

高等学校教学用书

解析几何学

И. И. 勃立瓦洛夫著

高等教育出版社

51.523

4.13

高等學校教學用書



學 何 幾 析 解

И. И. 勃立瓦洛夫著

蘇 步 青 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的勃立瓦洛夫 (И. И. Привалов) 著“解析幾何學” (Аналитическая геометрия) 1954年修訂後的第十九版譯出的。原書係蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教科書。

本書譯者為復旦大學蘇步青教授。

解 析 几 何 學

И. И. 勃立瓦洛夫著

蘇步青譯

高級教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7號
(北京市書刊出版業營業許可證出字第054號)

上海市印刷四廠印刷 新華書店發行

統一書號 13010·111 開本 850×1168 1/32 印張 9 15/16
字數 238,000 印數 129,001—136,000 定價 (4) 1.10
1956年1月第1版 1959年12月上海第12次印刷

目 錄

第十三版的原著者的序文

出版局的話

緒言.....11

第一部 平面解析幾何學

第一章 坐標法.....13

§ 1. 有向線段.....13

§ 2. 直線上的坐標.....16

§ 3. 直線上的兩點間的距離.....17

§ 4. 平面上的直交坐標.....17

§ 5. 平面上的兩點間的距離.....20

§ 6. 劃分線段為定比.....21

§ 7. 兩軸間的角度.....24

§ 8. 射影論的基本原理.....26

§ 9. 有向線段在坐標軸上的射影.....29

§ 10. 三角形的面積.....31

§ 11. 極線坐標.....33

習題.....36

第二章 曲線及其方程.....39

§ 1. 已知曲線的方程的構成.....39

§ 2. 方程的幾何意義.....40

§ 3. 兩個主要的課題.....43

§ 4. 兩曲線的交點.....43

§ 5. 曲線的參數方程.....44

§ 6. 在極線坐標下的曲線的方程.....45

習題.....47

第三章 直線	49
§ 1. 直線的角係數	49
§ 2. 帶着角係數的直線的方程	50
§ 3. 兩個變數間的一次方程的幾何意義	52
§ 4. 一般的一次方程 $Ax + By + C = 0$ 的研究	54
§ 5. 直線的綫段式方程	55
§ 6. 直線按照其方程的作圖	57
§ 7. 兩直線間的角	57
§ 8. 兩直線的平行條件和垂直條件	59
§ 9. 通過定點且有定方向的直線的方程	60
§ 10. 平面上的兩直線的相互位置	62
§ 11. 直線束的方程	64
§ 12. 通過兩定點的直線的方程	66
§ 13. 三定點要在一直線上的條件	68
§ 14. 直線的法式方程	68
§ 15. 把一般的一次方程化為法式方程	70
§ 16. 從定點到定直線的距離	71
§ 17. 在極線坐標系統下的直線的方程	73
習題	78
第四章 圓錐截線的基本理論	78
§ 1. 預先注意	78
§ 2. 圓	78
§ 3. 橢圓	80
§ 4. 雙曲線和它的漸近線	82
§ 5. 拋物線	86
§ 6. 藉助於圓規和直尺作出橢圓、雙曲線和拋物線的點	87
§ 7. 作為圓錐截線的橢圓、雙曲線和拋物線	89
§ 8. 橢圓的離心率和準線	89
§ 9. 雙曲線的離心率和準線	91
§ 10. 拋物線的離心率和準線	95
§ 11. 在極線坐標下的圓錐截線的方程	94
§ 12. 橢圓的直徑。共軛直徑	96
§ 13. 雙曲線的直徑。共軛直徑	99
§ 14. 拋物線的直徑	101
§ 15. 切線	103
§ 16. 作為圓的射影的橢圓	106
§ 17. 橢圓的參數方程	107

