

波动方程的 高频近似与辛几何

李世雄 著

科学出版社



波动方程的高频近似与辛几何

李世雄 著

国家自然科学基金委员会
大庆油田有限责任公司 联合资助项目

科学出版社

内 容 简 介

Maslov 方法是解决波动方程高频近似中焦散困难的有效方法. 它大大拓广了几何光学的应用范围. 但由于这一方法涉及的抽象数学概念和工具较多, 使许多非数学专业的工程技术人员或学者难以掌握运用. 本书对有关的数学概念与方法如: 渐进展开、辛空间、辛几何、流形、Lagrange 子流形、含参变量的 Fourier 变换等及 Maslov 方法做了深入浅出的介绍, 使具有高等数学及数理方程基本知识的读者通过本书能在较短时间内了解并掌握 Maslov 方法的主要内容, 并用以解决一些有关的实际问题.

读者对象: 相关领域的工程技术人员.

图书在版编目(CIP)数据

波动方程的高频近似与辛几何/李世雄著. -北京: 科学出版社, 2001. 3

ISBN 7-03-008916-2

I. 波… II. 李… III. ①波动方程-近似计算 ②辛结构 IV. ①O175.27②O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 54884 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 3 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2001 年 3 月第一次印刷 印张: 9 1/4

印数: 1—2 000 字数: 209 000

定价: 21.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈杨中〉)

前 言

各种类型的波动方程——声波方程、弹性波方程、电磁波方程在众多的应用领域中有着重要意义,但是只有在极少数简单的特殊情况下方可能得到精确解.这种能求得精确解的情况,其所涉及的物体的几何形状一般都是比较简单的(如尖劈、圆柱面、抛物面、椭圆柱面等等).此时物体的表面与特殊的正交曲线坐标系的坐标曲面相重合,这样就可以用分离变量法求解.但此时所求得解是特征函数的无穷级数形式,这种级数往往收敛得很慢.因而只有对远离物体的场或其尺寸远大于波长的那种物体才有实际意义.因此,针对不同的具体条件提出了许多近似求解的方法,其中历史最悠久、应用范围较广的当推最简单的一种高频近似方法——几何光学法.

几何光学法将波动现象转化为射线理论,并用射线管的概念来解释、计算能量传播的机制.它能计算直射场、反射场和折射场,具有物理概念清楚、简单易算的特点.但几何光学法适用的范围又有局限性.它不能计算散射和衍射问题,因而对阴影区失效.针对这一弱点,20世纪50年代后期J. B. Keller(1962)提出了几何衍射理论.它推广了经典的几何光学理论,系统地引入了一种衍射射线,克服了几何光学在阴影区中失效的缺点.在20世纪70年代又进一步发展了一致性几何衍射理论(对这方面感兴趣的读者可参阅 Pathak, P. H., 1979).

几何光学方法的另一重大缺陷是它在焦散区失效.由于几何光学方法是用射线管的概念来解释、计算能量(振幅)传播的机制的,而在焦散区由于射线管的截面积趋于零而导致振幅趋于无穷大(这是非均匀场中经常会遇到的情况).也就是说,由几何光学方法得到的解在焦散处出现了奇性而导致失败.但通过进一步研究分析发现在焦散处波动方程的解一般并无奇性,只是由于几何光学方法所采用的简单形式的渐近解在焦散处不合适而引起的.其实高频近似渐近展开的方法在此时还是适用的,问题的关键在于如何选取恰当的坐标系及相应合适的渐近表示式.

对一维的情况,早在1926年物理学家Wentzel, Kramers 和 Brillouin 就在 Schrödinger 方程的研究中提出了匹配的方法.随后这种方法在物理学文献中广为流行,被称为WKB方法.WKB方法的基本思想就是在焦散点附近采用适当的坐标变换后,找出用特殊函数(Airy函数或Henkel函数等)表出的解,然后用渐近展开的方法将非焦散区的解与焦散区的解匹配起来,得到分段表示的整体的高频近似解.WKB方法的最大缺点是难以推广到高维的情况,而在波传播问题中有意义的是二维和三维的情况,对此WKB方法是难以奏效的.

