

例子, 用逐次逼近法求方程 $\frac{dy}{dx} = y$ 的适合初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解.

显然 $f(x, y) = y$ 在 x, y 平面上任何有界的矩形闭域 R 上连续而且 $f'_y = 1$ 有界. 因此, 所求解是存在而且唯一的, 设它为 $y(x)$.

取 $y(x)$ 的各次近似 $y_0(x) = y_0$

$$y_1(x) = y_0 + y_0(x - x_0)$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [y_0 + y_0(x - x_0)] dx$$

$$= y_0 + y_0(x - x_0) + y_0 \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

.....

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x y_{k-1}(x) dx$$

$$= y_0 + y_0(x - x_0) + y_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + y_0 \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

所求解

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = y_0 \left[1 + (x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \dots \right] = y_0 e^{x - x_0}.$$

直接用分离变量法积分

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln |y| = x + C$$

由初值条件

$$y(x_0) = y_0$$

得 $C = \ln |y_0| - x_0$, 从而得解

$$y = y_0 e^{x - x_0}.$$

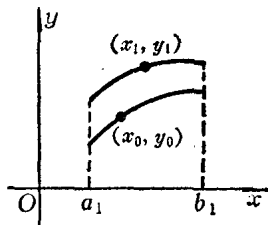
两种作法, 结果一致.

2. 解对初值的连续依赖性 解的存在与唯一性定理还与实用上很重要的一个问题(即所谓运动稳定性)有关. 假定 $y = y(x)$ 是哥西问题

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

的解.

十分明显, 这个解将依赖于所选取的初始数据, 初始数据不同, 相应的解及解的存在区间也不同, 假设所有不同的解的公共存在区间为 $[a_1, b_1]$ (图 13.2). 因此, 哥西问题的解将是三个变元即自变量 x 和初始数据 x_0, y_0 的函数, 代替 $y(x)$, 可以更确切地写为 $y(x, x_0, y_0)$ 而且 $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$.



(图 13.2)

例如, 在前例中, 方程 $y' = y$ 的满足初始条件的解 $y = y_0 e^{x-x_0}$ 就是三个变量 (x, x_0, y_0) 的函数.

随之产生一个问题: 函数 $y(x, x_0, y_0)$ 随 x_0, y_0 变化而变化的性质是怎样的? 特别是当初值发生微小改变时, 函数相应的偏差也小吗? 即是说, $y(x, x_0, y_0)$ 是变元 x_0, y_0 的连续函数吗?

这个问题是很有意义的, 我们知道微分方程在应用上是描述某种物理过程或技术过程的. 初始数据是从生产和科学实践中取得的. 无论哪种仪器也不可能提供绝对精确的测量数据, 即初始数据总有一定误差. 倘使其微小误差引起解的巨大的或本质的变动, 那么所求出的近似解或精确解毫无实用价值. 因此, 只有满足初始条件 $y(x_0 + \Delta x_0) = y_0 + \Delta y_0$ 的解与满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解, 当误差 $|\Delta x_0|$ 和 $|\Delta y_0|$ 充分小时, 对于 $[a_1, b_1]$ 中的一切 x 相差很小, 我们才认为这样的解是靠得住的. 这就是解对初值的连续依赖性问题.

容易看出, 在比卡的证明方法中作出的各次近似 $y_k(x)$ 是连续依赖于 x_0, y_0 的, 可以证明 (参考微分方程的专门教程) 它们的极限函数, 也就是哥西问题的解, 也是连续依赖于 x_0, y_0 的, 这只需 x 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 变化, 而方程右端函数 $f(x, y)$ 满足存在与唯一性定理中叙述的各种条件就行了.

在前例中, 方程 $y' = y$ 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解 $y = y_0 e^{x-x_0}$. 显然在任何区间 $[a, b]$ 上是连续依赖于初值 x_0, y_0 的, 即有

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} y(x, x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = y(x, x_0, y_0)$$

在 $a \leq x \leq b$ 成立.

§ 13.1.2 未解出导数的一阶方程 $F(x, y, y') = 0$

关于 y' 未解出的方程 $F(x, y, y') = 0$ 初值问题解的存在与唯一性定理, 可以化成 $y' = f(x, y)$ 的情形, 这是因为, 由隐函数存在定理, 在一定条件下 $F(x, y, y') = 0$ 总可以化成 $y' = f(x, y)$. 因此, 这里不再讨论这种形式的存在与唯一性定理. 下面仅就其可求解的两种情况加以讨论.

1. 一阶高次方程 我们在前面学过一阶方程的各种可积类型, (如可分离变量方程, 一阶线性方程等), 都是已解出导数的方程 $y' = f(x, y)$ 的特例. 这种方程的特点是不出现 y' 的高次项. 现在我们来研究出现 y' 的高次项的一阶方程 (称为一阶高次方程) $F(x, y, y') = 0$, 它是未解出导数的一阶方程的特殊情况.

如果该方程可以就 y' 解出, 就按已解出导数的方程 $y' = f(x, y)$ 来处理.

假设该方程是关于 y' 的 k 次方程 (其系数是 x, y 的函数), 如果方程 $F(x, y, y') = 0$ 在 x, y 变化的某个区域内, 对 y' 而言无实根, 则在该区域内不存在积分曲线. 例如, $y'^2 = 1 - x^2 - y^2$ 在区域 $x^2 + y^2 > 1$ 内没有积分曲线. 又如, $y'^2 + 1 = 0$ 在整个平面上都没有积分曲线.

在有实根的情形, 尽可能分解 $F(x, y, y')$ 为若干实因子之积 (这些因子不能再分解了), 假设其中有 l ($l \leq k$) 个一次因子之积:

$$[y' - f_1(x, y)][y' - f_2(x, y)] \cdots [y' - f_l(x, y)] = 0$$