…学导学丛书
丛书主编 梅顺治 王艮远 杨永根

高等数学方法与应用

梅顺治 刘富贵 主编

问题答疑
范例分析
应用举例
数学实验

科学出版社

内 容 简 介

本书为《大学数学导学丛书》之一，具有丛书的共同特点，即重视数学方法与应用，突出数学模型，设置数学实验．按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)的基本内容，全书共分为十二章，每章由学习要求与解题要点、问题与答疑、解题范例、应用举例、数学实验、训练与自测等部分组成，书末附有训练题与自测题参考答案。

本书富有新意和创造性，可作为高等数学习题课教材和数学课程教学改革试验的补充教材，也可作为读者学习、复习和考研的辅导书和参考书。

大学数学导学丛书

高等数学·方法与应用

梅顺治 刘富贵 主编

许桂水 杨乾尧 副主编

责任编辑 王 军

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

武汉大学出版社印刷总厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年8月第一版 开本:850×1168 1/32

2000年8月第一次印刷 印张:12 3/4

印数:1~8000 字数:332 000

ISBN 7-03-008774-7/G·1025

定价:16.80元

《大学数学导学丛书》编委会

前　　言

21 世纪，科学技术飞速发展，经济竞争日益激烈，对技术、人才提出了更高的要求. 数学的作用十分重要，这已成共识. 大学非理科专业数学课程教学，不再仅仅是学习基础数学知识，为其他学科提供工具，更重要的是传授数学思想，培养学生的创新意识，提高学生的数学素养、数学思维能力和应用数学的能力.

在大学数学教育改革深入开展的同时，也必须看到，由于数学课程教学是一个连续系统，具有一定的稳定性，加上数学学科本身的特点，许多高等学校的基础数学课程如高等数学、线性代数、概率统计等教学仍使用较传统的教材. 这种形势，促使我们编写一套既能配合以上三门基础数学课程教学，又能反映数学教学改革的教学用书——《大学数学导学丛书》(暂定为 3 本)，丛书主编为梅顺治、王艮远、杨永根. 这套丛书可以作为大学数学习题课教材、读者学习和复习的辅导书，还可以作为教师在课程教学改革试验中的补充教材. 总之，这套参考书是有一些新意的.

这套丛书具有以下特点：

1. 重视数学思想方法的训练，注重演绎、归纳数学素质的训练，通过典型问题和例题的解答及相应习题的训练，培养学生数学思维的能力和运用数学知识的能力.

2. 突出数学模型的思想，培养读者将实际问题转化为数学问题，并用数学知识加以解决的应用数学能力. 书中结合教学进程，适当地介绍了数学在实际问题中应用的一些例子，这些例子不仅可提高读者学数学的兴趣，而且对训练学生的数学建模能力有很大帮助.

3. 设置了数学实验，注重数学课程教学与计算机及数学软件的应用相结合，指导读者在学数学的同时学习数学软件，且通过使用数学软件上机实验来帮助学生学好数学. 这样，既可提高兴趣，

又可培养读者应用计算机解决问题的能力.

4. 在例题和训练题的配置上，除基本题用于巩固基础知识和基本技能外，还安排了一部分提高题，选编了近几年考研的题，使学生扩大视野，熟练技巧，提高综合能力.因此本套丛书还适合于考研复习.

《高等数学·方法与运用》是这套《大学数学导学丛书》之一，它按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)的基本内容分章，共十二章，每章由以下部分组成：

1. 学习要求与解题要点.是每一章的基本概念、理论、方法的归纳，在学习或复习中，起到提纲挈领的作用.

2. 问题与答疑.提出若干疑难问题并给予解答，帮助读者正确理解概念、理论与方法.思考问题是一种很好的学习方法.

3. 解题范例.给出若干基本、典型、综合例题的解法.有些例题解前有“分析”，解后有“注”，对这些内容，读者应足够重视.模仿只是学习的初级阶段，重要的是提高独自解题的能力.

