小波变换及其在分析化学中的应用

赵凯　王宗花　编著

地质出版社

小波变换及其在分析化学中的应用

赵 凯 王宗花 编著

地质出版社

·北 京·

内 容 提 要

本书对于小波分析的理论和方法作了较简单且系统的介绍，小波变换在分析化学中的具体应用也给出了相应的实例。其中：第一章和第二章简单地回顾了一些数学基本知识和 Fourer 分析的有关内容；第三章到第六章较系统地介绍了小波分析的理论与方法；第七章到第九章介绍了小波变换在分析化学中的具体应用，第十章简单介绍了小波变换在其它化学领域中的应用。

本书可以作为大学高年级学生、研究生以及科技工作者的入门读本。

图书在版编目(CIP)数据

小波变换及其在分析化学中的应用/赵凯，王宗花编著 .-北京：地质出版社，2000.8

ISBN 7-116-03082-4

Ⅰ.小…　Ⅱ.①赵…②王…　Ⅲ.①小波分析-基本知识②小波分析-应用-分析化学　Ⅳ.O174.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 24602 号

地质出版社出版发行

（100083　北京海淀区学院路 29 号）

责任编辑：王永奉

*

北京印刷学院印刷厂印刷　新华书店总店科技发行所经销

开本：850×1168 1/32　印张：6.5　字数 163 千字

2000 年 8 月北京第一版·2000 年 8 月北京第一次印刷

印数：1—400 册　定价：16.00 元

ISBN 7-116-03082-4
O·19

前　言

小波分析 (Wavelet Analysis) 是数学发展史上的重要成果. 当今数学家们所追求的主要是两个方面: 数学理论的完美性和数学应用的广泛性, 小波分析恰恰是这两个方面的集中体现. 它无论是对数学本身, 还是对工程以及其它学科的应用, 小波分析都已产生或必将产生深远的影响.

化学计量学 (Chemometrics) 是 20 世纪 70~80 年代发展起来的一门新兴化学学科, 它综合运用了数学、统计学与计算机科学手段设计或选择最优化学量测方法, 并通过解析化学量测数据以最大限度地获取化学及其相关信息. 可以认为, 化学计量学是化学与数学、统计学以及计算机科学之间的 "接口". 化学计量学之所以得以迅速发展, 主要原因可归结为两方面: 一是计算机科学的发展不仅使大量化学量测仪器操作自动化成为事实, 而且使得大量数据的自动采集和传输成为易事; 这样, 如何处理和解析这些原始的化学量测数据就成为了十分突出的问题. 二是计算机科学的迅猛发展, 对近代数学也产生了巨大影响; 它不但产生了以计算机为基础的计算数学新分支, 而且还使得很多具有巨大实用价值的古老数学分支焕发出青春活力; 过去难以使用的复杂数学方法可以在计算机上实现, 为解决复杂的数据处理与信息提取提供了实际可能性. 正是有了现代化学量测手段的进步和数学解析手段的发展, 化学计量学才得以迅速发展.

化学量测或分析实验所获得的信号, 包含了有用信号及噪声; 后者包括仪器噪声和干扰物质的噪声等. 如何进行信噪分离, 就需要采取有效的处理手段. 以前一般采取的是 Fourier 分

析、 Kalman 分析、曲线拟合、卷积平滑、匹配滤波、最小二乘和样条平滑等，由于这些方法的本身所限，在信号的提取中有一定的局限性. 比如 Fourier 分析，要知道全部处理信息及有用信息和噪声信息的频率分布状况才能使用，也即没有局部性. 为了弥补 Fourier 变换在这方面的不足， 1946 年 Gabor 引进了窗口 Fourier 变换，其思想是用一个在有限区间外为零 (紧支撑) 的光滑函数乘所要研究的函数，再进行 Fourier 变换处理，这确实在研究信号的局部性质时起到一定的作用. 但是，这种窗口的大小和形状是固定不变的，这与频率越高相应的窗口应越窄的要求不符. 因此，窗口 Fourer 变换不能敏感地反映信号的突变，而信号的突变往往是我们最关注的. 小波变换就继承和发展了窗口 Fourer 变换的思想，同时克服了窗口 Fourier 变换的不足，使得其窗口能随频率的变化而变化，从而使人们对信号的处理变得得心应手.

