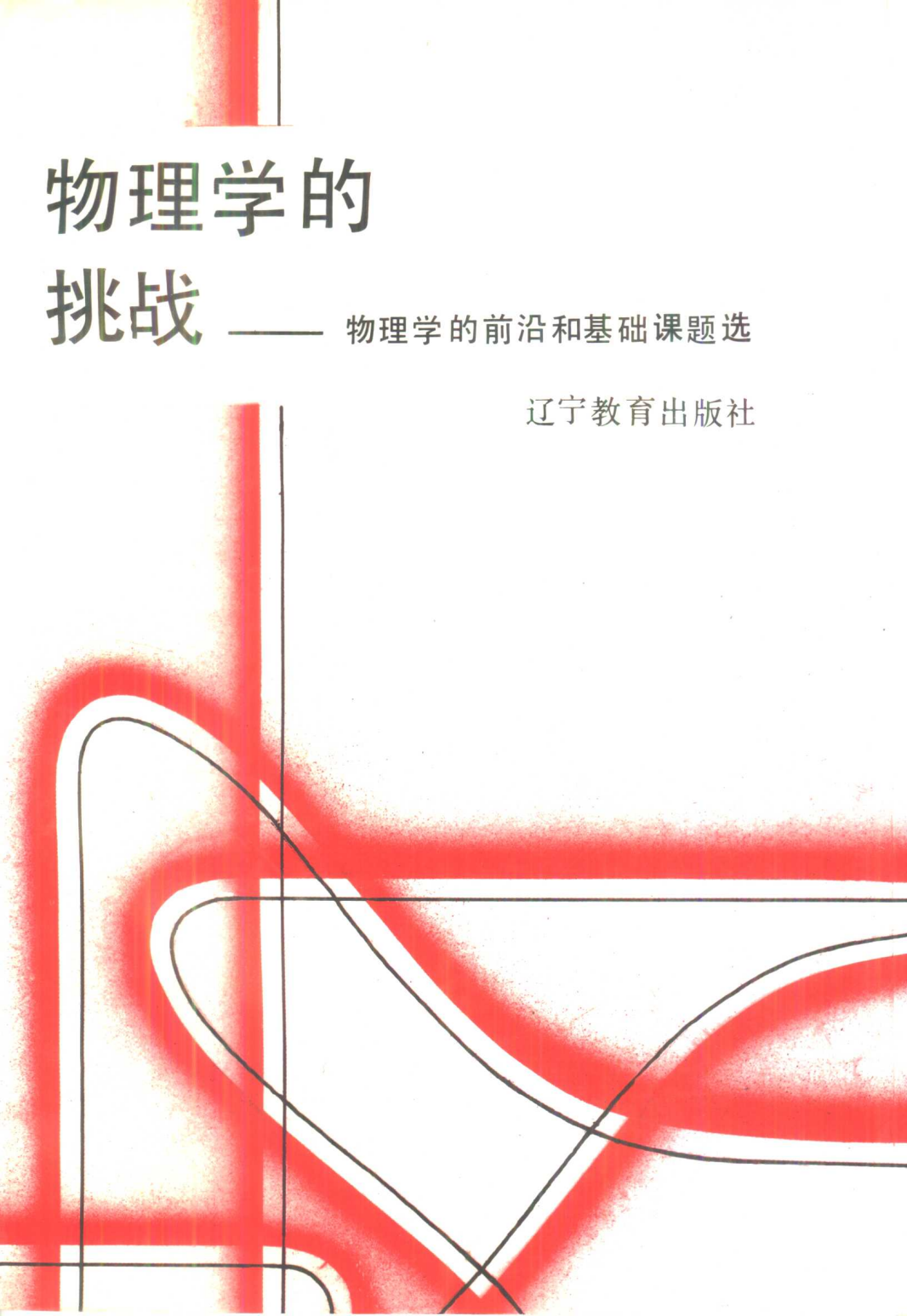


The background of the cover features a large, abstract graphic. It consists of a thick red vertical bar on the left side, which transitions into a series of overlapping, curved white and black lines that sweep across the lower half of the page. The overall effect is dynamic and modern, suggesting themes of physics or mathematics.

