浙江省高等教育重点建设教材

数学建模

杨启帆　方道元　编著

浙江大学出版社

数学建模

●浙江省高等教育重点建设教材

数 学 建 模

杨启帆　方道元　编著

浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学建模／杨启帆．方道元编著．—杭州：浙江大学出版社．1999.8
浙江省高等教育重点建设教材
ISBN 7-308-02139-4

Ⅰ．数…　Ⅱ．①杨…　②方…　Ⅲ．数学模型-高等学校-教材　Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 27338 号

出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
责任编辑　陈子饶
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　余杭市供销印刷有限公司
经　　销　浙江省新华书店
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　20.25
字　　数　520 千
版、印次　1999 年 9 月第 1 版　2001 年 2 月第 3 次印刷
印　　数　3001—5000
书　　号　ISBN 7-308-02139-4/O·236
定　　价　23.00 元

内容简介

《数学建模》是近年来发展起来的一门新学科。本书以物理、生态、环境、医学、经济等领域的一些典型实例阐述了建立数学模型解决实际问题的基本方法和技能。全书分三篇共十一章，主要涉及连续模型和离散模型。阅读本书有助于开拓思想，增长应用数学推理方法解决实际问题的能力。

本书可用作高等院校数学建模课研究生、本科生教材，同时也可供高等院校师生及各类科技、工程工作者参考。

前　言

近几十年来，随着科学技术的进步，特别是电子计算机的诞生和不断完善，数学的应用已不再局限于物理学等传统领域，生态学、环境科学、医学、经济学、信息科学及一些交叉学科都提出了大量有待解决的实际研究课题。要用定量分析的方法解决这些实际问题，十分关键而又十分困难的一步就是要建立恰当的数学模型。建立数学模型的过程需要把错综复杂的实际问题抽象为简单合理的数学结构，要做到这一点，既需要有丰富的想象力，又需要去寻找较合适的数学工具，从某种意义上讲，它是能力与知识的综合运用。在传统的大学教育中，往往比较重视知识的传授，而能力的培养则常常被忽略了。为了使大学教学更加适合社会的需求，传统的数学内容与模式必须有所改革，在这方面各级领导和许多教育工作者已经作了大量的努力和尝试。数学建模课的开设和大学生数学建模竞赛的举办就是其中之一。

数学建模课在浙江大学已开设过数十个班次。最初，该课程只是应用数学系学生的选修课，此后逐步扩大到应用数学系及部分理工科专业的必修课。近几年来，我校已每年固定开设应用数学系、全校混合班、工程高级班必修课、工科研究生学位课及全校工科学生选修课各一个班次。该课程的教学受到了学校教务处的充分重视，被列为面向 21 世纪教学改革重点项目予以支持，同时也受到了学生们的普遍欢迎。

本书作者之一曾和天津大学边馥萍教授合作，于 1990 年编著出版了“数学模型”一书。在此后的几年中，由于各校普遍开设数学建模课，尤其是自 1992 年以来，国内每年举办一次全国大学生数学建模竞赛，原书已不太适合目前的需求。在浙江省教委高教处和学校教务处的直接领导下，我们总结了历年来的教学经验和教训，并参考了国内外有关数学建模的各种书籍和资料，编著了本书。

本书内容主要分为建模基础、连续模型和离散模型三部分。建模基础与连续模型由方道元同志编写，离散模型由杨启帆同志编写。我们单独列出建模基础并作为第一篇，是为了强调数学建模的基本思想方法和技能。此外，作为附录，书后还收集了 1985 年至 1999 年美国大学生数学建模竞赛(MCM)的全部试题及 1992 年至 1998 年全国大学生数学建模竞赛(CMCM)的全部试题，供读者参阅。

数学建模与其他课程不同，它不应有固定的教学内容，涉及的领域及所用的数学方法也不应限定，编著教材有较大的难度，加上作者水平有限，书中必有很多不足之处，恳请广大读者批评指正。

