高等学校教学用書

解析幾何学

И. И. 勃立瓦洛夫著

高等教育出版社

高等學校教學用書

解析幾何學

И. И. 勃立瓦洛夫著
蘇步青譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的勃立瓦洛夫（И. И. Привалов）著“解析幾何學”（Аналитическая геометрия）1954年修訂後的第十九版譯出的。原書係蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教科書。

本書譯者爲復旦大學蘇步青教授。

解析几何学

И. И. 勃立瓦洛夫著

苏步青譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

上海市印刷四厂印刷 · 新华书店发行

統一书号 13010·111　开本 850×1168 1/32　印張 9 15/16

字数 288,000　印数 129,001—136,000　定价（4）¥1.10

1956年1月第1版　1959年12月上海第12次印刷

目　錄

第二部 空間解析幾何學

第十三版的原著者的序文

這一次刊行的拙著"解析幾何學"一書，係修改前一版的材料而編成的。許多的高等工業學校教師們在教學過程中，發覺書中好些地方對於學生們的理解頗有困難。著者依據這些意見竭力進行修訂。對於所提的一切意見，著者深切誠懇地表示感謝。特別從米諾爾斯基副教授獲得很寶貴的指示，著者表示衷心的謝意。

伊・勃立瓦洛夫

出版局的話

在編輯本書第 18 版時，曾經考慮到那些在莫斯科數學會高等工科學校部會議上對第 17 版的討論所做的注意事項。由於第 17 版和第 18 版的改版的結果，帶來了如下的(和第 16 版相比較的)一些變更：

(1)在第一部第一章裏，爲了敍述的高度簡潔性和一貫性起見，建立起有向線段的運算。全書從頭到尾徹底地劃分了"有向線段"與它的"數值"這兩種概念之間的區别。

(2)第一部裏，在講曲線的研究之前先述"曲線及其方程"一章。同樣地在第二部敍述曲面和曲線等章之前，先講"方程的幾何意義"一章。

(3)在第一部第三章把帶着角係數的直線的方程提到第一位。

(4)在第一部第七章第 4 節到第 9 節裏，簡單地敍述二階曲線通論。而把它的更完備的敍述搬移到第 10 節到第 19 節裏並且用小鉛字排印。

(5)在第二部"平面"和"直線"等章裏，把矢量的敍述提到第一位。

(6)某些表述和結論更加明確了。

本書的修訂工作是在培養鐵路運輸工程師的莫斯科電工學院高等數學教研室工作人員 H. Я. 申索葉娃和 E. E. 布勒涅夫的密切協力參加下，由 H. A. 奧里索夫完成的，並且在教研室主任 П. К. 拉舍夫斯基教授的督導下進行的。

在第 19 版僅更正了所注意到的誤刊和不正確的地方。

緒言

解析幾何學的目標是藉助於代數分析來做幾何形式的研究。在初等數學的不同部門裏，代數學被應用到許多的幾何問題的解決。比方說，在幾何學中不得不用數來確定線段和弧的長度、圖形的面積、物體的體積；在三角法中利用數的比值來確定角度與線段比的關係。可是，儘管在這些數學分科裏關於各種幾何形式的問題是依靠分析解決的，但是在解析幾何裏藉助於數來表徵它的最本質的特性——它的位置。

稱確定幾何形式的位置的數爲它的坐標。稱確定幾何形式的位置所用的方法爲坐標法。幾何形式的種類很多，而且在建立解析幾何學的時候，自然地要選定其中一個做基礎，藉以形成其他一切形式。比較簡單的是採取幾何的點作爲這樣的基礎形式。於是其他一切幾何形式如曲線或曲面可以看做點的幾何軌跡。

拿點做基礎的原素之後，我們首先要表明如何藉助於數來確定空間的點的位置。坐標法的第一觀念是建立在各種幾何課題解答的基礎上的。這方法的第二觀念是成立在如何運用屬於一條曲線的點的坐標來表達曲線的幾何性質的。從坐標法的這些有效的觀念產生了在數學和力學各科上的應用。由於微積分的發展，這些觀念變成數學研究上的最有力的工具。

爲敍述解析幾何學的方便起見，劃分全書爲兩部。第一部是在坐標應用的基礎上以代數的方法從事於平面幾何形式的研究。第二部是用同樣的方法討論空間的幾何形式。

爲輔助講義內容，設置一章，專敍二階和三階行列式的理論。這一章和其他附錄一樣，可以删去。

為了更多的幾何明顯性，把空間的平面和直線的最初的方程寫成矢量方式。在末章相應地敍述矢量代數的必要知識。但是，考慮到在那些不用矢量代數進行講授解析幾何學的高等工科學校的需要，我們並用平面論和直線論的矢量方式的和坐標方式的敍述。