習題	107
第五章 坐標變換。曲線分類	113
§ 1. 坐標變換課題	113
§ 2. 坐標原點的推移	113
§ 3. 坐標軸的旋轉	114
§ 4. 一般情況	116
§ 5. 坐標變換公式的力學解釋	117
§ 6. 坐標變換公式的幾個應用	118
§ 7. 在新軸的方程是已知的場合下, 坐標變換公式的建立	121
§ 8. 曲線的分類	123
習題	125
第六章 二階和三階行列式	127
§ 1. 二階行列式	127
§ 2. 兩個三元方程的齊次組	180
§ 3. 三階行列式	132
§ 4. 三階行列式的主要性質	135
§ 5. 三個三元一次方程組	139
§ 6. 齊次組	141
§ 7. 三個三元一次方程組的一般研究	144
§ 8. 行列式在解析幾何學上的幾個應用	149
習題	151
第七章 一般二次方程的研究	153
§ 1. 二階曲線的一般方程	153
§ 2. 二階曲線的一般方程對於新坐標原點的變換	153
§ 3. 二階曲線的中心	155
§ 4. 二階曲線的方程的化簡	157
§ 5. 決定橢圓類型和雙曲類型的曲線的方程的化簡	160
§ 6. 決定橢圓類型曲線的最簡方程的研究	161
§ 7. 決定雙曲類型曲線的最簡方程的研究	162
§ 8. 決定拋物類型曲線的方程的研究	163
§ 9. 一般二次方程研究的結果	166
§ 10. 二階曲線方程的二不變量	166
§ 11. 有心二階曲線方程的化簡	167
§ 12. 有心二階曲線的最簡方程的研究	171
§ 13. 二階曲線方程的第三不變量	174
§ 14. 有心二階曲線的主徑	175

§ 15. 有心二階曲線的作圖	176
§ 16. 沒有一定中心的二階曲線的方程的研究	177
§ 17. 拋物線的主徑和頂點的決定	181
§ 18. 拋物線的方程的化簡	182
§ 19. 拋物線的作圖	183
習題	184

第二部 空間解析幾何學

第一章 空間的坐標法..... 187

§ 1. 直角坐標	187
§ 2. 基本課題	191
§ 3. 空間射影論的基本原理	194
§ 4. 空間二軸間的角的計算法	196
習題	198

第二章 矢量代數學基礎..... 200

§ 1. 矢量與數量	200
§ 2. 矢量加法	201
§ 3. 矢量減法	204
§ 4. 矢量與數的乘法	205
§ 5. 矢量的射影	206
§ 6. 由射影所給定的矢量的運算	209
§ 7. 矢量的數量積	210
§ 8. 數量積的基本性質	211
§ 9. 由射影所給定的矢量的數量積	213
§ 10. 矢量的方向	214
§ 11. 矢量積	217
§ 12. 矢量積的基本性質	218
§ 13. 由射影所給定的二矢量的矢量積	221
§ 14. 矢量數量的乘積	223
§ 15. 在射影表示下的矢量數量的乘積	226
§ 16. 二重的矢量積	228
習題	231

第三章 方程的幾何意義..... 233

§ 1. 曲面的方程	233
------------------	-----

§ 2. 方程的幾何解釋	234
§ 3. 兩個基本課題	234
§ 4. 球面	235
§ 5. 柱面	236
§ 6. 空間曲線的方程	237
§ 7. 三個曲面的相交	238
習題	238
第四章 平面	239
§ 1. 平面的法式方程	239
§ 2. 三變數間的一次方程的幾何解釋。化一般的一次方程爲法式	241
§ 3. 平面的一般方程的研究	244
§ 4. 平面的線段式方程	246
§ 5. 通過定點的平面的方程	247
§ 6. 通過三個定點的平面的方程	249
§ 7. 二平面間的角	251
§ 8. 二平面的平行和垂直條件	252
§ 9. 三平面的交點	255
§ 10. 點到平面的距離	256
習題	259
第五章 直線	262
§ 1. 直線的方程	262
§ 2. 作爲二平面的交線的直線。直線的一般方程	266
§ 3. 二直線間的角	270
§ 4. 二直線的平行和垂直條件	271
§ 5. 通過二定點的直線的方程	272
§ 6. 直線與平面間的角	273
§ 7. 直線與平面的平行和垂直條件	273
§ 8. 平面束的方程	274
§ 9. 直線與平面的相交	275
§ 10. 二直線要在一直线上的條件	276
習題	279
第六章 柱面和錐面。旋轉曲面。二階曲面	284
§ 1. 曲面的分類	284
§ 2. 柱面(一般情況)	284
§ 3. 錐面	285
§ 4. 旋轉曲面	286

