理论力学引论

苟兴华 编著

四川大学出版社

理论力学引论

苟兴华 编著

四川大学出版社

1988年·成都

内容提要

本书精炼而系统地讲述理论力学的概念、理论和方法，全书共分六章：运动学、牛顿力学基础、拉格朗日力学基础、刚体动力学、振动、哈密顿力学基础。每章均附有一定数量的习题。

本书按照理论与实践并重的原则编写，内容有较大更新。书中精选了自然界和工程技术中的力学问题作为论题，并融合到基本概念、基本理论和基本方法的讨论中，既注意实践环节，又保证有严格的理论系统和足够的理论水平。例题和习题选材新颖，尽量避免陈旧和脱离实际的内容。另外，鉴于力学研究的进展，书中还介绍了学习现代动力学所必须的基本概念。

本书可作为理工科大学和师范院校中数学、物理、无线电、以及各相近专业的教材，亦可供科研工作者、工程技术人员和自学青年参考。

理论力学引论

苟兴华 编著

责任编辑 鲝程方　封面设计 李 玫

四川大学出版社出版发行 四川省新华书店经销

四川省郫县犀浦印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 印张9.62 200千字

1988年12月第一版 1988年12月第一次印刷

印数：0—5000册

ISBN 7-5614-0117-5/O·15 定价：1.72元

前　　言

理论力学课程的内容是每个学习数学、物理学和工程学科的学生都应该掌握的。很久以来，经典力学就是物理教育的重要基础。非线性力学的研究进展及其广泛的思想影响，加深了人们对经典力学的认识。然而，在近年的理科教育中，一方面是理论力学课程的学时有所减少；另一方面，理科各专业的毕业生却比过去面对更多的国民经济领域，除理论研究外，还可能投身到应用科学和多种工程实践中去。面对这种情况，我们觉得需要一本简明的、在保留完整的理论体系的同时，又能介绍一些使用理论去处理多方面的实际问题的教本。在试用讲义的基础上，我们编写了这本导论性的教材。

编写本书时注意到以下几点：简洁地讲述经典力学的概念、原理和方法；以大自然运动和工程实际问题作为例子去丰富课程的内容；介绍一点与现代动力学有关的概念。同时，针对学习理论力学中常遇到的解题上的困难，还选取了一些工科院校理论力学课程的研究生入学试题作为例题进行分析。编者希望这种选材和讲述方法能使理论力学的内容比较紧凑、生动和实用。

编者感谢北京大学王仁教授、朱照宣教授和四川大学郭士堃教授对编者的鼓励和支持，感谢他们对改进原稿提出的宝贵建议。感谢许多学生对试用讲义提出的批评和意见。编者还感谢责任编辑樊程芳同志的辛劳和四川大学出版社的支

持，使得本书得以出版。

限于编者水平，错误难免，恳切希望读者指正。

编　者

1987年10月于四川大学

目　　录

第一章 运 动 学

经典力学是研究宏观物体的机械运动规律的学科。宏观物体指由大量原子、分子组成的物体，可将量子力学效应略去不计。本书只讨论物体的运动速度远低于光速的情形，即为非相对论性经典力学，而且运动物体可视为质点和刚体，不涉及可变形连续介质模型。经典力学以牛顿运动定律为基础，建立在时间、空间、惯性参考系、质量、力以及能量等概念的基础上。本章讨论质点和刚体的运动学，即从几何的角度研究物体的运动，而不涉及引起运动的原因。运动学的基本问题是描述物体在时间过程中的位置、轨道、速度和加速度。

1.1 质点运动学

在非相对论性经典力学中，认为物体所在的**空间**是三维欧氏空间，而**时间**则是一维的。物体的位置总是相对于其它物体确定的，因此，为了描述物体的位置，必须选定某个物体作为基准，基准物体称为参考体。与参考体相固连的空间延伸称为**参考系**。为用数值表示物体的位置，可在参考系上设置坐标系，称为**参考坐标系**。有时也简单地把参考坐标系称为参考系。物理事件是指在某瞬时发生于空间某点的事件，每个参考系有记录事件的观察者和时钟。在非相对论性经