4. 应用举例.结合该章学习内容，给出一两例数学在实际问题中应用的例子.

5. 数学实验.给出本章若干问题的 Mathematica 命令、程序及运行结果，供上机实习用.

6. 训练与自测.训练题分 A、B 两组，B 组为提高题.自测题用于自我检测，及时了解自己的水平，利于明确努力的方向.

书末附有训练题、自测题的参考答案.

本书由梅顺治、刘富贵任主编，许桂水、杨乾尧任副主编，参加编写的有孙晓梅，李宇光，童仕宽，王伟沧，王仲君，张小璇，李义年.本书凝聚了编者多年的教学实践经验和教学研究成果，希望本书的出版对数学教学、教材改革的发展能起到抛砖引玉的作用.

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免有不足与错误之处，恳请同行、专家、读者批评指正.

编者

2000 年 6 月

目　录

第一章　函数与极限

高等数学或者说微积分学所研究的对象是函数.函数与极限中众多概念是这门基础学科中最基础、最基本的概念,极限的计算是高等数学中最基本的运算之一,掌握好这些内容就为这门课程的学习提供了良好的开端.万丈高楼平地起,从第一章开始就应认真对待每一个概念、方法、结论、问题,勤于思考,勤于练习,弄清内容实质.

1.1　学习要求与解题要点

1.1.1　学习要求

1. 理解函数的概念,了解函数的奇偶性、单调性、周期性及有界性,熟悉基本初等函数的性质与图形.

2. 了解反函数、复合函数、初等函数及分段函数的概念.

3. 理解数列与一元函数极限概念,掌握极限的唯一性、有界性及保号性定理,掌握并能熟练运用极限存在的充要条件、极限存在的准则.

4. 了解极限的“ϵ-N”,“ε-δ”定义,逐步加深对极限思想的理解.

5. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较、无穷小与函数极限的关系.

6. 熟练掌握极限计算的各种方法,掌握两个重要极限及其应用.

7. 理解函数在一点连续,在区间上连续的概念,会判断间断点的类型.

8. 掌握闭区间上连续函数的性质,并会正确应用它们求解有

关问题.

1.1.2 解题要点

本章解题主要问题是关于极限的计算和逻辑推理.因函数连续的概念是利用极限的思想、方法引入的,所以有关函数连续的问题往往归结为极限问题.求极限的基本方法如下:

1. 熟悉常见函数、数列的极限(包括无穷大情形),运用四则运算法则和复合函数求极限法则.应注意这些法则的适用条件,如:

(1) 四则运算法则中参与运算的函数的极限必须存在,分母中函数极限不为零.常常应用初等变形方法消去分母为无穷小的的因子.

(2) 复合函数求极限法则,必须满足当 $x\to x_0$ 时 $\varphi(x)\to u_0$,当 $u\to u_0$ 时 $f(u)\to A$,且 $x\neq x_0$ 时 $\varphi(x)\neq u_0$;或者 $f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续.

2. 应用函数(或数列)极限存在的充要条件:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 当且仅当 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 均存在,且 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.求所谓分段函数的极限则需分别计算左、右极限,即 $f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$.

3. 利用两个重要极限,对 $f(x)$ 进行初等变形,化为重要极限的"形式".

4. 应用两个极限存在准则,进行极限计算和论证:

(1) 应用夹逼准则时,要点是将 $f(x)$ 或 x_n 适当放大与缩小,构造夹逼"形式",然后求得极限.

(2) 使用单调有界准则时,通常先设法证明 x_n 单调、有界,再设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,然后利用递推关系求解出 a.

5. 利用有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小这一定理计算不适合四则运算的极限问题.

6. 灵活应用等价无穷小代换,使求极限问题简化、明了.对"$\frac{0}{0}$"、"1^{∞}"这些不定型的极限问题,适合于用等价无穷小代换.