物理学的 挑战

—— 物理学的前沿和基础课题选

辽宁教育出版社

物理学的挑战

——物理学的前沿和基础课题选

苏汝铿 著

高等教育出版社

1991年·洛阳

物理学的挑战

——物理学的前沿和基础课题选

苏汝铿 著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市北一马路108号) 朝阳新华印刷厂印刷

字数: 199,000 开本: $850 \times 1168^{1/32}$ 印张: $7^{3/4}$
印数: 1—1,000

1991年9月第1版 1991年9月第1次印刷

责任编辑: 王越男 责任校对: 谭 坚
封面设计: 安今生 插 图: 夏兰兰

ISBN 7-5382-1471-2/O·9

定 价: 3.80 元

序

经过了近两年的努力(除当中有大半年时间赴美工作外),在1990年的最后几天,本书总算竣稿了。

撰写本书之所以费时,是因为任何一个人都不可能精通物理学中的所有领域。正因为如此,到底哪些课题属于物理学的前沿课题,就不免见仁见智,往往受自己所熟悉、曾在其中工作因而对之有所偏爱的课题的束缚。因此很难希望,本书所介绍的课题能够具有“普适性”,为众所公认并不受非议。好在这仅仅是物理学前沿中的一部分课题,对于其它的重要的前沿课题,特别是近年来有很大发展的新课题,仍然可以请专人撰写并编辑成集,继续出版,以飨读者。

撰写本书费时的第二个原因是:本书既不是专题的总结性的学术著作,又不是科普著作。如果是一本专题学术著作,可以用许多数学工具,通过推导、演算、数据,图表,以阐明物理概念,给出物理结论。但是,读者对象只能是“行家”。如果是一本科普著作,读者的对象会广一些,但深度不能太大。而且,唯其“普”,免不了要妙笔生花,往往不能比较准确地讲

清科学概念。作为一种尝试,本书尽量避免繁复的数学运算,比较清晰地,深入浅出地阐明某些物理学前沿课题和基础课题。本书所列的许多数学公式,绝大部份只是一些结论而不是推导。我们仅仅希望通过这些必要的公式,说清问题,给出结论。

撰写本书费时的第三个原因是:既然已经把这些课题介绍出来,自不免涉及这些课题的最新进展和对这些进展的评价。由于讨论的是前沿课题,因而在学术上,这些最新“进展”往往并不十分成熟。常常是诸子百家,人各一说。要深入评价这些工作,并非易事。而且往往涉及评论者本人的物理眼光、物理直觉和喜爱,很难作到不偏不倚。特别对一些基础课题,如量子力学中的隐函数,各种解释,时间的方向,特别是宇宙学等等,由于实际上这些课题,已经不仅涉及物理学和自然科学,而且还涉及哲学,因而要给出恰如其份的评价就更不容易了。本书只希望对这些课题给出一些物理学的评论,不拟过多对它们作哲学上的肯定或评击。

由于希望“非行家”们也能读懂,了解这些课题,因此在撰写每一专题时,我们基本上按照历史发展的顺序,起点尽量放低,尽量“浅入”而“深出”。但是,能否真正达到起点虽然低,但内容的深度仍然很大的目的。只有靠读者评论了。特别是,限于作者的学识、水平,书中错误在所难免,诚恳地希望读者批评指正。

最后,我要特别感谢为本书的出版作过贡献的许多朋友们,没有他们的帮助和促进,本书不可能竣稿和出版。

苏汝铨

1990年圣诞前夕于复旦大学

目 录

	序
1	一、从古典宇宙学到现代宇宙学
34	二、从大数之谜到第五种力
56	三、时间有方向吗?
78	四、从波粒二象性到隐变数理论
111	五、磁单极子之谜和规范场理论
137	六、超导电性和高温超导电热
171	七、物理学中的孤子和瞬子
205	八、核物理世界的新挑战

一、从古典宇宙学 到现代宇宙学

宇宙是什么？对浩瀚无垠的宇宙，我们已经了解了多少？利用现代物理学，目前已经勾画出了一幅甚么样的宇宙图景，还有多少问题没有解决，需要进一步研究，探索？对这些问题的回答，构成了现代自然科学中一个最基础的学科——宇宙学。探索宇宙，不仅是自然科学中最根本，最引人入胜的问题，也是物理学中最古老，但又总是处在最前哨的课题。