典力学中，认为不同参考系中的观察者都是用同一时钟，因此，时间被认为是与运动无关的独立参量。对于具有质量而不计其大小的物体称为**质点**。作为质点的物体的运动学特征可用一个点的运动加以表示。在运动学中，质点被认为是几何点。

1　质点的速度和加速度

选空间某点O为参考坐标系的原点，质点P相对于该参考系的**位置矢量**（简称**矢径**）为$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$。运动质点的矢径是时间$t$的函数$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。质点$P$在时刻$t$的**速度**$\boldsymbol{v}$定义为

$$\boldsymbol{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

（1.1—1）

质点P在时刻t的**加速度**$\boldsymbol{a}$定义为

$$\boldsymbol{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

（1.1—2）

2　质点运动的内禀性质

在时间过程中，运动质点的空间位置的连续序列称为质点的**轨道**。考虑质点沿轨道运动的路程。质点在$\mathrm{d}t$时间内的元位移矢量为$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，相应的路程为$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$。因此，质点由时刻$t_0$（位于$P_0$）到时刻$t$（位于$P$）所经历的**路程**$s$为

$$s(t)=\int_{\widehat{P_0P}}\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}s \qquad (1.1—3)$$

上式定义的路程$s(t)$是时间t的单调增函数。因此，可选路程s作为描述质点在轨道上的位置的独立参量。

轨道的切向单位矢量 τ 为

$$\tau=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{1.1—4}$$

τ 的指向与质点运动方向相同。质点速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\tau \tag{1.1—5}$$

其中

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.1—6}$$

是质点的**速率**。$\boldsymbol{v}$、τ如图 1.1—1 所示。

将（1.1—5）式对时间 t 求导，有质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\tau+v\frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}s}\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\tau+v^2\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \tag{1.1—7}$$

为计算$\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}$，从定义出发有

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\qquad 及\qquad \Delta\tau=\tau'-\tau$$

其中 $\tau=\tau(s)$ 和 $\tau'=\tau(s+\Delta s)$ 分别是轨道上路程为 s 和 $s+\Delta s$ 处的切向单位矢量，如图1.1—2所示。当$\Delta s\to 0$时，

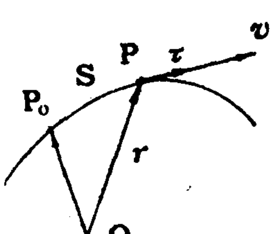

图 1.1-1

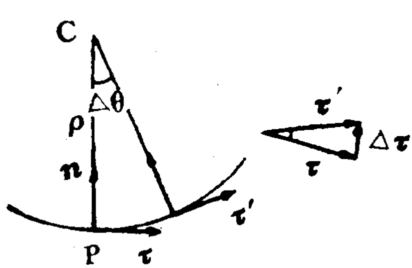

图 1.1-2

单位矢量的改变量$\Delta\tau$的极限方向与τ垂直，并指向轨道在点P的曲率中心C。单位矢量$\boldsymbol{n}=\frac{\overrightarrow{PC}}{PC}$称为主法向单位矢量。以$\rho$表示轨道在点$P$的曲率半径，则有

$$\Delta\tau\simeq\Delta\theta\boldsymbol{n}\simeq\frac{\Delta s}{\rho}\boldsymbol{n}$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta s}{\rho}\boldsymbol{n}\right)/\Delta s=\frac{\boldsymbol{n}}{\rho}$$

以此代入（1.1—7）式，得质点的加速度$\boldsymbol{a}$为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\tau+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \qquad (1.1—8)$$