第一部、平面解析幾何學

第一章 坐標法

§1. 有向線段 線段和它的長度是在初等幾何學裏所週知的。線段是由兩點所局限的直線的部分。線段的長度是藉助於某一個預先選定的線段——比例尺的單位測量這線段時所得到的正數。用 AB 或 BA 表示由點 A 和 B 所局限的線段，同樣也表示它的長度。

在數學和物理學的許多問題中，線段的方向有其意義：比方說，如果把線段看作爲動點所通過的道路的話。

爲了表徵線段的方向，拿局限它的兩點中之一做起點而另一點做它的終點；把從起點到終點的方向看做線段的方向。在一線段上必須談到方向(即談到兩個端點中的那一個是起點而且那一個是終點)的時候，稱這線段爲有向線段。

我們規定把表明線段的起點的那一個字母排在首位而用兩字母上加一橫來記有向線段。比方，點 A 是線段的起點，而 B 是終點，用 $\overline{AB}$ 來記這有向線段。必須指出，有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 由於它們的方向相反，是不同的。

如果考察配置在一直線上的有向線段，那末可用符號 + 或 − 表徵它們的方向。爲此稱這直線的兩個相反方向中之一(不分彼此)爲正方向，而稱其他一個爲負方向。在圖上，規定用箭頭表示正方向(在圖 1 上，把從左到右的方向當作正的)。凡在上面選定了正向的直線叫做軸。

配置在軸上的有向線段的長度帶着一定的符號時，稱它爲軸的有向線段的數值；同時，如果線段的方向合於軸的正向，那末就拿正號；如

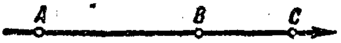

圖 1

果線段的方向和軸的正向相反，那末就拿負號[1]。比方說，在圖1上所表明的有向線段 $\overline{AC}$ 的數值是正的，而線段 $\overline{CB}$ 的數值是負的。顯然，有向線段的長度等於它的數值的模[2]。規定用 AB 表示有向線段 $\overline{AB}$ 的長度，而用值 $\overline{AB}$ 表示它的數值。

從軸的有向線段的數值的定義得出線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的數值相差一個符號：

$$值\ \overline{AB} = -值\ \overline{BA}。$$

注意　以後我們還必須考察這樣的有向"線段"，它的起點和終點一致。這線段的方向可以任意選定。因而，它的長度和數值都等於零。我們將稱這樣的線段爲零線段。

在某軸上拿三點 A, B, C 並解釋有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的數值之和要等於什麼。我們此刻要證明，在軸上三點 A, B 和 C 的任何配置下，有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的數值之和一定等於有向線段 $\overline{AC}$ 的數值：

$$值\ \overline{AB} + 值\ \overline{BC} = 值\ \overline{AC}, \tag{1}$$

就是，對於配置在軸上的有向線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$，其中第一個的終點是第二個的起點，它們的數值之和等於有向線段 $\overline{AC}$ 的數值，它的起點是第一個有向線段的起點而它的終點是第二個的終點。

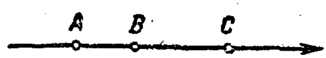

圖 2

爲證明等式(1)，首先假定 B 點落在二點 A 和 C 之間(圖 2)。

把有向線段看做動點所畫成的道路，我們可以這樣說：在這場合，畫成道路 $\overline{AB}$ 的動點在同一方向下，沿道路 $\overline{BC}$ 繼續運動。於是顯而易見，線段 $\overline{AC}$ 的長度等於線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的長度之和，而且因爲三線段

---

[1] 術語"軸的有向線段的數值"僅在所考察的有向線段都在軸上的場合有適用的意義。但是，以後簡便上將談到有向線段的數值，而略去"軸"字。同樣地，我們簡便上常要說"線段 $\overline{AB}$"來代替"有向線段 $\overline{AB}$"。