§ 5. 橢圓面	288
§ 6. 單葉雙曲面	289
§ 7. 雙葉雙曲面	291
§ 8. 橢圓式拋物面	292
§ 9. 雙曲式拋物面	293
§ 10. 二階錐面	295
§ 11. 二階柱面	295
§ 12. 二階曲面的母線。B. Γ. 蘇霍夫的構造	296
習題	298

解答

第十三版的原著者的序文

這一次刊行的拙著“解析幾何學”一書，係修改前一版的材料而編成的。許多的高等工業學校教師們在教學過程中，發覺書中好些地方對於學生們的理解頗有困難。著者依據這些意見竭力進行修訂。對於所提的一切意見，著者深切誠懇地表示感謝。特別從米諾爾斯基副教授獲得很寶貴的指示，著者表示衷心的謝意。

伊·勃立瓦洛夫

出版局的話

在編輯本書第 18 版時，曾經考慮到那些在莫斯科數學會高等工科學校部會議上對第 17 版的討論所做的注意事項。由於第 17 版和第 18 版的改版的結果，帶來了如下的(和第 16 版相比較的)一些變更：

(1) 在第一部第一章裏，爲了敘述的高度簡潔性和一貫性起見，建立起有向線段的運算。全書從頭到尾徹底地劃分了“有向線段”與它的“數值”這兩種概念之間的區別。

(2) 第一部裏，在講曲線的研究之前先述“曲線及其方程”一章。同樣地在第二部敘述曲面和曲線等章之前，先講“方程的幾何意義”一章。

(3) 在第一部第三章把帶着角係數的直線的方程提到第一位。

(4) 在第一部第七章第 4 節到第 9 節裏，簡單地敘述二階曲線通論。而把它的更完備的敘述搬移到第 10 節到第 19 節裏並且用小鉛字排印。

(5) 在第二部“平面”和“直線”等章裏，把矢量的敘述提到第一位。

(6) 某些表述和結論更加明確了。

本書的修訂工作是在培養鐵路運輸工程師的莫斯科電工學院高等數學教研室工作人員 Н. Я. 申索葉娃和 Е. Е. 布勒涅夫的密切協力參加下，由 Н. А. 奧里索夫完成的，並且在教研室主任 И. К. 拉舍夫斯基教授的督導下進行的。

在第 19 版僅更正了所注意到的誤刊和不正確的地方。

緒 言

解析幾何學的目標是藉助於代數分析來做幾何形式的研究。在初等數學的不同部門裏，代數學被應用到許多的幾何問題的解決。比方說，在幾何學中不得不用數來確定線段和弧的長度、圖形的面積、物體的體積；在三角法中利用數的比值來確定角度與線段比的關係。可是，儘管在這些數學分科裏關於各種幾何形式的問題是依靠分析解決的，但是在解析幾何裏藉助於數來表徵它的最本質的特性——它的位置。

稱確定幾何形式的位置的數為它的坐標。稱確定幾何形式的位置所用的方法為坐標法。幾何形式的種類很多，而且在建立解析幾何學的時候，自然地要選定其中一個做基礎，藉以形成其他一切形式。比較簡單的是採取幾何的點作為這樣的基礎形式。於是其他一切幾何形式如曲線或曲面可以看做點的幾何軌跡。

拿點做基礎的原素之後，我們首先要表明如何藉助於數來確定空間的點的位置。坐標法的第一觀念是建立在各種幾何課題解答的基礎上的。這方法的第二觀念是成立在如何運用屬於一條曲線的點的坐標來表達曲線的幾何性質的。從坐標法的這些有效的觀念產生了在數學和力學各科上的應用。由於微積分的發展，這些觀念變成數學研究上的最有力的工具。

為敘述解析幾何學的方便起見，劃分全書為兩部。第一部是在坐標應用的基礎上以代數的方法從事於平面幾何形式的研究。第二部是用同樣的方法討論空間的幾何形式。

為輔助講義內容，設置一章，專敘二階和三階行列式的理論。這一章和其他附錄一樣，可以刪去。

爲了更多的幾何明顯性,把空間的平面和直線的最初的方程寫成矢量方式。在末章相應地敘述矢量代數的必要知識。但是,考慮到在那些不用矢量代數進行講授解析幾何學的高等工科學校的需要,我們並用平面論和直線論的矢量方式的和坐標方式的敘述。