上述的(1.1—5)和(1.1—8)式表示质点的速度$\boldsymbol{v}$和加速度$\boldsymbol{a}$与质点运动的轨道的关系，即所谓质点运动的内禀性质：质点的速度$\boldsymbol{v}$沿轨道的切向，加速度$\boldsymbol{a}$位于切向τ和主法向$\boldsymbol{n}$所共的密切平面内。加速度$\boldsymbol{a}$在切向和主法向的投影为切向加速度a_τ和法向加速度a_n，由(1.1—8)式有

$$\boldsymbol{a}=a_\tau\tau+a_n\boldsymbol{n},\quad a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2},\quad a_n=\frac{v^2}{\rho} \qquad (1.1—9)$$

(1.1—5)和(1.1—9)式又称为速度和加速度的自然坐标表示。$\boldsymbol{b}=\tau\times\boldsymbol{n}$为轨道的次法向单位矢量。(1.1—9)式表明，加速度的次法向分量$a_b=0$。轨道上点P的密切平面、曲率圆和τ、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$矢量如图1.1—3所示。

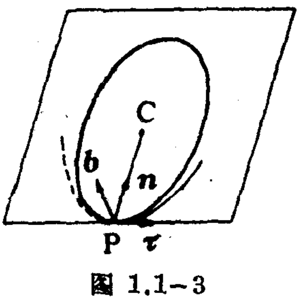

图 1.1-3

3 矢径、速度和加速度的坐标表示

1）**质点的自由度** 描述质点位置的独立参数的个数称为质点的**自由度**。在三维空间中不受位置限制的质点（又称为自由质点）的自由度为3。在直角坐标系中，坐标x，y，z就是质点位置的独立参数。若质点的位置还受到预加的限制，称为**约束质点**或**非自由质点**，这种限制质点位置的数学方程称为**约束方程**。非自由质点的自由度定义为坐标数（即是3）减去约束方程的个数。若质点限制在某曲面上，曲面方程

$$f(x,y,z)=0 \qquad (1.1\text{—}10)$$

就是质点所受的约束方程，质点的自由度为2。若质点限制在某曲线上，曲线方程

$$f_1(x,y,z)=0, \qquad f_2(x,y,z)=0 \qquad (1.1\text{—}11)$$

就是约束方程，质点的自由度为1。实际上，对于限制在曲线上的质点，路程s即可作为描述质点在曲线上的位置的独立参数，而用参数s表示的速度和加速度即为（1.1—5）和（1.1—8）式。

2）**直角坐标** 若参考坐标系为直角坐标$Oxyz$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$为轴x,y,z的单位矢量，质点的矢径$\boldsymbol{r}$为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3 \qquad (1.1\text{—}12)$$

以此代入(1.1—1)和(1.1—2)式可得速度$\boldsymbol{v}$和加速度$\boldsymbol{a}$的直角坐标表示。由于$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$为固定矢量，故有

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\boldsymbol{e}_1+\dot{y}\boldsymbol{e}_2+\dot{z}\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{a}=\ddot{x}\boldsymbol{e}_1+\ddot{y}\boldsymbol{e}_2+\ddot{z}\boldsymbol{e}_3$$

$$(1.1\text{—}13)$$

这里“$\cdot=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$”表示时间 t 求导，一般说来，今后也保持这种约定。

3）**平面极坐标**　　质点被限制在平面上运动时，其自由度为 2，可选平面极坐标 r，φ 为位置参数。平面极坐标属于曲线坐标系。曲线坐标系的单位基矢量的方向在空间不同点一般是不同的。若 t 时刻质点在 P 处，其极坐标为 r，φ，$t+\Delta t$ 时刻质点在 P' 处，其极坐标为 $r+\Delta r$，$\varphi+\Delta\varphi$。点 P 和 P' 的基矢量 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{e}'_r$，$\boldsymbol{e}'_\varphi$，如图 1.1—4 所示。在 $\Delta t\to 0$ 的过程中，近似地有