谢敦礼、蔡跃志两位教授审阅了全书并提出了诸多宝贵的建议和意见，作者在此表示衷心的感谢。

作者　　1999 年 3 月

目　　录

第一篇　建模基础

第二篇　连续型模型

第三篇　离散模型

第一篇

建模基础

第一章　什么是数学建模

一、数学建模流程

何谓数学建模？简单地说它是建立数学模型的过程。应该说对它并不陌生，早在中学，甚至小学时代就已经用建立数学模型的办法来解决过一些简单的或理想化的实际问题。例如航行问题：甲乙两地相距 750 公里，船从甲到乙顺水航行需 30 小时，从乙到甲逆水航行需 50 小时，问航速、水速若干？

这是一个非常理想化的实际问题。显而易见，此题把航行中航速和水速都设为常数了。求解这个问题当然是设船速、水速分别为 x 和 y，由题意并用匀速运动的距离等于速度乘以时间表达，即

$$(x+y)\cdot 30 = 750,\qquad (x-y)\cdot 50 = 750 \tag{1.1}$$

求解上述二元一次方程组，得

$$x = 20,\qquad y = 5 \tag{1.2}$$

这样我们就知道了船速、水速分别为 20 公里 / 小时，5 公里 / 小时。

这个问题固然简单，但其求解经历了以下过程：首先根据问题的所求明确了变量，然后根据"匀速运动的距离 = 速度 × 时间"这一物理规律建立了变量之间的一个明确的数学方程式（称之为数学模型）；求解这个数学模型而得数学解。解释验证这个解发现与要求相符，说明我们的模型是正确的。

上述航行问题大致描述了用数学建模方法解决实际问题的途径，一般说来数学建模过程可以用图 1.1 所示的流程框图来说明。

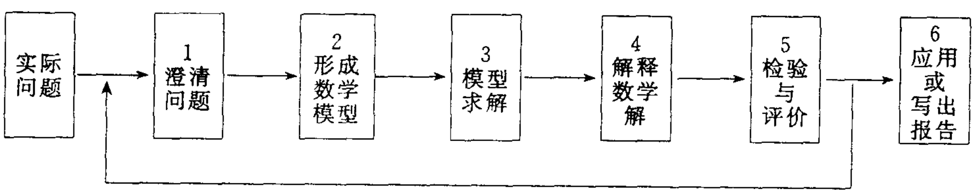

图1.1　数学建模流程图

从以上框图可以看出，数学建模的过程就是一个执行上述流程框图的多次循环过程。

框 1—— 澄清问题　现实问题往往是复杂而零乱的，所以有必要认真审题。澄清什么是已知的，什么是要求的，是确定型的还是随机型的问题等等。根据建模的对象和目的充分发掘解题的信息，如事实、数据等。在澄清问题的同时，要着手对问题进行抽象和简化。要注意的是这一工作往往不是一次能够完成的，有时需要反复几次。

框 2—— 形成数学模型　首先是寻找最简单的模型，如可能也可以作图说明。可根据建模的对象、目的具体地找出所有的相关因素，抓住主要的方面进行定量研究。即参考因素间的关系，提取主要因素。确定出诸因素中哪些是变量，哪些是参量，哪些是常量，并采用适当的符号、单位来标识。如有可能或必要可收集尽可能多的数据。然后考察各信息因素的性态，以及它们之间的关系，使用数学技能或应用某种"规律"建立变量、参量间的明确的数学关系，如比例

关系，线性、非线性关系，指数关系，输入、输出关系，牛顿第二定律，能量守恒，差分、微分方程，矩阵、概率统计等。然后，可根据问题的要求对模型进行必要的修改。

框 3—— 模型的求解　选择适当的数学方法求得数学模型的解。可以用代数方法、数值方法和分析、图论方法等。如有可能，可以使用各种软件包。值得注意的是许多数学模型往往是很复杂、很难的，有时往往要根据实际情况对模型作简化，使得解析或数值求解成为可能。若是数值计算，要注意计算的复杂性问题。

框 4—— 解释数学解　考察所得的数学解，是否具有应有的性质。同时把数学的表述解释或翻译成与实际问题相适应的通俗易懂的语言。

框 5—— 模型的检验与评价　建模是否正确还必须验证。常常是用实验或问题提供的信息记录来进行检验：检验解对参数、初始数据的敏感程度；检验你的预测是否已经达到精度的要求，是否已经达到预期的目的等。如果还想更精确地刻划问题的解，是否还需改进你的模型，如果是，则返回到框 1；否则进入框 6。一个成功的模型往往是一个多次循环的过程。