20 世纪 80 年代中后期兴起的小波变换 (Wavelet Transformation) 是泛函分析、 Fourier 分析、样条分析、调和分析、数值分析比较完美的结合，它具有许多其它的处理手段 (如 Fourier 分析、 Gabor 变换、 Viginer-Wille 分布等) 所不具备的优良特性，如正交性、方向选择性、可变的时 - 频域分辨率、可调节的局部支撑等. 小波分析正是通过对分析信号进行小波变换，把信号空间尺度 (频率) 的不同，分为低频部分和高频细节，从而实现各成分在时间轴的位置保持不变以及进行数据压缩等. 这些特性使得小波分析成为信号处理的一种强有力的新工具.

小波 (Wavelet) 就是小的波形. 所谓 “小” 是指它具有衰减性，比如是局部非零的 (局部支撑性); 所谓 “波” 是指它的波动性，即其振幅呈现正负相间的振荡形式. 1986 年，Meyer 构造出了具有衰减性质的光滑函数 ψ, 它的二进制伸缩与平移构成了 $L^2(\mathbf{R})$ 的规范正交基. 继 Meyer 小波提出后， Lemarie 和 Battle 又分别独立地提出了具有指数衰减的小波函数. 此后 Mallat 提

出了多尺度分析 (Multiresolution Analysis, 简称 MRA) 概念，统一了 Lemarie 等提出的具体小波的构造，还给出了相应的分解和重构算法，现称之为 Mallat 算法. 1988 年 Daubechies 构造了具有有限支集的正交小波. 1990 年崔锦泰和王建忠构造了基于样条函数的单正交 (或斜交、半正交) 小波函数. 小波分析的历史是科学家、工程师与数学家共同创造的，从小波发展的历史人们再一次认识到理论与实践的相互促进和发展. 小波分析正在初步有效地应用于分析化学中.

对于一般的读者，特别是接触现代数学知识较少的化学工作者，理解小波分析的概念和理论有一定的难度，这主要是由于小波分析中用到了许多数学领域中有关实变函数与泛函分析等数学知识. 因此，我们在编写这本书时尽量浅显地系统介绍小波分析的理论与方法，以及在分析化学中的一些具体应用，以使掌握数学知识不很深的读者也能读懂它，从而达到读者对小波分析及其在分析化学中的应用有较全面了解的目的. 为了读者阅读方便，并考虑到读者对小波分析了解的不同，我们在第一章和第二章简单地回顾了一些数学基本知识和 Fourer 分析的有关内容；第三章到第六章较系统地介绍了小波分析的理论与方法；第七章到第九章介绍了小波变换在分析化学中的具体应用，第十章简单介绍了小波变换在其它化学领域中的应用.

由于作者水平所限，难免出现缺点和错误，恳请广大读者批评指正.

作者

1999 年 8 月

目 录

第一章　基本知识

小波变换的概念和理论中用到了许多数学基础知识，为了便于读者的阅读和学习，我们把一些有关的数学概念和基本知识在这一章里作以简单地介绍．了解这些基本内容的读者可直接进入下一章．

第一节　空　间

这一节主要介绍数学中几个经常用到的空间概念，这里不仅仅是通常的二维和三维欧氏空间或 n 维向量空间，而主要是介绍一些常见的函数空间及数列空间甚至抽象空间．

首先看一下线性空间的概念．

定义 1.1　设 Ω 是一个集合，如果在 Ω 中规定了加法运算和数与 Ω 中元素的数乘运算 (即对任意 $x, y \in \Omega$，有 $x+y \in \Omega$；对任意 $x \in \Omega$ 和数 λ，也有 $\lambda x \in \Omega$)，满足：

(1)　$x+y=y+x$；

(2)　$(x+y)+z=x+(y+z)$；

(3)　存在唯一元素 $0 \in \Omega$，使 $\forall x \in \Omega$ 有 $x+0=x$；

(4)　$\forall x \in \Omega$，存在唯一 $x' \in \Omega$，使 $x+x'=0$，称 x' 为 x 的负元素，记为 $-x$；

(5)　$\forall x \in \Omega$，有 $1 \cdot x=x$；

(6)　$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$，($\mu$ 和 λ 都是数)；

(7)　$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$；

(8)　$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$．

则称 Ω 为线性空间或向量空间．

二维和三维欧氏空间以及 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 都是线性空间. 下面再给出几个线性空间的简单例子:

空间 $C^k[a,b]$ 设 k 是一个非负整数, $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 而且具有连续的 k 阶导函数, 这种函数 $f(x)$ 的全体记为 $C^k[a,b]$. 显然, 在通常的函数加法与数乘运算下 $C^k[a,b]$ 是线性空间.