1965年前苏联学者V. P. Maslov提出了解决焦散问题的一种新方法,他引入与物理空间有相同维数的波向量(慢度向量)空间.将物理空间和波向量空间共同构成一个维数为原来物理空间维数二倍的相空间,在相空间中引入适当的辛内积后成为一个辛空间.原来的几何光学的射线问题则转化为辛空间中的Lagrange子流形(超曲面)问题.波动方程的高频近似解在Lagrange子流形上一般并无奇点,而在焦散处出现的奇点(振幅趋于无

穷大)的原因则在于 Lagrange 子流形在该处的切平面与物理空间垂直而引起的. 因此在这里从 Lagrange 子流形向物理空间的投影出现了奇性. 只要从辛空间中换一个适当的投影方向, 奇性就不会出现了. 在这样的投影方向上高频近似的几何光学方法完全能适用. 将这个投影方向上得到的高频近似解再变换回到原来的物理空间中, 就得到在焦散附近适用的高频近似解. 然后采用适当的数学技巧把局部解粘连起来, 就可得到处处适用有效的高频近似解.

Maslov 方法是解决焦散困难的很有效的方法. 它大大拓广了几何光学应用的范围. 但是由于这一方法涉及的抽象的数学概念和用到的数学工具较多, 如辛空间、辛几何、流形、Lagrange 子流形、含参变量的 Fourier 变换等等, 使许多非数学专业的工程技术人员或学者感到难以掌握、运用. 本书的目的是希望能对 Maslov 提出的基于辛几何与 Fourier 变换理论的波动方程的高频近似方法作一个深入浅出的介绍, 使具有高等数学及数理方程基本知识的读者通过本书能在较短的时间内了解并掌握 Maslov 方法的主要内容, 并用以解决一些有关的实际问题.

本书共十章. 第一章介绍渐近方法的基本数学工具——渐近级数的理论; 第二章用简明的例子来阐明焦散现象出现的奇性是非本质的, 以及如何用恰当的坐标系及相应合适的渐近表示式来解决这一问题, 使读者对本书讨论的问题及解决的方法有一个初步了解; 第三章介绍计算振荡积分的基本方法——稳相点原理; 第四、五章系统地介绍 Maslov 方法的数学基础——流形、向量场、辛空间、辛流形等; 第六章在辛几何的框架下阐明几何光学与 Hamilton 力学的内在联系; 第七章用一个具体例子来阐明求波动方程高频近似解的 Maslov 方法; 第八章对求波动方程高频近似解中涉及的一些重要概念如相位、振幅、指标与 Lagrange 子流形作进一步的分析与讨论; 第九章比较详细地介绍如何用 Maslov 方法求解平面波的凹面反射问题; 第十章简单介绍了求解 Hamilton 方程的辛算法.

本书是在国家自然科学基金委员会和大庆油田有限责任公司联合资助下完成的*. 作者在长期从事这方面的工作中以及在本书的写作过程中都得到中国科学院地球物理研究所李幼铭研究员的支持与鼓励, 对此表示深深的感谢. 作者的妻子叶雅梅帮助抄写了本书全部手稿, 并在文字上作了有益的修正与润色; 研究生赵瑾用计算机绘制了本书的全部插图. 在此感谢她们为本书的出版所付出的辛勤劳动.

李世雄

2000 年 1 月于安徽大学

* 国家自然科学基金委员会和大庆油田有限责任公司联合资助项目(49894190)

目 录

第一章 渐近展开与渐近级数	1
第二章 貌似奇点(非本质奇点)的简单例子	9
第三章 振荡积分的数值计算	21
3.1 稳相点原理	21
3.2 振荡积分在过渡区的计算	25
第四章 流形,向量场,微分形式	32
4.1 C^∞ 流形	32
4.2 流形上的切向量与切空间	37
4.3 流形上的外微分形式	42
第五章 辛空间与辛流形	52
5.1 欧氏空间,酉空间与辛空间	52
5.2 Riemann 流形与辛流形	61
第六章 几何光学,Hamilton 力学与辛几何	66
6.1 狭义的几何光学——射线理论	68
6.2 Hamilton 力学	80
6.3 广义几何光学,相位与振幅,辛几何	89
第七章 波动方程的高频近似解——Maslov 方法	95
第八章 相位,振幅,指标与 Lagrange 子流形	106
8.1 Lagrange 子流形	109
8.2 相位	112
8.3 指标	114
8.4 振幅	115
8.5 带参数 k 的 Fourier 变换, Maslov 方法	117
第九章 凹面反射问题	121
9.1 平面波在圆柱面上的反射及焦散现象	121
9.2 平面波在凹面上的反射及焦散现象	128
第十章 Hamilton 系统的辛算法	132
参考文献	138
索引	140

第一章 渐近展开与渐近级数

渐近展开是高频近似的理论基础之一,在这一章中我们将概括地介绍一下渐近展开与渐近级数的理论.