框 6—— 建模报告　有关模型报告的写作参见 2.8 节。

此外，尚有几点说明：

(1) 若对模型进行了简化，实质上是改变了原问题，简化后的模型只能说是原问题的一种近似，怎样才能做到正确的近似不仅需要很强的分析问题的能力，而且需要有很强的洞察力。

(2) 任何一个模型(包括物理模型)都能定义为现实系统的某些方面的简化表示。一个数学模型就是用数学概念、函数、方程等建立起来的模型。

(3) 上面的流程图仅供初学者作参考，给初学者有一个基本的建模概念，在实际操作时未必严格按照这一流程进行。

二、举例

为了帮助读者理解与认识上述建模流程，这里给出一个大家都熟悉的例子：

雨中行走问题：天将下雨，从寝室到教室有一段约一公里的路程。由于事情紧急，不拿雨具就跑出去了。可刚到门口，天已下了大雨。如果冒雨行走，问你将会被淋得多湿？

这个问题看起来很简单，只要跑得越快越好。然而把雨的方向的变化考虑进去，不见得如此。

1. 澄清问题

给定一个特定的降雨条件，能否设计一个方案使你被雨淋得最少？这个模型是确定的，因为它完全依赖于降雨速度，风向，路程与奔跑速度。我们需要给出一个依赖于这些因素的确定淋雨量的公式。通过调查可以知道一组比较典型的数据：雨速 = 4 米 / 秒；走速 = 2 米 / 秒；跑速 = 6 米 / 秒；路程 = 1000 米；降雨量 = 2 厘米 / 小时。

与此问题有关的因素：

因素	符号	单位
淋雨时间	t	秒
雨速	r	米 / 秒
雨的角度(由于有风)	θ	度
走速	v	米 / 秒
人的高度	h	米

人的宽度	w	米
人的厚度	d	米
淋雨量	C	升
雨的强度	I	
行走的距离	D	米

2. 形成模型

首先我们建一个尽可能简单的模型。假设人所走的路线是直线，将人体视为长方体，设雨速为常数，不考虑雨向。若在整个一公里路程中你的跑速均为 6 米 / 秒，则

$$\text{淋雨时间} = \frac{1000\text{ 米}}{6\text{ 米 / 秒}} \approx 167\text{ 秒} = 2\text{ 分 }47\text{ 秒}$$

若降雨量为每小时 2 厘米，则 2 分 47 秒中的降雨量为 $2 \times 167 \times 0.01 \div 3600$ 米。此时，若取人高为 1.5 米、宽为 0.5 米、厚为 0.2 米，则前后的表面积为 1.5 米^2，侧面积为 0.6 米^2，顶部面积为 0.1 米^2。这样总面积为 2.2 米^2。设这些表面积都淋雨，则

$$\text{淋雨量} = \frac{2 \times 167 \times 0.01 \times 2.2}{3600} \approx 2.041(\text{升})$$

这样约有相当两瓶啤酒的雨量淋在你的身上。

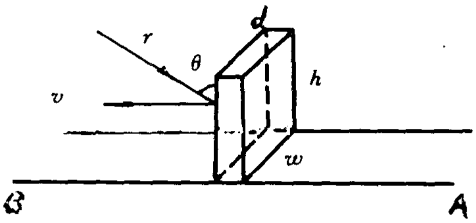

图 1.2

图 1.2

通常，我们去掉雨是垂直而下的假设。在前面所列的因素中，并不都是变量，事实上，r、θ、v、t 和 C 是变量而其它量在这个特殊情形不是变量。另外雨速和降雨量是有区别的。如果雨是像河流一样的连续水流，则雨速就能确定我们在地域上的降雨量。显然，这是不现实的，因为雨是离散雨点的流。以上为描述雨量的大小而引入了雨的强度概念。

从上面给出的数据知道雨速为 4 米 / 秒 $= 1.44 \times 10^6$ 厘米 / 小时，而降雨量为 2 厘米 / 小时。雨速与降雨量的比为 7.2×10^5，定义雨的强度 $I = 1/(7.2 \times 10^5)$。这样雨的强度反映了雨的大小，如果 $I = 0$，就说明没有雨。当强度 $I = 1$ 时是暴雨，雨水就象屋檐水一样的连续流。