古典宇宙学

1916年爱因斯坦提出广义相对论以前的宇宙学，称为古典宇宙学。它和现代宇宙学有明显的不同。现代宇宙学具有深厚的理论基础和一定的实验根据：在理论上，它建立在广义相对论的基础上，近年来又和基本粒子物理学，量子统计物理学，量子力学等结合在一起，在实验上，它揉合和解释了许多由近代新的观测手段提供的新的观测事实，并且可以进一步利用它解

释星体,星系等各种天体的形成和演化。而古典宇宙学,由于受实验条件的限制和神学的左右,在很大程度上停留在思辨的阶段。只是在到了哥白尼时代,才开始真正地和一些主要来自太阳系的观测事实联系在一起。

在古代,无论在中国还是在外国,人们很早就对天地,宇宙等问题感兴趣。屈原在《天问》中问道:“圜则九重,孰营度之?”古代把天分为九重,这是谁干的呢?“九天之际,安放安属?”九天的边界究竟在哪里,九天之间又是怎样连属的?这里的九天,其实就是古代人心目中的宇宙。屈原在《天问》中不仅对宇宙的形成、形状、状态等提出了许多问题,而且对宇宙学中的方法论,也提出了许多很有思考价值的观点:在《天问》中一开始就提出:“遂古之初,谁传道之?上下未形,何由考之?冥昭瞢闇,谁能极之?冯翼惟象,何以识之?”宇宙远古时期的情况,是谁传说下来的?上下,其实就是天地,也是当时人们心目中的宇宙,当它还未成形时,根据什么来考察它的?天地未成,昼夜未分时,谁能搞得清楚呢?当混沌未开时,宇宙到处充满着一些无形的“气”。这些无形的东西,人们又是靠什么来认识它的呢?这些问题,虽然囿于当时的认识水平,只能是找不出答案的思索。但无可置疑,问题却提得恰到好处。它涉及人类应该用什么方法去研究宇宙。

“天地四方曰宇,往古来今曰宙”。研究宇宙,离不开时间和空间。无论是古典宇宙学还是现代宇宙学,都必须对宇宙在时间和空间中的演化状态作出回答。在寂静的夜空中,人们看到,一切恒星似乎都镶嵌在天穹上,太阳,月亮似乎都是在天穹中运行。天空,就像是个球体。因此,在古典宇宙学中,无论是我国的盖天说和浑天说,还是西方的托勒密的地心说,都把天看成是球形的。盖天说者认为,天好像张开的伞,是半球形的,地位于天之下。地之下不再有天,不再存在有宇宙空间。浑天说者则认为:天像个浑圆的球,就像蛋壳那样;大地

居于球心，就像是蛋黄。希腊古代的托勒密的地心说也认为地球是球形的，在地球外面有九个同心天层，月球，太阳和五大行星分别处在第一至第七天层上，而其它所有的恒星则处在第八天层，即恒星天。第八天层之外的“九重天”，则是神灵的处所，是最高天。托勒密的地心说不仅为神在宇宙中留下了住所，而且把人类居住的地球放在宇宙的中心，有利于神权的统治，因而在长时期中占统治地位。到了哥白尼时代，人们才把宇宙的中心从地球搬到太阳，从地心说变为日心说。哥白尼认为，天体的运动是圆周运动。他未能摆脱托勒密的本轮，均轮体系，也保留了恒星天，但除去了最高天。事实上，无论是盖天说，浑天说，地心说还是日心说，当时人们心目中的宇宙，其实只是太阳系。

宇宙是有限的还是无限的，是有边界的还是无边界的？这也是宇宙学中一个最根本的问题。柳宗元在《天对》中提出：

“东西南北，其极无方”，宇宙是无边无际的；而且“无中无旁，鸟际乎天则”，宇宙也没有中心和边界。在西方，布鲁诺则更是明确地提出：宇宙在任何一个方向上，都是无穷无尽的，任何宇宙的中心都不存在。所有的恒星都是巨大的球体，就象太阳一样。恒星的周围，也有行星环绕，就象地球环绕太阳一样，当然，在这个时代，对于宇宙是有限的还是无限的论证，实际上并非来自观测，而在很大程度上只是一种哲学上的思考。即使到了现代，宇宙有没有起源，宇宙能否创生，时间有没有原点，空间是有限的还是无限的，空间的几何是什么样的，也仍然有各种不同的说法。