[2] 數的絕對值也叫做它的模；將用 $|a|$ 表示數 a 的模。

全部有同一方向，這三有向線段的數值都有同一符號。因而，

$$值\ \overline{AB}+值\ \overline{BC}=值\ \overline{AC}。$$

這樣一來，如果 B 點在線段 $\overline{AC}$ 上，那末等式(1)成立。

現在假定 B 點在線段 $\overline{AC}$ 的外部，或者在往 C 點外的延長線段上(圖3)，或者在往 A 點外的延長線段上(圖4)。

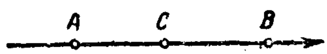

圖 3

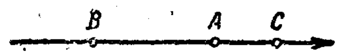

圖 4

在任何一個場合下，畫成道路 $\overline{AB}$ 的動點在反對的方向下，沿道路 $\overline{BC}$ 繼續運動。很明顯，現在線段 $\overline{AC}$ 的長度等於其他二線段的長度之差($AC=AB-BC$—圖3，或者 $AC=BC-AB$—圖4)。

顯而易見，線段 $\overline{AC}$ 的方向將合於二線段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 中有較大的長度的一個的方向(在圖3上，合於線段 $\overline{AB}$ 的方向或者在圖4上，合於線段 $\overline{BC}$ 的方向)。所以線段 $\overline{AC}$ 的數值與較長的線段的數值有同一符號。

因而，有向線段 $\overline{AC}$ 的數值是可以按照有關的二數值 $\overline{AB}$ 和值 $\overline{BC}$ 的加法求得的。

這樣一來，即在線段 $\overline{AC}$ 的外部的 B 點的任何配置下，也成立：

$$值\ \overline{AB}+值\ \overline{BC}=值\ \overline{AC}。$$

剩下來必須指出，在幾個點一致的場合下，等式(1)也成立。讀者容易作出這證明。例如，假使二點 A 和 C 一致的話，那末

$$值\ \overline{AB}+值\ \overline{BC}=值\ \overline{AB}+值\ \overline{BA}=0,$$

可是值 $\overline{AC}$ 也等於零。因而，等式(1)成立。

注意　假如在等式(1)裏所論的不是有向線段的數值而是長度的話，那末它只在 B 點在線段 $\overline{AC}$ 上的場合才能成立，而對於 B 點的其他任何配置將不生效。

利用等式(1),容易證明:對於任何個的點 $A, B_1, B_2, \cdots, B_n, C$ 和它們在軸上的任何配置一定成立

$$\text{值}\ \overline{AB_1}+\text{值}\ \overline{B_1B_2}+\cdots+\text{值}\ \overline{B_nC}=\text{值}\ \overline{AC}, \tag{1'}$$

就是,對於一些有向線段,下一個線段的起點合於前一個的終點時,它們的數值之和等於這樣的有向線段的數值,它的起點合於第一個有向線段的起點,而終點合於最後一個的終點。

§2. **直線上的坐標** 我們要看怎樣能夠確定直線上的點的位置。在這直線上拿任何一點 O(從拉丁文 origo——原點),關於它將確定直線的所有點的位置。顯然,直線的任何點 P 的位置應當完全地決定於有向線段 $\overline{OP}$: 直線的每點對應於一定的有向線段,它的起點是 O 點而且終點是所考察的點 P, 並且反過來,起點在 O 點的每個有向線段對應於直線的一點 P——這線段的終點。

現在在直線上確立正方向並選定比例尺的單位 m(在圖 5 上已選定從左到右做正方向)。於是直線的任何一點 P 的位置可以確定一個數——有向線段 $\overline{OP}$ 的數值。稱這個確定點的位置的數為它的坐標。這樣,有向線段 $\overline{OP}$ 的數值是直線的 P 點的坐標。用字母 x 來記 P 點的坐標,便得到:

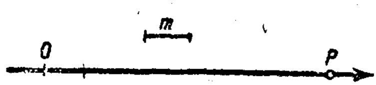

圖 5

$$x=\text{值}\ \overline{OP}。$$

知道 P 點,就容易求它的坐標:它等於有向線段 $\overline{OP}$ 的數值。反過來,按照已知的坐標 x 可以作唯一的點:它是有向線段 $\overline{OP}$ 的終點,而它的數值等於 x。

如果在直線上指定某一點 O, 確立正方向而且此外選定比例尺的單位,那末我們說,在直線上建立了坐標系統。O 點是所論的有向線段的起點,稱它為坐標的原點,而稱定直線為坐標軸。坐標的原點分劃坐標軸為兩部分:從 O 點向正方向發出的半直線叫做正半軸,從 O 點向反對方向發出的半直線叫做負半軸。很明顯,正半軸的點有正坐標(在