注 $\dfrac{\text{“}0\text{”}}{0}$是指当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$，$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限问题($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$)。

“1^∞”是指当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，$[f(x)]^{\frac{1}{g(x)}}$的极限问题.

关于函数连续性、间断点问题.函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，由定义知必须同时具备下列 3 个条件：

(1) $f(x)$在点 x_0 处有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；或 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$存在，且 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；或 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$. 否则(以上三个条件至少有一个不成立)，x_0 为函数 $f(x)$的间断点.

若 x_0 是 $f(x)$的间断点，则当 $f(x_0-0)$和 $f(x_0+0)$均存在时，x_0 为第一类间断点，如 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，则 x_0 为可去间断点；如 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则 x_0 为跳跃间断点. 当 $f(x_0-0)$和 $f(x_0+0)$至少有一个不存在时，则 x_0 为第二类间断点，第二类间断点中有无穷大型、振荡型及其他类型.

分段函数的连续性、间断点及间断点类型的判别，通常讨论分段点情况.

闭区间上连续函数性质的应用问题，往往比较困难，求解这类问题能训练我们的创造思维能力和灵活运用能力，其解题要点是构造辅助函数，将问题转化为函数的介值性或零点存在性问题.

1.2 问题与答疑

1.2.1 单调函数必有反函数，不单调的函数是否一定没有反函数？

答 否，一个函数是否存在反函数取决于它的对应规则，f 在定义域 D 与值域 V 之间是否构成一一对应. 若是，则必存在单值反函数；若不是，则不存在单值反函数.

单调性只是存在单值反函数的充分条件，而非必要条件. 例如：

$$f(x)=\begin{cases}x,\ x\text{ 为有理数}\\ -x,\ x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在$(-\infty,\infty)$中不是单调函数，但它有单值反函数，这个反函数就是 $f^{-1}(x)=f(x),x\in(-\infty,\infty)$.

1.2.2 *“周期函数都具有最小正周期”，这种说法正确吗？*

答 这种说法不正确. 例如 Dirichlet 函数

$$f(x)=\begin{cases}1,x\text{ 为有理数}\\ 0,x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是$(-\infty,\infty)$上的周期函数. 实际上，若 d 为有理数，则由 $f(x+d)=f(x),x\in(-\infty,\infty)$知 d 是 $f(x)$的一个周期. 由于正有理数中并无最小者，因此 Dirichlet 函数没有最小正周期.

对于教材上的提法“通常我们说周期函数的周期是指最小正周期”①，作者的理解是，本课程所涉及到的绝大多数周期函数具有最小正周期.

1.2.3 *所谓分段函数一定是要用几个式子表示的函数吗？分段函数一定不是初等函数吗？*

答 否. 例如所谓分段函数

$$g(x)=\begin{cases}1,\ x<a\\ 0,\ x>a\end{cases}$$

则 $g(x)$可表为

$$g(x)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\sqrt{(x-a)^2}}{x-a}\right]$$

$g(x)$是初等函数，且可以用一个式子表示. 又例如 Dirichlet 函数

$$f(x)=\begin{cases}1,\ x\text{ 为有理数}\\ 0,\ x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是所谓分段函数，不是初等函数，但它可以用一个式子表示，即

① 同济大学数学教研室主编，高等数学（第四版），上册，高等教育出版社，p13.

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\ x)\}$$

1.2.4 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，是否可以说“x_n 越来越接近于 a”？

答 这种说法不正确. $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 应当理解为：当 n 越来越大时，x_n 越来越无限接近于 a，并不是 x_{n+1} 比 x_n 更接近于 a. 例如，$x_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$，$\lim_{n\to\infty}x_n=0$，但，$|x_{2m-1}-0|=\frac{1}{2m-1}$，$|x_{2m}-0|=\frac{3}{2m}$，则 $|x_{2m}-0|>|x_{2m-1}-0|$，表明 x_{2m} 不比 x_{2m-1} 更接近于 0.