无穷级数(简称级数)是微积分的一种重要工具.历史上级数出现得很早,2000 多年前古希腊人就知道公比小于 1(大于零)的几何级数具有和数,并用级数作为工具来计算圆的面积、圆柱和球的体积.但级数真正成为理论分析、论证与数值计算的一种重要工具还是在微积分建立以后.在微积分发展的早期,人们只是自发地仿照有限项和的情况来运用级数:任意改变各项相加的次序,逐项进行求导、积分等等.这一时期确实利用级数解决了不少重要问题,取得了丰硕的成果.但同时也发现利用级数进行论证时,有时会导致错误的结果,例如:当 $|x| < 1$ 时,公式 $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ 是正确的,但若令 $x = 1$ 或 $x = -2$ 就会得到 $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 \cdots$, $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ 等,显然是错误的结果.以致人们对于利用级数这一工具得到的一些结果总有一些不太放心.这一情况到了 19 世纪初才发生变化.在 A. L. Cauchy 等数学家的努力下,对微积分的基础——极限理论建立了严格的理论体系.人们明白了级数与有限项和的异同,对级数建立了严格系统的理论,使利用级数进行论证推导的结果完全严格可靠.级数与有限项之和既有相似之处,也有许多截然不同的性质.首先,级数有收敛与发散的区别,只有对收敛的级数,和这一概念才有明确的意义.其次,收敛级数还有绝对收敛与条件收敛之分.绝对收敛级数的性质与有限项和的性质非常相似,例如求和时可以任意改变其各项的次序;而条件收敛级数则与有限项和的性质有很大的差别,求和时若任意变动其各项的次序可能会影响其和,甚至会使收敛的级数变成发散.这一时期还引进了函数项级数一致收敛的概念,这一条件保证了对一个函数项级数可以进行逐项求导或积分.无穷级数在建立了这一套严密的理论以后,人们认识到级数不论在理论推导、论证或数值计算中都是一种可靠、有用的工具,只有当人们不顾级数收敛、发散、绝对收敛、条件收敛等区别随便乱用时才会出现荒谬的结果.于是很自然地人们在这一时期对过去用级数这一工具所做的工作和所得到的结果重新作一次严格的审核,凡是用了发散级数的情况,理所当然地应予以舍弃.但是,人们却惊奇地发现在天体力学中用以计算行星轨道的一些级数是发散的,利用这些发散级数进行计算所得的结果的精度却令人非常满意.这一令人迷惑的现象人们称之为级数的发散悖论.法国数学家 H. Poincaré (Acta Math. 8, 1886, pp. 295~344) 对此现象作了深入的研究.他指出,上述现象属于一类特殊的发散级数,他称之为**渐近级数**.对于这类特殊的发散级数,其和是有严格意义的,而且对这类发散级数还可以合理地进行逐项求导、积分等运算,是数值计算和理论分析(特别是求解某些微分方程)中非常有用的工具,因此不能因其发散而简单地予以排斥.事实上,除了上述属于渐近级数的那种发散级数外,还有许多类型的发散级数可以严格地定义其和,并在许多问题中发挥重要的作用.这就形成近代分析中发散级数这一重要分支.有关这方面的详细讨论可以参看 G. H. Hardy 所著 Divergent Series 一书

(Hardy, 1949), 下面我们仅就研究高频近似的需要来介绍一下渐近级数与渐近展开的基本理论.

先看一个例子: 令

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \quad (x > 0),$$

这一积分是不能利用初等函数来求得其精确值的. 逐次利用分部积分法得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \frac{-de^{-t}}{x+t} = \frac{-e^{-t}}{x+t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \\ &= \frac{1}{x} + \int_0^{\infty} \frac{de^{-t}}{(x+t)^2} = \frac{1}{x} + \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^3} dt \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 2 \int_0^{\infty} \frac{de^{-t}}{(x+t)^3} \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(x+t)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

这样我们就可形式上得到 $f(x)$ 的无穷级数展开式:

$$f(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + \dots. \quad (1.2)$$

在这里我们用“ $\sim$ ”而不用“ $=$ ”是因为右方的级数对任何 $x (x > 0)$ 均发散! (当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对 x 的任意取定值, 上述级数的一般项 $(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \rightarrow \infty$, 因此连级数收敛的必要条件都不满足!) 但令人惊异的事实是: 尽管 (1.2) 右方的级数不收敛, 但只要 x 的值比较大, 则仅取 (1.2) 右方级数的开始少数几项 (甚至仅取一、二项) 即可求得 $f(x)$ 相当精确的近似值. 例如, 仅取 (1.2) 右方的开始两项 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, 当 x 较大时就是 $f(x)$ 相当精确的近似值, 见表 1.1.