第一部、平面解析幾何學

第一章 坐標法

§1. 有向線段 線段和它的長度是在初等幾何學裏所週知的。線段是由兩點所局限的直線的部分。線段的長度是藉助於某一個預先選定的線段——比例尺的單位測量這線段時所得到的正數。用 AB 或 BA 表示由點 A 和 B 所局限的線段，同樣也表示它的長度。

在數學和物理學的許多問題中，線段的方向有其意義：比方說，如果把線段看作爲動點所通過的道路的話。

爲了表徵線段的方向，拿局限它的兩點中之一做起點而另一點做它的終點；把從起點到終點的方向看做線段的方向。在一線段上必須談到方向（即談到兩個端點中的那一個是起點而且那一個是終點）的時候，稱這線段爲有向線段。

我們規定把表明線段的起點的那一個字母排在首位而用兩字母上加一橫來記有向線段。比方，點 A 是線段的起點，而 B 是終點，用 $\overline{AB}$ 來記這有向線段。必須指出，有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 由於它們的方向相反，是不同的。

如果考察配置在一直線上的有向線段，那末可用符號 $+$ 或 $-$ 表徵它們的方向。爲此稱這直線的兩個相反方向中之一（不分彼此）爲正方向，而稱其他一個爲負方向。在圖上，規定用箭頭表示正方向（在圖 1 上，把從左到右的方向當作正的）。凡在上面選定了正向的直線叫做軸。

配置在軸上的有向線段的長度帶着一定的符號時，稱它爲軸的有向線段的數值；同時，如果線段的方向合於軸的正向，那末就拿正號；如



圖 1

果線段的方向和軸的正向相反，那末就拿負號^①。比方說，在圖 1 上所表明的有向線段 $\overline{AC}$ 的數值是正的，而線段 $\overline{CB}$ 的數值是負的。顯然，有向線段的長度等於它的數值的模^②。規定用 AB 表示有向線段 $\overline{AB}$ 的長度，而用值 $\overline{AB}$ 表示它的數值。

從軸的有向線段的數值的定義得出線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的數值相差一個符號：

$$\text{值 } \overline{AB} = -\text{值 } \overline{BA}.$$

注意 以後我們還必須考察這樣的有向“線段”，它的起點和終點一致。這線段的方向可以任意選定。因而，它的長度和數值都等於零。我們將稱這樣的線段為零線段。

在某軸上拿三點 A, B, C 並解釋有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的數值之和要等於什麼。我們此刻要證明，在軸上三點 A, B 和 C 的任何配置下，有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的數值之和一定等於有向線段 $\overline{AC}$ 的數值：

$$\text{值 } \overline{AB} + \text{值 } \overline{BC} = \text{值 } \overline{AC}, \quad (1)$$

就是，對於配置在軸上的有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ ，其中第一個的終點是第二個的起點，它們的數值之和等於有向線段 $\overline{AC}$ 的數值，它的起點是第一個有向線段的起點而它的終點是第二個的終點。

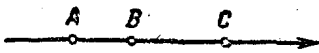


圖 2

為證明等式(1)，首先假定 B 點落在二點 A 和 C 之間(圖 2)。

把有向線段看做動點所畫成的道路，我們可以這樣說：在這場合，畫成道路 $\overline{AB}$ 的動點在同一方向下，沿道路 $\overline{BC}$ 繼續運動。於是顯而易見，線段 $\overline{AC}$ 的長度等於線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的長度之和，而且因為三線段

^① 術語“軸的有向線段的數值”僅在所考察的有向線段都在軸上的場合有通用的意義。但是，以後簡便上將談到有向線段的數值，而略去“軸”字。同樣地，我們簡便上將要說“線段 $\overline{AB}$ ”來代替“有向線段 $\overline{AB}$ ”。