由于速度已取作常数，则淋雨时间 $t = D/v$（秒）。为考虑被淋湿的程度，必须考虑关于行走方向与雨的方向的关系，设如图 1.2 所示。

由于雨是呈一个角度降下来的，能看到在任何情形下受雨面仅为人顶部和前部。故而淋在人身上的雨量可分以下两种情况来计算：

(1) 考虑人的顶部

顶部的表面积 $= wd$ 米^2，雨速的分量为 $= r\cos\theta$ 米 / 秒。因为淋雨率 = 强度 × 面积 × 雨速 $= Iwdr\cos\theta$ 米^3/ 秒（单位时间内的淋雨量），这样在时间 D/v 中的

$$淋雨量 = \frac{DIwdr\cos\theta}{v}\ (米^3) \tag{1.3}$$

(2) 考虑人的前部

前部的面积 $= wh$(米^2)，雨的分量 $= r\sin\theta + v$(米 / 秒)。因此，淋雨率为 $Iwh(r\sin\theta + v)$(米^3/ 秒)，在时间 D/v 中的

$$淋雨量 = \frac{IwhD(r\sin\theta + v)}{v}(米^3). \tag{1.4}$$

从式(1.3) 和式(1.4) 知总淋雨量为

$$C = \frac{IwD}{v}(rd\cos\theta + h(r\sin\theta + v)) \quad (米^3) \tag{1.5}$$

从前面给出的数据知 $h = 1.5, w = 0.5, d = 0.2, r = 4, D = 1000, I = 1/7.2 \times 10^5$. 于是

$$C = \frac{0.8\cos\theta + 6\sin\theta + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v}\ (米^3) \tag{1.6}$$

这样所求的数学模型为给定 θ 选取怎样的 v 使得式(1.6) 中的 C 最小?

3. 模型求解

分几种情形讨论这个模型：首先，如果 $I = 0$，则有 $C = 0$；其次，将根据是朝着雨还是背着雨。考虑几个特殊情形：

(1)$\theta = 0°$

这时雨是直下的，从式(1.6) 知，当 v 最大时，C 最小。即当 $v = 6$ 米 / 秒时

$$C = \frac{9.8}{1.44 \times 10^3 \times 6} \approx 1.13\ (升)$$

(2)$\theta = 30°$

雨朝你而下，这时

$$C = \frac{0.4\sqrt{3} + 3 + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v}\ (米^3)$$

在这种情形是 v 最大时，C 最小：

$$C_{\min} = \frac{0.4\sqrt{3} + 3 + 9}{1.44 \times 6} = 1.47\ (升)$$

(3) 负角

这时雨来自你的后面，取 $\theta = -\alpha$，得

$$C = \frac{0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v}\ (米^3)$$

对于充分大的 α，这个表达式会出现负号，而这是不可能的。所以仍回到式(1.3) 去分析这种情形。分两种情形来决定你该走多快：

(a) 若 $v < r\sin\alpha$，则你背后的淋雨量为 $IwDh(r\sin\alpha - v)/v$。总淋雨量

$$C = \frac{IwD}{v}(rd\cos\alpha + h(r\sin\alpha - v))$$

把数据代入得

$$C = \frac{0.8\cos\alpha + 1.5(4\sin\alpha - v)}{1.44 \times 10^3 v}\ (米^3)$$

这时如果你以速度 $4\sin\alpha$ 行走，这个表达式可改写为

$$C = \frac{0.8\cos\alpha}{1.44 \times 10^3 \times 4\sin\alpha}$$

即为淋在头顶的雨量。这样如果雨以 30° 的倾角从后面下来，你就应该以 2 米 / 秒($4\sin30°$) 的

速度行走，淋雨量仅为 0.24 升。

$(b) v > r\sin\alpha$

这时(1.3) 式为 $IwhD(v - r\sin\alpha)/v$，于是

$$C = \frac{IwD}{v}(rd\cos\alpha + h(v - r\sin\alpha)) \ (\text{米}^3)$$

把数据代入得

$$C = \frac{0.8\cos\alpha + 1.5v - 6\sin\alpha}{1.44 \times 10^3 v} \ (\text{米}^3)$$

于是，θ 为负角的情况下：当 $0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha < 0$，即 $\tan\alpha > \frac{2}{15}$ 时，$v_{\min} = r\sin\alpha$，则 C 最小；当 $0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha > 0$，即 $0 < \tan\alpha \leqslant \frac{2}{15}$ 时，v 越大则 C 越小。