表 1.1

x	2	5	10	100	236	1000	1276
$f(x)$ 之精确值	0.361329...	0.170422...	0.0915633...	0.00990194...	0.00421948...	0.000999002...	0.000783086...
$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$	0.25	0.16	0.09	0.0099	0.00421936...	0.000999	0.000783085...

令

$$R_n = f(x) - \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \right\}, \quad (1.3)$$

则由 (1.1) 得

$$R_n = (-1)^n n! \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{(x+t)^{n+1}},$$

由此可得估计式

$$|R_n| = n! \int_0^\infty \frac{e^{-t} dt}{(x+t)^{n+1}} \leq \frac{n!}{x^{n+1}} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}. \quad (1.4)$$

我们在上面的例子中取 $n=2$, 于是 $|R_2| \leq \frac{2}{x^3}$. 可见仅取(1.2)右方发散级数的开始两项所得的非常简单的表达式 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ 就是(1.2)左方 $f(x)$ (不能用初等函数有限形式表示的函数), 当 x 较大时, 相当精确的近似表达式. 这种类型的发散级数当然是非常有用的. 对此, Poincaré 提出了渐近展开和渐近级数的概念, 并对其性质与运算规律作了严格的论证, 这也是高频近似方法的理论基础.

首先, 我们引进记号 o :

若当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)/g(x) \rightarrow 0$, 则记为

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow x_0. \quad (1.5)$$

定义 给定函数序列 $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ (这里 $\mathbb{N}$ 表示全体自然数), 若

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow x_0, \quad (1.6)$$

对一切 $n \in \mathbb{N}$ 均成立, 则称 $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时是一渐近序列 (这里 x_0 可以是 ∞).

例 1.1 $\{(x-x_0)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 是一渐近序列.

例 1.2 $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 是一渐近序列.

例 1.3 $\{e^x/x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 是一渐近序列.

现在设 $\{\varphi_n(x)\}_n$ 是一渐近序列 ($x \rightarrow x_0$), $f(x)$ 是一给定的函数 (当然 $f(x)$ 的定义域应包含 x_0 的一个邻域). 若对任何正整数 N 均有

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_N(x)) \quad (x \rightarrow x_0), \quad (1.7)$$

则称形式级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的渐近展开. 我们称形式级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ 是一个渐近级数 (它不一定收敛), 并记作

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \rightarrow x_0), \quad (1.8)$$

显然 $f(x)$ 关于渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}_n$ 之渐近展开的系数 a_m 可用(1.7)递推推出:

$$a_m = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \varphi_n(x)] / \varphi_m(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

由此可见, 若一函数 $f(x)$ 关于渐近序列 $\{\varphi_n(x)\} (x \rightarrow x_0)$ 有渐近展开, 则展开式是惟一确定的. 但是要注意, 与幂级数展开不同, 两个不同的函数可以有同一渐近展开. 例如, 函

数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 与 $g(x) = \frac{1-e^{-x}}{1+x}$ 是两个不同的函数, 但它们关于渐近序列 $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}_n (x \rightarrow \infty)$ 的渐近展开是相同的:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^n} \quad (x \rightarrow \infty), \\ g(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^n} \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

这是不足为奇的.事实上,若 $f(x)$ 关于渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}_n, x \rightarrow x_0$, 有渐近展开 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), (x \rightarrow x_0)$, 而 $g(x) - f(x) = o(\varphi_n(x))$ 对一切 n 成立 $(x \rightarrow x_0)$, 则易见 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的渐近展开

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \rightarrow x_0),$$

反之,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的渐近展开,则必有

$$f(x) - g(x) = o(\varphi_n(x)) \quad (x \rightarrow x_0),$$

对一切 n 成立.今后,对满足 $f(x) - g(x) = o(\varphi_n(x)) (x \rightarrow x_0)$, 对一切 n 成立的两个函数 $f(x), g(x)$ 记为 $f(x) \sim g(x)$, 并称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 关于渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}_n (x \rightarrow x_0)$ 是等价的.

考虑到本书今后论证的需要,为了简单起见,我们仅讨论渐近序列 $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}_n (x \rightarrow \infty)$ 的特殊情况.我们称这种渐近展开级数为渐近幂级数.(事实上,下面所介绍的内容对一般的渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}_n (x \rightarrow x_0)$ 都成立.)

我们知道任意给一定数列 $\{a_n\}_n$, 相应的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 可能对一切 x 均不收敛.

此时,形式幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当然不表示任何函数,但是渐近展开则不同.我们有以下定理.