但是，在古典宇宙学里，承认宇宙无限，不等于没有矛盾。相反，它带来了一些更根本的问题：表现为奥伯斯（Olbers）的光度佯谬和齐列格（Zeeliger）的引力佯谬。

先介绍奥伯斯佯谬：早在1720年，英国天文学家哈雷就曾提出：夜空为什么是漆黑的？初看起来，这似乎不成问题：夜

空既然无限大, 星星的数目比起广袤的夜空来似乎不算多, 天空自然应该是漆黑的。其实不然。如果略去光线在宇宙空间中的被吸收, 则在距离为 r 处, 绝对光度为 L 的一颗恒星的视光度是 $L/4\pi r^2$, 如果恒星的数密度是常数 n , 则在 $r \rightarrow r + dr$ 处恒星的数目是 $4\pi r^2 n dr$, 因此, 由所有恒星产生的总辐射能量密度是

$$\rho_s \int_0^\infty \left(\frac{L}{4\pi r^2} \right) 4\pi r^2 n dr = \rho_s L n \int_0^\infty dr \rightarrow \infty \quad (1)$$

这个积分发散, 星光的能量密度为无穷大, 夜空应该无限明亮。然而, 沉沉黑夜却表明并非如此。(1) 式的结果也不难理解, 关键在于光度正比于 $\frac{1}{r^2}$, 而空间体积却正比于 r^3 。对无

穷空间的积分结果必然是无穷大。

齐列格佯谬的实质与奥伯斯佯谬相同, 不过他把光度换成引力场强。假定牛顿力学成立, 则万有引力所引起的引力场强必然也正比于 $\frac{1}{r^2}$ 。重复刚才同样的论证, 可以证明, 由于星体

之间的万有引力, 将使得在无限的宇宙空间中的任一点, 引力场的能量趋于无穷大。这当然是不可能的。若果真是如此, 则处在宇宙空间中任何一点的任何星体, 都将在无限大的引力作用下, 坍缩为一点, 宇宙中不可能存在星系, 恒星, 行星。

稍为留意一下就会发现, 古典宇宙学的这些佯谬的得出, 实际上都暗含着一些假定和前提: 即宇宙是静态的, 不随时间演化; 宇宙中物质分布是均匀的, 各处相同; 而且宇宙空间是个欧几里德空间, 满足平直空间的欧几里德几何; 而且星体发射的能量, 引力场强都不随时间而变化; 星际空间中各种消光物质吸收光线所引起的消光效应均可忽略, 等等。为了解决这些佯谬, 对于这些前提, 应该作进一步考察和探讨。在十八世纪, 限于古典宇宙学的认识水平, 人们对静态宇宙习以为常,

并不怀疑它的正确性。为解决光度佯谬，奥伯斯认为星际空间存在着吸光物质。由于宇宙空间极其辽阔，吸光物质累积的吸光效应很大。按照他的计算，由于星际消光的影响，天狼星发出的光到达地球时强度减少了 $1/800$ ，其它比天狼星更远的星，光量的损失就更大了。在地球看来，由于消光的影响，其它恒星的光线对夜空背景的贡献可以忽略，夜空是黑的。这个解释，初看起来似乎合理，但实际上经不起推敲。因为根据能量守恒定律，星际物质在吸收星光后温度必然上升，从而又辐射比原来更多的能量。而且星际物质除了有吸收之外，还必然有散射。散射的效果只改变光线进行的方向而不损耗辐射的总能量。散射以后，原来方向行进的光线亮度固然减少了，但背景增亮了。因此无论吸收还是散射，都不会使原来十分明亮的天空变成漆黑。