特别 $C^0[a,b]$ 记为 $C[a,b]$, 表示 $[a,b]$ 区间上的全体连续函数; $C^\infty[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 区间上的具有任意阶连续导数的函数全体. $C^k(-\infty,+\infty)$ 常记为 $C^k(\mathbf{R})$.

例如: $|x| \in C(-\infty,\infty)$; $x^2|x| \in C^2(-\infty,\infty)$; $\sin x \in C^\infty[0,2\pi]$ 等等.

通常用 $C_0(\mathbf{R})$ 表示在无穷远处为 0 的连续函数全体, 它也是线性空间.

同样可以在复数或其它数域上定义 $C^k(G)$, G 是某一数域.

空间 $L^p[a,b]$ $L^p[a,b]$ $(1 \le p < +\infty)$ 表示在 $[a,b]$ 上 p 次方绝对可积的函数全体. 即若

$$\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < +\infty \tag{1.1.1}$$

则称 $f(x) \in L^p[a,b]$. 显然, 它在通常的函数加法与数乘运算下是线性空间.

$L^\infty[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上的本性有界函数的全体 (也可以说是几乎处处有界的函数全体). 即若

$$\inf_{E_0 \subset [a,b]} \sup_{[a,b]-E_0} |f(x)| < +\infty \tag{1.1.2}$$

其中 E_0 是 $[a,b]$ 上的零测度集, 则称 $f(x) \in L^\infty[a,b]$.

例如: $e^{-x} \in L^p(0,+\infty), p \ge 1$; $\dfrac{1}{x} \in L^2(1,+\infty)$; $\sin x \in L^p[0,2\pi], p \ge 1$; $\mathrm{sgn}\, x \in L^\infty(-\infty,+\infty)$ 等等.

空间 l^p l^p $(1 \le p < +\infty)$ 表示数域 G 上满足 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ 的数列 $\{x_n\}$ 的全体，l^∞ 表示有界数列的全体. 显然，它在通常的数列加法与数乘运算下是线性空间.

例如：数列 $\{\frac{1}{n}\} \in l^p, p > 1$; $\{(-1)^n\} \in l^\infty$ 等等.

定义 1.2 设 Ω 是数域 G 上的一个线性空间，如果 Ω 上的实值函数 $p(x)$ 满足如下条件：

(1) $p(x) \ge 0, \forall x \in \Omega$; 且 $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \forall x \in \Omega, \lambda \in G$;

(3) $p(x+y) \le p(x) + p(y), \forall x, y \in \Omega$.

则称 $p(x)$ 是 Ω 上 x 的范数，记为 $\|x\|$. 此时称 Ω 按范数 $\|\cdot\|$ 构成赋范线性空间，简称赋范空间.

例如：(1) n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$, 在范数

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{1/2} \tag{1.1.3}$$

下构成线性赋范空间，此处的范数即通常向量的模.

(2) 空间 $C[a,b]$ 以如下范数构成赋范空间：

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| . \tag{1.1.4}$$

(3) 空间 $L^p[a,b]$ 以如下范数构成赋范空间：

$$\|x\|_p = (\int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t)^{1/p} \quad (1 \le p < +\infty) . \tag{1.1.5}$$

(4) 空间 l^p 以如下范数构成赋范空间：

$$\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} . \tag{1.1.6}$$

为了方便，我们列出几个关于空间 $L^p[a,b]$ 的常见不等式：

Hölder 不等式：设 $p>1, q>1$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，如果 $f(x)\in L^p[a,b]$，$g(x)\in L^q[a,b]$，则 $f(x)g(x)\in L^1[a,b]$，且

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{1.1.7}$$

当 $p=2$ 时是 Cauchy 不等式：

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2\,\mathrm{d}x\right) \tag{1.1.8}$$

Minkowski 不等式：设 $p\geq 1$，$f(x),g(x)\in L^p[a,b]$，则 $f(x)+g(x)\in L^p[a,b]$，且有

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.1.9}$$

对于空间 l^p 也有相应的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

定义 1.3 设 Ω 是一个集合，若对 Ω 中的任意两个元素 x,y，都有一个实数 $\rho(x,y)$ 与之对应，满足：

(1) $\rho(x,y)\geq 0$，且 $\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$；

(2) 成立三角不等式： $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$.

则称 $\rho(x,y)$ 为 x,y 之间的距离，此时称 Ω 按距离 $\rho(x,y)$ 成为度量空间，或称为距离空间.

例如： n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$，在距离

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2\right)^{1/2}$$

下成为度量空间.