定理 1.1 任给数列 $\{a_n\}_n$, 总存在 $f(x) \in C^\infty(R)$, 使 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n / x^n (x \rightarrow \infty)$,

这里 $C^\infty(R)$ 表示 $(-\infty, \infty)$ 上无限次可微函数全体所构成的集合.

证 取 $\rho(x) \in C^\infty(R)$, 使 $0 \leq \rho(x) \leq 1, \rho(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$

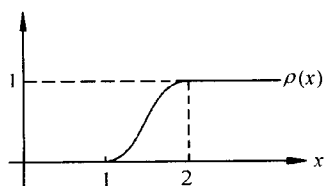


图 1.1

令

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho\left(\frac{x}{2^{n+|a_n|}}\right) / x^n, & x \neq 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

因对每一 $x \neq 0$, (1.9) 右方的级数只有有限项不为零, 所以 $f(x)$ 是有意义的. 且 $f(x) \in C^\infty(R)$. 其次, 当任意取定 N ,

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^N [f(x) - \sum_{n=0}^N a_n / x^n] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^N \sum_{n=0}^N a_n \left[\rho\left(\frac{x}{2^{n+|a_n|}}\right) - 1 \right] / x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \rho\left(\frac{x}{2^{n+|a_n|}}\right) / x^{n-N} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \rho\left(\frac{x}{2^{n+|a_n|}}\right) / x^{n-N-1}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

又由 $\left| a_n o\left(\frac{x}{2^{n+|a_n|}}\right) / x^{n-N-1} \right| \leq \frac{|a_n|}{2^{n+|a_n|}}$, 故知(1.10)的极限为 0, 这就证明了

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n / x^n \quad (x \rightarrow \infty).$$

由于上述定理使我们在用渐近展开的方法求解微分方程时带来很大的方便——将未知的解表示成渐近级数的形式, 代入方程, 比较系数求得渐近级数形式的解必定是有意义的. 这比用幂级数展开的方法有很大的优越性, 因为后者所得到的形式幂级数可能不收敛以致没有意义.

下面介绍渐近幂级数展开的一些基本运算性质:

定理 1.2 设 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n / x^n$, $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n / x^n$ ($x \rightarrow \infty$), 则

$$(1) f(x) + g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) / x^n \quad (x \rightarrow \infty).$$

$$(2) f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n / x^n \quad (x \rightarrow \infty), \text{ 这里}$$

$$C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

$$(3) \text{ 若 } a_0 \neq 0, \text{ 则 } \frac{1}{f(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n / x^n \quad (x \rightarrow \infty), \text{ 这里 } \{d_n\}_n \text{ 由}$$

$$a_0 d_0 = 1,$$

$$a_0 d_1 + a_1 d_0 = 0,$$

$$a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0 = 0,$$

$$\vdots$$

$$a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + \cdots + a_n d_0 = 0,$$

递推地惟一确定.

证 (1)显然.

$$(2) \text{ 因 } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k / x^k + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k / x^k + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

故

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{k=0}^n a_k / x^k + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k / x^k + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) / x + \cdots + \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) / x^n + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

这就证明了 $f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n / x^n$, $x \rightarrow \infty$.

$$(3) \text{ 令 } h(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n / x^n, \text{ 则}$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^n d_k / x^k + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

故

$$\begin{aligned} f(x)h(x) &= \left(\sum_{k=0}^n a_k/x^k + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \right) \left(\sum_{k=0}^n d_k/x^k + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \right) \\ &= 1 + o + o + \cdots + o + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

这就证明了 $1/f(x) \sim h(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n/x^n \quad (x \rightarrow \infty)$.

定理 1.3 设 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n/x^n \quad (x \rightarrow \infty)$, 则上述渐近展开式可逐项积分如下:

$\int_x^{\infty} [f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}] dt$ 存在, 且

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{\infty} \left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right] dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \frac{a_4}{3x^3} + \cdots \\ &\quad + \frac{a_{n+1}}{n} / x^n + \cdots \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

证 由渐近展开的定义知, 任给 $\epsilon > 0$, 存在 X , 当 $t > X$

$$\left| f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} - \frac{a_2}{t^2} - \cdots - \frac{a_{n+1}}{t^{n+1}} \right| \leq \epsilon / t^{n+1},$$

所以当 $x > X$ 时有

$$\left| \int_x^{\infty} \left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right] dt - \frac{a_2}{x} - \cdots - \frac{a_{n+1}}{nx^n} \right| \leq \frac{\epsilon}{n} \frac{1}{x^n},$$

这就证明了

$$\int_x^{\infty} \left[f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right] dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n} / x^n \quad (x \rightarrow \infty).$$

定理 1.4 若 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n/x^n \quad (x \rightarrow \infty)$, 若 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x)$ 也有渐近展开, 则 $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{na_n}{x^{n+1}} \quad (x \rightarrow \infty)$.