1.2.5 数列极限定义中的 N 是不是 ε 的函数？

答 不是. 数列极限定义中的 N 与 ε 有关，并不表示 N 是 ε 的函数. 例如

$$x_n=\frac{n+(-1)^n}{n},n=1,2,\cdots$$

则 $\lim_{n\to\infty}x_n=1$. 对任意 $\varepsilon>0$，可以取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+2$，…，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-1|<\varepsilon$. 即，对任意正数 ε，并没有确定 N 和它对应，所以，N 不是 ε 的函数.

1.2.6 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+2x_n$，$n=1,2,\cdots$，令 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_{n+1}=1+2x_n$ 两边取极限，得 $a=1+2a$，于是 $a=-1$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n=-1$. 上述解法是否正确？

答 不正确. 因为 $x_n\geqslant1$，$n=1,2,\cdots$，即使数列 $\{x_n\}$ 收敛，极限也不可能为负数！错在什么地方，错在“令 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$”. 事实上，$x_n=2^n-1$，$n=1,2,\cdots$，$\{x_n\}$ 不收敛. 只有当 $\{x_n\}$ 收敛时，才能令 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 或记 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，否则，可能导出完全错误的结果.

1.2.7 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，$\{y_n\}$ 发散，那么数列 $\{x_ny_n\}$ 一定发散吗？

答 不一定. 例如：$x_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$；$y_n=(-1)^n$，$n=1,2,\cdots$. 显然，$\{x_n\}$ 收敛于 0，$\{y_n\}$ 发散. 但 $x_ny_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，$\{x_ny_n\}$ 收敛于 0. 又例如：$x_n=\frac{n+1}{n}$，$n=1,2,\cdots$；$y_n=(-1)^n$，n

$=1,2,\cdots$. 显然，$\{x_n\}$收敛于 1，$\{y_n\}$发散. 而 $x_ny_n=(-1)^n\frac{n+1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，$\{x_ny_n\}$是发散的.

一般地，有以下命题：如果$\{x_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq 0$，$\{y_n\}$发散，则$\{x_ny_n\}$一定发散.

1.2.8 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 (a,b) 内无界，那么函数 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 内也一定无界吗？

答 不一定. 例如，设 $f(x)=\tan x$，$g(x)=\cot x$，它们都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无界，但是 $f(x)g(x)=1$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 却是有界的. 又例如：设 $f(x)=\tan x$，$g(x)=\csc x$，则它们都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无界，这时 $f(x)g(x)=\sec x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内仍然是无界的.

1.2.9 设 α 和 β 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，那么这两个无穷小一定能比较吗？

答 不一定. 例如，当 $x\to 0$ 时，x 与 $x\sin\frac{1}{x}$ 都是无穷小，但是，由于当 $x\to 0$ 时，$\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$ 极限不存在，所以这两个无穷小不能比较.

1.2.10 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，那么一定有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$ 吗？

答 不一定. 例如，设 $\varphi(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$，$f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，则有 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$. 但是，复合函数

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}1, x\neq 0, \frac{1}{n\pi}(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)\\ 0, x=\frac{1}{n\pi}(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)\end{cases}$$

当 $x=\frac{1}{n\pi}\to 0(n\to\infty)$ 时，$f[\varphi(x)]\to 0$；而当 $x=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$

时，$f[\varphi(x)]\to 1$. 因此，当 $x\to 0$ 时，$f[\varphi(x)]$的极限不存在.