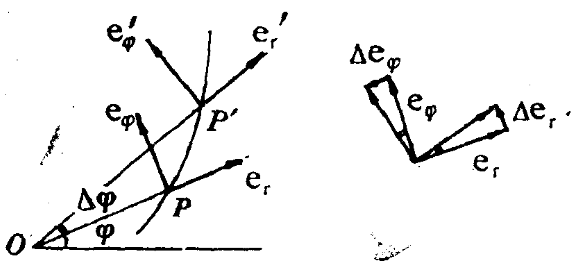

图 1.1－4

$$\Delta\boldsymbol{e}_r\simeq(\Delta\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi,\qquad \Delta\boldsymbol{e}_\varphi\simeq-(\Delta\varphi)\boldsymbol{e}_r$$

故单位基矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 对时间 t 的导数为

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi,\qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}=-\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_r \tag{1.1—14}$$

质点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的极坐标方程为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \tag{1.1—15}$$

将上式对时间 t 求导并利用(1.1—14)式，得质点速度 $\boldsymbol{v}$ 的极

坐标表示为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.1—16}$$

令 $v_r=\dot{r}$、$v_\varphi=r\dot{\varphi}$，v_r和v_φ称为质点的**径向速度**和**横向速度**。

当质点在平面上运动时，矢径$\overrightarrow{OP}$在单位时间内扫过的面积为$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$，这个数值又称为**面积速度**或**扇形速度**。

将（1.1—16）式对时间 t 求导，再利用(1.1—14)式，得质点加速度 $\boldsymbol{a}$ 的极坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.1—17}$$

令 $a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$，$a_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}$，$a_r$和$a_\varphi$称为质点的**径向加速度**和**横向加速度**。

4）柱坐标　可用柱坐标r，φ，z表示质点在三维空间中的位置。用 $\boldsymbol{R}=\overrightarrow{OP}$ 表示质点对原点O的矢径，如图1.1—5 所示。由于

$$\boldsymbol{R}=r\boldsymbol{e}_r+z\boldsymbol{e}_3 \tag{1.1—18}$$

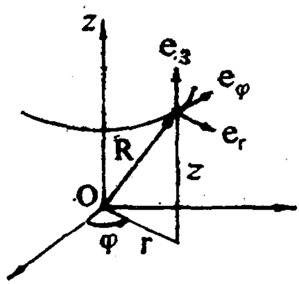

图 1.1-5

将（1.1—18）式对时间 t 求一阶、二阶导数，并注意到$\boldsymbol{e}_3$为常矢量，得质点速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 的柱坐标表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\dot{z}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{a}&=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi+\ddot{z}\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{1.1—19}$$

5）球坐标　还可用球坐标 r、θ、φ 确定质点在三维空间中的位置，如图1.1—6所示，其中 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 是点 P 处球坐标的单位基矢量。质点对原点 O 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 为

$$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r \tag{1.1—20}$$

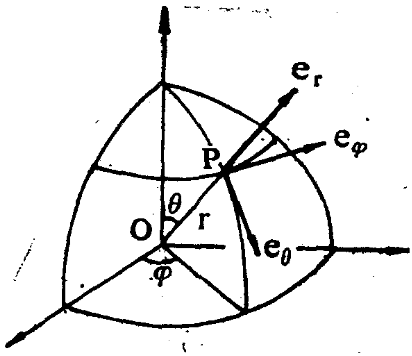

图 1.1－6

直观地看，若令r，θ，φ依次独立地随时间变化，可得质点沿$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$的速度分量分别为$\dot{r}$，$r\dot{\theta}$，$r\dot{\varphi}\sin\theta$。故质点速度$\boldsymbol{v}$的球坐标表示为

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi \qquad (1.1—21)$$

我们不加证明地引用质点加速度$\boldsymbol{a}$的球坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$
$$+(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\varphi \qquad (1.1—22)$$

在本章第三节中将用相对运动公式推导(1.1—21)和(1.1—22)式，在第三章中还将用拉格朗日方程推导(1.1—22)式。

例 1 若质点沿一椭圆运动，它对于焦点的面积速度为常数C，求质点的加速度。

解 以平面极坐标r，φ表示的椭圆方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi} \qquad (1)$$

其中e，p均为常数。按题设面积速度为