证 设 $f'(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} b_n/x^n \quad (x \rightarrow \infty)$, 则由定理 1.3 知

$$f(x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-b_k}{k-1} / x^{k-1},$$

因而

$$f(x) - \sum_{k=2}^n \frac{-b_k}{k-1} / x^{k-1} = o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

即

$$f(x) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-b_k}{k-1} / x^{k-1} \quad (x \rightarrow \infty),$$

但已知

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n/x^n \quad (x \rightarrow \infty),$$

由渐近展开之惟一性知 $a_n = -\frac{b_{n+1}}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, 即 $b_{n+1} = -na_n$, $n = 1, 2, \dots$, 这就证明了

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-na_n}{x^{n+1}} \quad (x \rightarrow \infty).$$

注意:这一定理中“ $f'(x)$ 也有渐近展开式”这一条件是必要的. 因 $f(x)$ 有渐近展开式并不能保证 $f'(x)$ 也有渐近展开式, 例如:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + e^{-x} \sin(e^x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / x^n \quad (x \rightarrow \infty),$$

但 $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - e^{-x} \sin(e^x) + \cos(e^x)$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时是振荡的, 因而根本没有渐近展开.

下面我们介绍用渐近展开的方法求解微分方程的例子:

例 1.4 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} + by$ ($b > 0$), 当 $x \rightarrow \infty$ 时的渐近解.

解 设 $y(x) \sim A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots$ ($x \rightarrow \infty$), 代入方程得

$$-\frac{A_1}{x^2} - \frac{2A_2}{x^3} - \frac{3A_3}{x^4} - \dots = \frac{a}{x} + b\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots\right),$$

由此即得

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad A_1 = -\frac{a}{b}, \quad A_2 = -\frac{A_1}{b} = \frac{a}{b^2}, \\ A_3 &= -\frac{2A_2}{b} = -\frac{1 \cdot 2a}{b^3}, \quad A_4 = -\frac{3A_3}{b} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3a}{b^4}, \dots \\ A_n &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a}{b^n}, \dots \end{aligned}$$

故得

$$y(x) \sim -\frac{a}{bx} \left\{ 1 - \frac{1}{bx} + 2! \left(\frac{1}{bx} \right)^2 - 3! \left(\frac{1}{bx} \right)^3 + \dots + (-1)^n n! \left(\frac{1}{bx} \right)^n + \dots \right\},$$

容易证明 $-a \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+bx} dt$ 是此微分方程之解. 而由分部积分易得

$$-a \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+bx} dt \sim \frac{a}{bx} \left\{ 1 - \frac{1}{bx} + 2! \left(\frac{1}{bx} \right)^2 + \dots + (-1)^n n! \left(\frac{1}{bx} \right)^n + \dots \right\},$$

可见两者是一致的.

例 1.5 求 Kelvin 方程(变型的 Bessel 方程)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0, \quad (1.11)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时的渐近解.

解 先作代换 $y(x) = u(x)/\sqrt{x}$,

则

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2}x^{-3/2}u(x) + x^{1/2}u'(x), \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{3}{4}x^{-5/2}u(x) - x^{3/2}\frac{du}{dx} + x^{-1/2}\frac{d^2u}{dx^2},\end{aligned}$$

由此即得 $u(x)$ 所满足的微分方程

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(1 + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)u = 0,$$

当 x 很大时, 上述方程的解应近似于方程 $\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$ 的解 $e^{\lambda x}$, $\lambda = \pm 1$. 因而可设(1.11)

的解 $y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\sqrt{x}} v(x)$, 并设 $v(x)$ 有渐近展开

$$v(x) \sim 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots \quad (x \rightarrow \infty), \quad (1.12)$$

则 $v(x)$ 应满足方程

$$x^2 \left(\frac{d^2v}{dx^2} + 2\lambda \frac{dv}{dx} \right) + \left\{ (\lambda^2 - 1)x^2 + \left(\frac{1}{4} - n^2 \right) \right\} v = 0,$$

将(1.12)代入上面的方程, 得

$$\begin{aligned}& \left(1 \cdot 2 \cdot \frac{A_1}{x} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{A_2}{x^2} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{A_3}{x^3} + \cdots \right) - 2\lambda \left(A_1 + \frac{2A_2}{x} + \frac{3A_3}{x^2} + \cdots \right) \\ & + \left(\frac{1}{4} - n^2 \right) \left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \cdots \right) = 0.\end{aligned}$$