定义 1.4 设 Ω 是一个度量空间，$\{x_n\}$ 是 Ω 中的元素列，若对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在自然数 N，使当 $n,m>N$ 时，有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 是 Ω 中的 Cauchy 列.

定义 1.5　如果度量空间 Ω 中的任一 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 都收敛于 Ω 中的一个元素 x_0, 则称 Ω 是完备的.

定义 1.6　完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

例如：空间 $C[a,b]$, $L^p[a,b]$ 和 l^p 分别在 (1.1.4), (1.1.5) 和 (1.1.6) 的范数下是 Banach 空间.

定义 1.7　设 Ω 是一线性空间，G 是一数域，如果对 Ω 中的任何两个元素 x, y, 都有一个数 $\langle x, y\rangle \in G$ 与之对应，且满足：

(1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(2) $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$;

(3) $\langle x, x\rangle \geq 0$,　且 $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 Ω 中的内积，此时称定义了内积的空间 Ω 为内积空间.

对于内积空间 Ω, 定义 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, 则 $\|\cdot\|$ 是一个范数.

定义 1.8　完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

例如：在 $L^2(G)$ 中定义内积为

$$\langle f, g\rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \tag{1.1.10}$$

则 $L^2(G)$ 是一个 Hilbert 空间.

又如，在通常的内积定义下，$\mathbf{R}^n$ 当然是一个 Hilbert 空间，同时也是一个 Banach 空间.

第二节　基

基的概念，读者一般早就有所了解. 例如，通常的向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中的向量组 $\mathbf{e}_1 = \{1,0,0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0,1,0\}$, $\mathbf{e}_3 = \{0,0,1\}$ 就是 $\mathbf{R}^3$ 中的一组基. 实际上，$\mathbf{R}^3$ 中的任一向量 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ 均可由这三个向量线性表示：$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. 反过来，这三个向量的任一线性组合 $y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{y}$ 均表示空间 $\mathbf{R}^3$

中的一个向量 $\mathbf{y}=\{y_1,y_2,y_3\}$. 再者，我们在解线性方程组时得到的基础解向量组就是线性方程组的解空间的一组基.

进一步，易知 $1,x,x^2,x^3,\cdots,x^n$ 这 $n+1$ 个函数就构成了次数不超过 n 次的多项式函数空间的一组基. 实际上，任何一个次数不超过 n 次的多项式函数均可由这 $n+1$ 个函数线性表示；反过来，这 $n+1$ 个函数的任何一个线性组合显然也是一个次数不超过 n 次的多项式函数. 又如

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\cdots$$

这一组三角函数就是周期为 2π 的连续周期函数空间的一组基，这由 Fourier 级数的展式清楚可见.

对于基来说，一般还分正交基和非正交基，正交基又分标准正交基和非标准正交基. 例如，对通常的三维向量空间 $\mathbf{R}^3$，在通常的内积定义下，有 $\mathbf{e}_1\perp\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_2\perp\mathbf{e}_3$ 、 $\mathbf{e}_3\perp\mathbf{e}_1$，即 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 相互垂直，且 $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i=1$，$i=1,2,3$(满足规范化)，此时就称 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 是向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组标准正交基. 如果基只有正交性 (相互垂直)，不一定有规范性 (范数不一定全为 1)，则就称其为正交基. 如上面的三角函数系 $\{\cos nx,\sin nx\}_{n=0}^{+\infty}$ 在内积

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

下就是一组正交基，而非标准正交基；若对其进行规范化成为函数列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots$$

则此函数系就是一组标准正交基.

为了方便和简单，这里我们仅给出一般的 n 维向量空间的几种基的具体定义：

定义 1.9　(1) 若 n 维向量空间 Ω 中的 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 满足：

(a) Ω 中的任何向量 x 可由这 n 个向量线性表示；

(b) 这 n 个向量的任意线性组合均表示 Ω 中的一个向量 x.

则这 n 个向量就称为是 Ω 的一组基 (显然这组向量是线性无关的).

(2) 如果基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 在定义的内积下是两两正交的，即 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, $i \neq j$. 则称此基为 Ω 的正交基.

(3) 如果基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是规范正交的，即

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.2.1}$$

则称此基为 Ω 的标准正交基.

本节最后我们介绍一种无条件基 —— Riesz 基：

定义 1.10　Hilbert 空间 H 中的一个元素序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 称为 H 的一个 Riesz 基，如果它满足：

(1) $H = \overline{\mathrm{span}\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{Z}}}$　(此即由 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 的元素的线性组合生成的空间的闭包);

(2) 存在正数 $A \leq B$, 使对任意数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \in l^2$, 有

$$A\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2 \leq \|\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n\alpha_n\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2 \tag{1.2.2}$$

显然 Riesz 基一般不具有标准正交性，但由它可以构造标准正交基，后面将给出利用 Riesz 基去得到标准正交基的方法.