^② 數的絕對值也叫做它的模；將用 $|a|$ 表示數 a 的模。

全部有同一方向，這三有向線段的數值都有同一符號。因而，

$$\text{值 } \overline{AB} + \text{值 } \overline{BC} = \text{值 } \overline{AC}.$$

這樣一來，如果 B 點在線段 $\overline{AC}$ 上，那末等式(1)成立。

現在假定 B 點在線段 $\overline{AC}$ 的外部，或者在往 C 點外的延長線段上(圖3)，或者在往 A 點外的延長線段上(圖4)。

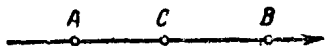


圖 3

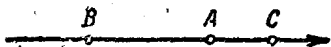


圖 4

在任何一個場合下，畫成道路 $\overline{AB}$ 的動點在反對的方向下，沿道路 $\overline{BC}$ 繼續運動。很明顯，現在線段 $\overline{AC}$ 的長度等於其他二線段的長度之差($AC = AB - BC$ —圖3，或者 $AC = BC - AB$ —圖4)。

顯而易見，線段 $\overline{AC}$ 的方向將合於二線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 中有較大的長度的一個的方向(在圖3上，合於線段 $\overline{AB}$ 的方向或者在圖4上，合於線段 $\overline{BC}$ 的方向)。所以線段 $\overline{AC}$ 的數值與較長的線段的數值有同一符號。

因而，有向線段 $\overline{AC}$ 的數值是可以按照有關的二數值 $\overline{AB}$ 和值 $\overline{BC}$ 的加法求得的。

這樣一來，即在線段 $\overline{AC}$ 的外部的 B 點的任何配置下，也成立：

$$\text{值 } \overline{AB} + \text{值 } \overline{BC} = \text{值 } \overline{AC}.$$

剩下必須指出，在幾個點一致的場合下，等式(1)也成立。讀者容易作出這證明。例如，假使二點 A 和 C 一致的話，那末

$$\text{值 } \overline{AB} + \text{值 } \overline{BC} = \text{值 } \overline{AB} + \text{值 } \overline{BA} = 0,$$

可是值 $\overline{AC}$ 也等於零。因而，等式(1)成立。

注意 假如在等式(1)裏所論的不是有向線段的數值而是長度的話，那末它只在 B 點在線段 $\overline{AC}$ 上的場合才能成立，而對於 B 點的其他任何配置將不生效。

利用等式(1),容易證明:對於任何個的點 $A, B_1, B_2, \dots, B_n, C$ 和它們在軸上的任何配置一定成立

$$\text{值 } \overline{AB_1} + \text{值 } \overline{B_1B_2} + \dots + \text{值 } \overline{B_nC} = \text{值 } \overline{AC}, \quad (1')$$

就是,對於一些有向線段,下一個線段的起點合於前一個的終點時,它們的數值之和等於這樣的有向線段的數值,它的起點合於第一個有向線段的起點,而終點合於最後一個的終點。

§2. 直線上的坐標 我們要看怎樣能夠確定直線上的點的位置。

在這直線上拿任何一點 O (從拉丁文 *origo*——原點),關於它將確定直線的所有點的位置。顯然,直線的任何點 P 的位置應當完全地決定於有向線段 $\overline{OP}$: 直線的每點對應於一定的有向線段,它的起點是 O 點而且終點是所考察的點 P , 並且反過來,起點在 O 點的每個有向線段對應於直線的一點 P ——這線段的終點。

現在在直線上確立正方向並選定比例尺的單位 m (在圖5上已選定從左到右做正方向)。於是直線的

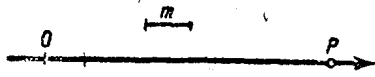


圖 5

任何一點 P 的位置可以確定一個數——有向線段 $\overline{OP}$ 的數值。稱這個確

定點的位置的數為它的坐標。這樣,有向線段 $\overline{OP}$ 的數值是直線的 P 點的坐標。用字母 x 來記 P 點的坐標,便得到:

$$x = \text{值 } \overline{OP}.$$

知道 P 點,就容易求它的坐標:它等於有向線段 $\overline{OP}$ 的數值。反過來,按照已知的坐標 x 可以作唯一的點:它是有向線段 $\overline{OP}$ 的終點,而它的數值等於 x 。

如果在直線上指定某一點 O , 確立正方向而且此外選定比例尺的單位,那末我們說,在直線上建立了坐標系統。 O 點是所論的有向線段的起點,稱它為坐標的原點,而稱定直線為坐標軸。坐標的原點分割坐標軸為兩部分:從 O 點向正方向發出的半直線叫做正半軸,從 O 點向反對方向發出的半直線叫做負半軸。很明顯,正半軸的點有正坐標(在