故得方程(1.11)的渐近解

$$y(x) \sim \frac{e^{\lambda x}}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{1 - 4n^2}{x} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{(1 - 4n^2)(9 - 4n^2)}{(8\lambda x)^2} + \cdots \right\} \quad (x \rightarrow \infty).$$

第二章 貌似奇点(非本质奇点)的简单例子

在引言中我们谈到用高频近似的方法解波动方程时,会遇到焦散现象,同时指出焦散现象出现的奇点是非本质奇点(Nonessential Singularity),也称为貌似奇点(Apparent Singular Point).波动方程的解在焦散处其实并没有奇性,只是因为坐标系选取不恰当,相应的渐近解的形式不合适而引起的,其实渐近展开的方法在此时还是适用的.问题的关键在于如何选取恰当的坐标系及相应合适的渐近表示式.在这一章中我们将通过简单的特例来阐明这一现象.由于这些例子是一维的,比较简单,而且其精确解可以用特殊函数具体表出.因此问题的本质及处理的方法可以看得比较清楚,这对今后理解、掌握一般的高维(二维、三维)问题将会有很大的帮助.

例 2.1 我们来研究微分方程

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 x u = 0, \quad (2.1)$$

当 $\omega \rightarrow \infty$ 时的高频近似解.

(i)先考虑 $x \in (0, \infty)$, 此时 $x > 0$, 令 $u(x, \omega) \sim a(x, \omega) e^{i\omega S(x)}$, 将 $a(x, \omega)$ 按渐近序列 $\left\{ \frac{1}{(i\omega)^n} \right\}_n$ ($\omega \rightarrow \infty$), 展开成渐近级数:

$$a(x, \omega) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{(i\omega)^k} \quad (\omega \rightarrow \infty), \quad (2.2)$$

将(2.2)代入(2.1), 比较关于 ω 幂次相同的项, 为简单起见我们仅考虑渐近展开的第一项.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &\sim e^{i\omega S(x)} \left\{ S'(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{(i\omega)^{k-1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a'_k(x)}{(i\omega)^k} \right\}, \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &\sim e^{i\omega S(x)} \left\{ [S'(x)]^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{(i\omega)^{k-2}} + S'(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a'_k(x)}{(i\omega)^{k-1}} \right. \\ &\quad \left. + S''(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{(i\omega)^{k-1}} + S'(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a'_k(x)}{(i\omega)^{k-1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a''_k(x)}{(i\omega)^k} \right\}, \end{aligned}$$

ω^2 项:

$$- [S'(x)]^2 + x = 0 \quad (2.3)$$

ω 项:

$$S''(x) a_0(x) + 2S'(x) a'_0(x) = 0, \quad (2.4)$$

由(2.3)即得

$$S'(x) = \pm \sqrt{x}, \quad S(x) = \pm \frac{2}{3} (x)^{3/2},$$

由(2.4)得

$$-\frac{S''(x)}{2S'(x)} = \frac{a'_0(x)}{a_0(x)}, \quad a_0(x) = \frac{C}{\sqrt{x}},$$

因此,在 $x \in (0, \infty)$, 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 有渐近解:

$$u_{0+}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} e^{i\omega \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)}, \text{ 及 } u_{0-}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} e^{-i\omega \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)}. \quad (2.5)$$

也可取实形式的渐近解:

$$u_{01}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cos\left(\frac{2}{3}\omega x^{3/2}\right), \text{ 及 } u_{02}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \sin\left(\frac{2}{3}\omega x^{3/2}\right). \quad (2.6)$$

(ii) 再考虑 $x \in (-\infty, 0)$, 此时, 因 $x < 0$, 故考虑下面形式的渐近解:

$$u(x) \sim a(x, \omega) e^{\omega S(x)},$$

$$a(x, \omega) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x)}{\omega^k} \quad (\omega \rightarrow \infty), \quad (2.7)$$

将(2.7)代入(2.1), 比较关于 ω 幂次相同的项, 得

ω^2 项:

$$[S'(x)]^2 + x = 0, \quad (2.8)$$

ω 项:

$$S''(x)a_0(x) + 2S'(x)a_0'(x) = 0, \quad (2.9)$$

由(2.8)得

$$S'(x) = \pm \sqrt{-x} \quad (\text{注意, 此时 } x < 0, \text{ 所以 } -x > 0),$$

$$S(x) = \mp \frac{2}{3}(-x)^{3/2},$$

由(2.9)得 $a_0(x) = \frac{C}{\sqrt{-x}}$, 因此, 在 $x \in (-\infty, 0)$, 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 有渐近解:

$$u_{01}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{-x}} e^{-\frac{2}{3}\omega(-x)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}} e^{-\frac{2}{3}\omega|x|^{3/2}},$$

$$u_{02}(x, \omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{-x}} e^{\frac{2}{3}\omega(-x)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}} e^{\frac{2}{3}\omega|x|^{3/2}}, \quad (2.10)$$