事实上，光度佯谬和引力佯谬都只能在现代宇宙学中，在大爆炸宇宙学的框架里，才能得到比较满意的解释。

爱因斯坦的广义相对论

1916年，爱因斯坦提出了广义相对论。用和牛顿力学完全不同的思路 and 方式，解决了万有引力的问题。

广义相对论的前提是等效原理和广义协变性原理。等效原理的实验基础是引力质量和惯性质量相等。早期比较重要的证明二者相等的实验是厄缶(Eötvös)实验，它的精确度达到 10^{-9} 。最近，利用1987年观测到的超新星爆发(SN1987A)，又以更高的精确度验证了这个结果。由于引力质量与惯性质量相等，在局部区域的恒定引力场中，假定引力场强为 g ，则在参考系 S 中，牛顿定律的形式是

$$ma = mg + f \quad (2)$$

f 表示除引力之外的其它力。现选一个相对于 S 的加速度为 g

的参考系 S' ，则在 S' 中，加速度为 $a' = a - g$ ，(2)式变为

$$ma' = f \quad (3)$$

这个方程中引力不再出现。这说明，在引力场中以加速度 g 自由下落的实验室内，一切力学现象和一个没有引力场的惯性系一样，惯性力和引力等效。当然，这仅仅对引力场中的局部区域成立，因为实际上引力场不可能是完全均匀的，只在局域中才能看成均匀。因此等效原理是：在任意引力场中的每一个时空点，可以选择一个局部惯性系，使得在所讨论的那一点附近的充分小的邻域内，自然规律具有和在不存在引力场时，在未加速的笛卡儿坐标系里同样的形式。

广义相对论的另一个前提是广义协变性原理，它要求任何物理规律所满足的方程式具有广义协变性，即在一般坐标变换下，方程保持自己的形式不变；在有引力场存在时的方程式，当引力场趋于零，即当度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 回到闵可夫斯基(Minkowski)张量 $\eta_{\alpha\beta}$ 时，回到狭义相对论给出的方程式。事实上，广义协变性原理与等效原理有非常密切的关系。

由等效原理可见，引力的作用在于决定各个局部惯性系。而参考系实际上就是描写物质运动的时空背景。因此引力可以通过时空弯曲来描述。在广义相对论中，时空弯曲的程度或者说时空的性质是由度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 描述的，它使用的几何是黎曼几何学。在黎曼几何中， $g_{\alpha\beta}$ 具有对称性

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$$

爱因斯坦认为：决定时空性质的是引力场的物质分布，它满足方程式：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4)$$

式中 $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta}$ ， $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ，而 $R_{\mu\alpha\nu\beta}$ 是黎曼曲率张量； $T_{\mu\nu}$ 是物质的能量动量张量。(4)式说明，若物质的能量动量给定，求解(4)式后，原则上可给出度规张量 $g_{\mu\nu}$ ，

决定时空的弯曲程度和各种性质。而在引力场中的试探粒子，将沿着弯曲时空中的测地线运动。在平直时空中，测地线是直线，它代表在无引力场及其它外力时，粒子作惯性运动即匀速直线运动。在弯曲时空中，测地线是两点间最短距离的线。沿测地线运动就是沿短程线运动。

在牛顿时力学中，牛顿方程或者说哈密顿正则方程可由变分原理或最小作用量原理给出。同样，在广义相对论中，爱因斯坦方程（4）也可由变分原理给出。选择引力场和物质、辐射的总作用量 I 为

$$I = I_M + I_G$$

$$I_G = - \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{g(x)} R(x) d^4x \quad (5)$$

I_M 是物质和辐射的作用量，为方便起见，在（5）式及以下的讨论中，我们选择光速 $c=1$ 为单位。可以证明，利用总作用量 I 对于 $g_{\mu\nu}$ 的变分为零的极小值条件 $\delta I / \delta g_{\mu\nu} = 0$ ，可以给出爱因斯坦方程（4）式。

利用爱因斯坦场方程，可以解释比牛顿方程更多的实验现象。在弱场近似下，例如在太阳系内，满足 $\frac{2GM}{R} \ll 1$ 的条件，

爱因斯坦提出了广义相对论的三种检验：

（1）光谱线的引力红移：利用广义相对论，可以求出太阳表面发出的光到达地球时光线频率的红移量

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} \approx - \frac{GM_\odot}{R_\odot} = -2 \times 10^{-6} \quad (6)$$