4. 数学解的解释

上述结果似乎与实际有些相符，它告诉我们：如果你是逆风行走，则越快越好；如果是顺风，则当雨的倾角大于约 8° 时，你应该保持与水平雨速一致的速度；而当雨基本上是垂直而下时(倾角小于约 8°)，还是越快越好。

数学模型在自然科学、工程领域中的重要性已广为人知了。在学习这门课程的一开始就应认识到它与其它的数学课程不同。它没有理论的学习，仅有一些纲要的引导。这并不意味着它是一门容易学的课程。困难并不在于学习或理解所要用的数学，而在于何处、何时用之。要学好这门课程，不仅要注意培养自己理解实际问题的能力、抽象分析问题的能力、而且还要训练自己应用各种知识、特别是数学知识、数学技能的能力。

数学模型可以按照不同的方式分类，如按照变量的关系分，可以分为几何模型，微分方程模型，代数模型，概率统计模型，逻辑模型等；按变量的性质可分为确定性模型，随机性模型和模糊性模型，或分成连续性模型和离散性模型。

第二章　数学建模的基本技能与方法

§2.1　建模的基本技能

一、列出相关因素、作出合理假设

面对一个问题如何下手往往是最困难的事，特别是对初学者更是如此。建模的一个基本原则是认真分析所给的问题，找出所有相关的因素。这里的因素可以是定量的，即可以由数量来描述，也可以是定性的，如有可能还可以找出各因素间的一些简单关系式。定量的因素可以分为变量、参量、常量（比如光速）。参量是这样一些量，它对于一个特定的问题可以认为是常量，但对不同的问题这个常量也就不同。变量可分离散的与连续的，也可以分确定的与随机的。在一个实际问题中，往往会有很多因素与之有关。所以在收集好这些相关因素之后，先考虑一些主要的因素，丢弃一些与问题关系不太大的次要的因素，并且区分出哪些因素是输入变量（自变量）— 可以影响模型，但其性状不是该模型所要研究的那些因素，哪些是输出变量（因变量）— 其性状是这个模型打算研究的那些因素，并给出适当的符号与单位。要做到这一点有时是很困难的，这不仅有赖于对问题的深刻认识而且还有赖于建模的经验。对于有些因素虽然并非认为是无足轻重的，但还是把它略掉了，原因在于建模者不能处理它们，只能寄希望于略去之后不会使结果有太大的影响。

为使建模得以进行，我们必须作一些合理的假设。假设的目的在于给出变量的取舍，即选出主要因素，忽略次要因素，使问题简化以便进行数学描述，又抓住了问题的本质。如果我们把它比作“建房”，各个因素就是建房的砖块，而假设就象水泥把各个因素构在一起。一个模型是否成功很大程度上依赖于假设的合理性，这当然主要取决于建模工作者的经验。

一般来说，假设可以分为两类：一类是为简化问题的需要而作的；而另一类是为了沿用某种数学方法之需要而作的。这是由于数学建模本身所决定的。数学建模就是采用或建立某种数学方法来解决具体问题，而每种理论的应用都必需满足一定的条件，因此能否应用所需的数学方法的关键在于所研究的对象是否大体满足相应的条件。但必须指出：一个假设是否合理，最重要的是它是否符合所考虑的实际问题，而不是为了解决问题的方便而扭曲了原问题。

在初次建模时，要选择假设使模型尽可能简单，把所有的假设清楚地写下来，使得你自己知道，而且也能使别人确切地知道是在怎样的假设下完成模型的。不同的假设就可能得到不同的模型，所以描述一种情况的最佳模型通常不止一个。在一个模型中不可能同时使普遍性、现实性、精确性都很佳。所以在建模时可根据不同情况作出合理的取舍。

一旦建好了第一个模型，就要着手考虑问题中的其它因素的影响，对模型进行修正。一个良好的模型不但要刻划出问题的本质，而且还要使得模型不至于太复杂而导致实际上无法求解。这就要看你能否处理好简单与复杂、精确与普适之间的矛盾。

注意，在作假设时千万不要图处理问题的方便而忽视了与所给问题的相符性。其实与所给