因为我们只考虑有界的解, 所以将 $u_{02}(x, \omega)$ 舍弃不用. 由上面渐近解(2.5), (2.10)的形式可见, 不管是 $x \in (0, \infty)$ 或 $x \in (-\infty, 0)$ 的情况, 由于因子 $\frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}$ 的存在, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 渐近解就趋于无穷大. 也就是说, $x=0$ 是其奇点, 渐近解在 $x=0$ 附近不适用. 但从原方程(2.1) $\frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 x u = 0$ 看来, 它的解在 $x=0$ 附近不应该有什么奇性. 因此, 我们的渐近解当 $x \rightarrow 0$ 时出现趋向无穷大的奇性是由于(2.2)或(2.7)的形式不合适而造成的. 也就是说这种情况下出现的奇性非本质的, 相应的 $x=0$ 成为奇点是非本质的、貌似奇点. 只要渐近解的形式取得合适, $x=0$ 就不是奇点. 由于方程(2.1)存在精确解, 所以下面我们将方程(2.1)的精确解求出来, 将它与渐近解进行比较, 这样可以把问题的实质看得更清楚.

现在求方程(2.1)的精确解:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 x u = 0, \quad (2.1)$$

先作代换 $\zeta = -\omega^2 x$, 则(2.1)变为

$$\omega^{2\alpha} \frac{d^2 u}{d\zeta^2} - \omega^{2-\alpha} \zeta u = 0.$$

若取 $\alpha = \frac{2}{3}$, 则(2.1)即化简为

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} - \zeta u = 0, \quad \text{这里 } \zeta = -\omega^{2/3} x, \quad (2.11)$$

由特殊函数的理论, 知(2.11)的通解为

$$u_0(\zeta) = C_1 Ai(\zeta) + C_2 Bi(\zeta), \quad (2.12)$$

这里 $Ai(\zeta)$ 与 $Bi(\zeta)$ 分别是第一类与第二类 Airy 函数. Airy 函数可用熟知的 Bessel 函数 (参见: Erdelyi, A, 1961; 王竹溪, 郭敦仁, 1979) 表示如下:

$$\begin{cases} Ai(x) = \frac{1}{3} |x|^{1/2} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} \right) + J_{1/3} \left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} \right) \right], & x \leq 0, \\ Bi(x) = |x|^{1/2} \left[J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} \right) - J_{1/3} \left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} \right) \right], & x \leq 0, \\ Ai(x) = \frac{1}{3} x^{1/2} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) - I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right], & x \geq 0, \\ Bi(x) = (x/3)^{1/2} \left[I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + I_{1/3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \right], & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

根据 Bessel 函数的渐近展开理论可得

$$Ai(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3} x^{3/2}}, & \text{当 } x \rightarrow +\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x|^{-1/4} \sin \left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right), & \text{当 } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.14)$$

$$Bi(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{\frac{2}{3} x^{3/2}}, & \text{当 } x \rightarrow +\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x|^{-1/4} \cos \left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right), & \text{当 } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.15)$$

Airy 函数还可由积分表示如下:

$$\begin{aligned} Ai(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left(\frac{1}{3} t^3 + xt \right) dt, \\ Bi(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\exp \left(-\frac{1}{3} t^3 + xt \right) + \sin \left(\frac{1}{3} t^3 + xt \right) \right] dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Airy 函数的图形如图 2.1 所示.

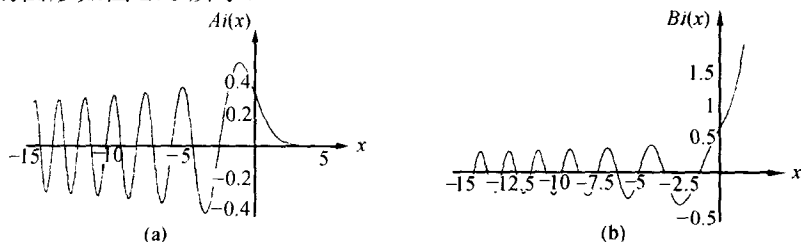


图 2.1