第三节　其它概念

这一节我们介绍另外几个概念，以便读者后面的学习.

稠密集 设 A, B 均为度量空间 Ω 中的点集，如果 B 中的每个点的任何邻域中均含有 A 的点，则称 A 在 B 中稠密，当 B 是 Ω 时，称 A 是 Ω 的稠密集.

例如：(1) 全体有理数的集合是实数 $\mathbf{R}$ 的稠密集.

(2) 设 $P[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上全体多项式函数的集合，则 $P[a,b]$ 就是 $[a,b]$ 上的全体连续函数空间 $C[a,b]$ 的稠密集.

致密集 设 Ω 是一度量空间，A 是 Ω 中的集，如果 A 中的任何序列必存在 Ω 中收敛的子数列，就称 A 是 Ω 中的致密集，也称列紧集. 若 Ω 自身是致密的，则称 Ω 是致密空间，或列紧空间.

例如：(1) 度量空间中的任何有限点集都是致密集.

(2) 欧几里德空间 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集必是致密集.

紧集 度量空间中的致密闭集称为紧集.

致密的度量空间是完备的，也称为紧空间.

例如：实数空间 $\mathbf{R}$ 中的任何有界闭区间都是 $\mathbf{R}$ 中的紧集.

支集 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的函数，$f(x)$ 的支集定义为

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

例如：
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & |x| < 10 \\ 0, & 10 \leq |x| < 20 \\ -1, & 20 \leq |x| < 30 \\ 0, & |x| \geq 30 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的支集 (也叫支撑) 是

$$\operatorname{supp} f = \{x \in \mathbf{R} : |x| \leq 10, 20 \leq |x| \leq 30\}$$

直交 设 H 是一内积空间，如果 $x, y \in H$，有 $\langle x, y\rangle = 0$，则称 x 与 y 直交，记为 $x \perp y$. 设 M 和 N 是 H 的两个子集，如果

对任何 $x \in M$ 和任何 $y \in N$, 有 $x \perp y$, 则称 M 与 N 直交，记为 $M \perp N$.

直交和　设 H 是一内积空间，M_1, M_2 是 H 的两个线性子空间，如果 $M_1 \perp M_2$, 则 $M = \{x_1 + x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$ 称为 M_1 与 M_2 的直交和，记作 $M = M_1 \oplus M_2$.

例如：设 H 是通常的三维向量空间，定义了通常的内积，则一切向量 $\{0, y, z\}$ 构成的子空间 (即 yoz 平面) 与由 $\{x, 0, 0\}$ 构成的子空间 (即 x 轴) 是直交的，即垂直的. 很显然，若设

$M_1 = \overline{\text{span}\{1,0,0\}}$, 即 x 轴上的一切向量成的子空间；

$M_2 = \overline{\text{span}\{0,1,0\}}$, 即 y 轴上的一切向量成的子空间；

$M_3 = \overline{\text{span}\{0,0,1\}}$, 即 z 轴上的一切向量成的子空间；

$M = \overline{\text{span}\{x,y,0\}}$, 即 xoy 平面上的一切向量成的子空间；

则　$M = M_1 \oplus M_2$, 且 $H = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$.

投影　设 H 是一内积空间，M 是 H 的线性子空间，如果有 $x_0 \in M$ 和 $x_1 \perp M$. 使 $x = x_0 + x_1$, 则称 x_0 是 x 在子空间 M 上的投影.

例如：设 H 是平面上的通常的向量空间，定义了通常的内积，记 M 是 x 轴上的向量子空间，则对于 H 中的任何向量 $\{x, y\}$, $\{x, 0\}$ 就是向量 $\{x, y\}$ 在 M 上的投影.

对于投影，由勾股定理易得如下的结论 (详细证明见文献 [29] 等).

定理 1.1　设 H 是一内积空间，M 是 H 的线性子空间. $x \in H$, 如果 x_0 是 x 在 M 上的投影，则

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\| \tag{1.3.1}$$

且 x_0 是 M 中使 (1.3.1) 式成立的唯一向量.

进一步有如下的投影定理等 (定理的证明详见文献 [29] 等).

定理 1.2　设 M 是内积空间 H 的完备线性子空间，则对任何 $x \in H$, x 在 M 上的投影唯一地存在. 也就是说存在 $x_0 \in M$,