式中 $M_\odot$ 表示太阳质量， $R_\odot$ 表示太阳和地球的距离。观测的结果表明，在5%的误差范围内，与这个值相符合。

但这并非广义相对论的判决性实验。因为不从广义相对论出发，直接利用量子力学中，光子的能量 $\epsilon = h\nu$ ，以及光子在经过引力场时和引力场交换能量所满足的能量守恒定律，也能

得出 (6) 式, 解释引力红移现象。

(2) 光线偏折: 其它恒星发出的光线经过太阳附近时, 由于太阳引力场的作用, 将发生光线偏折现象。实际上, 利用牛顿力学, 也能算出光线在经过太阳附近时所引起的光线轨道的偏折。它的大小是

$$\Delta\phi_N = 0''.875$$

利用广义相对论, 也可以算出光线偏折。但它的数值是

$$\Delta\phi_G = 1''.75$$

刚好等于牛顿理论算得的结果的两倍。因此观测光线在太阳附近的偏折, 可以验证广义相对论。但由于太阳光线很强, 其它恒星射来的光线很弱, 因此, 观测只能在日全蚀时进行。在日全蚀时, 观测太阳周围恒星的相对位置, 半年以后, 再观测同一天区中恒星的相对位置, 并比较它们的结果以确定偏折 $\Delta\phi$ 的数值。从 1919 年至今, 已经作过多次观测, 结果约在 $1''.57$ 至 $2''.37$ 之间, 平均值为 $1''.89$, 与广义相对论的预言相符。但由于日冕, 望远镜的精度, 拍摄时在不同时间曝光等影响, 会使观测的结果带来一些误差。近年来, 为提高测量的精度, 已经利用甚长基线射电干涉仪对射电源的方位进行观测, 得出的结果也证实了广义相对论的预言。例如对类星体 3C279 的观测, 几个不同的观测站给出的结果的平均值大概是 $\Delta\phi \cong 1''.77$ 。对射电源 0119+11, 0116+08, 0111+02 的观测, 给出的 $\Delta\phi = 1''.761 \pm 0''.010$, 这些结果都与 $1''.75$ 的值非常接近, 有利于广义相对论。

(3) 内行星轨道近日点的进动, 特别是水星近日点的进动: 这是广义相对论在弱场近似下的二级效应, 精度较高, 是广义相对论带有判决性的实验验证。

十九世纪中叶, 天文学家就已经发现牛顿力学给出的水星轨道不完全符合观测的结果。水星绕太阳的轨道是一个椭圆, 但由于其它行星的扰动, 使水星轨道椭圆的长轴发生缓慢的进

动,使得实际上水星运行的轨道与严格的椭圆有所偏离。椭圆长轴的转动率每一百年大概是 1.5° 。按照牛顿力学考虑所有引起进动的因素后带来的影响是,水星的进动值为

$$\Delta\phi_N = 5557.''62 \pm 0.''20$$

但观测值是

$$\Delta\phi = 5600.''73 \pm 0.''41$$

二者之差是

$$\Delta\phi = \Delta\phi - \Delta\phi_N = 43.''11 \pm 0.''45$$

最初认为,可能是在太阳和水星之间还存在有一颗未被观测到的行星——火神星,它引起了水星近日点进动的偏差。但迄今为止,所有观测均未发现火神星。相反,利用广义相对论,无须引入火神星,就可以解释水星近日点的观测事实。每一百年,水星将绕太阳转 415 圈。由广义相对论算出的比牛顿引力论更高一级修正的理论结果是 $\Delta\phi = 43.''03$, 与观测结果符合得很好。

不仅水星,对于金星和地球,近日点也有进动。它们的 $\Delta\phi$ 的观测结果分别是 $\Delta\phi_{\text{♀}} = 8.4 \pm 4.8$, $\Delta\phi_{\text{♀}} = 5.0 \pm 1.2^*$, 而利用广义相对论推得的理论公式是

$$\Delta\phi = 6\pi GMN/r_{\min}(1+e)c^2 \quad (7)$$

$r_{\min}$ 是近日点和太阳的距离, e 的椭圆轨道的偏心率, N 是每一百年中行星公转的次数。由 (7) 式给出 $\Delta\phi_{\text{♀}} = 8.6$, $\Delta\phi_{\oplus} = 3.8$, 都和观测结果符合得很好。

近年来,又提出了其它一些新的验证广义相对论的实验,主要有:

(4) 雷达回波实验:在地球中用雷达发射一个讯号,这个讯号被某一行星,比如金星反射后回到地球。由于存在太阳引力场的影响,使得原来以光速 C 直线传播的雷达讯号,在经过

* 脚标 ♀ 表示金星, ⊕ 表示地球。这是天文学中惯用的表示。

一个来回后所消耗的时间比没有太阳引力场时长。太阳使雷达讯号传播的速度变慢了。利用广义相对论，可以求出这个时间的延迟。六十、七十年代，夏比罗（Shapiro）在地球和金星之间，作了一系列雷达回波实验。实验的结果和广义相对论的理论预言符合得很好。这个结果也不能用牛顿力学解释。按照牛顿力学计算的结果，雷达回波将不是延迟而是提前，它所算得的时差和广义相对论算得的结果符号相反，与实验结果不一致。

（5）绕地球轨道上的陀螺仪的进动：近年来，由于空间技术日益发达，在人造卫星上也可以作一些验证广义相对论的实验。在环绕地球以确定轨道运动的人造卫星上，观测陀螺仪的进动也可以为检验广义相对论提供佐证。目前这方面的实验正在计划进行中。

上述这五种检验，除第（5）种涉及由于地球的自转而引起的各向异性外，其它各种所讨论的引力场都是静态和球对称的。它所对应的爱因斯坦场方程（4）式的解是许瓦兹解，具有形式

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2MG}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2MG}{r}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8)$$

这是1916年许瓦兹首先求得的。

相对论宇宙学

但是，如果要把爱因斯坦的场方程用来讨论我们观测到的宇宙，就必须讨论爱因斯坦方程的随时间变化的解。

前面已经指出，牛顿力学的均匀分布，在无限的欧几里得空间中的宇宙模型存在着引力佯谬。其实，即使假定天体只是均匀分布在有限的欧几里德空间内，牛顿理论也仍然存在矛

盾。因为可以证明，这样的体系也是不稳定的，它或者将发生坍塌，或者一部分将会发散而导致整体的瓦解。总之，古典宇宙学不能给出一个自洽的宇宙模型。我们必须改弦更张，建立相对论宇宙学。

相对论宇宙学的基本假定是：宇宙在大尺度上是均匀和各向同性的，宇宙中的所有位置本质上都是等价的。近代自然科学从否定地球处于宇宙的中心开始。但是哥白尼仍然保留了太阳系在宇宙间的特殊位置。近代的天文观测资料已经证明，无论太阳，太阳系，银河系都不是宇宙的中心，宇宙根本没有中心，没有特殊位置。现代宇宙学把这一点提高到基本原理的地位。而且宇宙的物质分布在大尺度，直径为 10^8 到 10^9 光年的天区内可认为是均匀的。这是一种平均的效果，忽略了小尺度的结构和涨落。这个宇宙均匀各向同性的假设称为宇宙学原理。天文学的观测事实比较好地支持了这个原理，例如，射电源的分布是近乎各向同性的，微波背景辐射也近乎各向同性，它的各向异性小于 10^{-4} 。

在均匀各向同性的要求下，时间 $t = \text{常数}$ 的三维空间，只由一个曲率值标志，在各空间点上曲率应当相同。但曲率 k 可以是时间 t 的函数，并且可表示为

$$k(t) = \frac{k}{R^2(t)}, \quad \begin{cases} k = +1 & (\text{正曲率}) \\ k = 0 & (\text{平坦空间}) \\ k = -1 & (\text{负曲率}) \end{cases} \quad (9)$$

其中 $R(t)$ 称为宇宙标度因子。可以证明，这时爱因斯坦场方程的解只有一个未知的函数 $R(t)$ ，度规 $g_{\mu\nu}$ 具有罗伯逊—沃克 (Robertson-Walker) 度规的形式，其线元可表示成

$$dr^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\} \quad (10)$$

当 $k = +1$ 时，宇宙空间是有限而无界的，可以看成是四维空间中半径为 $R(t)$ 的球面，这时，标度因子 $R(t)$ 可合理地称为“宇