如果加上"当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x)\neq u_0$"这一条件，则结论成立. 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且当 $x\neq x_0$ 时 $\varphi(x)\neq u_0$，又 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A.$$

1.2.11 若 $f(x)$在$[a,b]$上有定义，$x_0\in(a,b)$，$f(x)$在 x_0 处连续，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0,\delta)$，使 $f(x)$在该邻域内亦连续，这一说法正确吗？

答 不正确. 举例如下：我们知道，若 x 为任一非零的有理数，则存在整数 m,n，使$(m,n)=1$，且 $x=\frac{m}{n}$. 对给定的 x，这样的整数对 m,n 是唯一的. 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x \text{ 为有理数且 } x=\frac{m}{n}\\ 0, & x \text{ 为无理数或 } x=0\end{cases}$$

可以证明：$f(x)$在无理数处是连续的，在有理数 $x\neq 0$ 处是间断的，在 $x=0$ 处是连续的. 显然，在 $x_0=0$ 的任意一个邻域 $U(x_0,\delta)$内，都有有理数，所以 $f(x)$在 $U(x_0,\delta)$内不连续.

注 从几何直觉上很容易猜想，"$f(x)$在一点连续，则 $f(x)$一定在这一点的某邻域内连续"，但这种猜想是错误的.

1.2.12 初等函数一定在其定义域内连续吗？

答 不一定. 例如 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$，其定义域为 $x=2n\pi$($n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$)，即一系列离散的点. 由连续函数的定义知，$f(x)$在其定义域内不连续，因为 $f(x)$在 $x=2n\pi$($n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$)的任意邻域内无定义.

正确的命题是：初等函数在其定义区间内是连续的.

1.2.13 若 $f(x)$具有特性：对任何 $\delta>0$，$f(x)$在邻域 $U(x_0,\delta)$中总是无界的. 那么是否可以说当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$是无穷大？

答 不可以. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ 时，$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$n=1,2,\cdots$，因此在 $x=0$ 的任何邻域中 $f(x)$ 都是无界的；但当 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$ 时，$f(x_n)=0$，$n=1,2,\cdots$，故当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 并不是无穷大.

1.2.14 *若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有介值性. 那么反过来，是否可以说"若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且在 $[a,b]$ 上具有介值性，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必不存在跳跃间断点"？*

答 不可以. 例如

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{3} \\ x+\dfrac{1}{3}, & \dfrac{1}{3}<x\leqslant \dfrac{2}{3} \\ x-\dfrac{1}{3}, & \dfrac{2}{3}<x\leqslant 1 \end{cases}$$

因函数值充满区间 $[0,1]$，故函数 $f(x)$ 具有介值性，但在 $x=\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{2}{3}$ 处都是跳跃间断点.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有介值性的充分条件，而非必要条件. 但对单调函数有如下定理：

定理 1.1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有介值性的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

1.3 解题范例

1.3.1 函数的基本特性

例 1.1 证明函数 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

证 假设有 $T>0$，使

$$f(x+T)=f(x),x\in(-\infty,\infty) \tag{1-1}$$

在式(1-1)中令 $x=0$，则有 $\sin T^2=0$，从而

$$T^2=n\pi \quad (n\text{ 为自然数}) \tag{1-2}$$

在式(1-1)中令 $x=\pi$,则有 $\sin(\pi+T)^2=\sin\pi^2$,从而

$$(\pi+T)^2=\pi^2+2m\pi \quad (m\text{ 为自然数}) \tag{1-3}$$

由式(1-2)和式(1-3)得到

$$2\sqrt{n\pi}=2m-n \tag{1-4}$$

因 π 为超越无理数,$2m-n$ 为整数,故式(1-4)是不成立的.因此 $f(x)=\sin x^2$不是周期函数.

例 1.2 证明 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$在$(-\infty,\infty)$上有界.

分析 只要能说明存在常数 $M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M,x\in(-\infty,\infty)$即可.

证 显然有 $f(x)>0,x\in(-\infty,\infty)$

因为
$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$$

所以
$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

故
$$0<f(x)\leqslant\frac{3}{2},x\in(-\infty,\infty)$$

即 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界.

1.3.2 数列极限的计算

例 1.3 设 $x_1=a,x_2=b,x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2}),n=3,4,\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 这里数列的通项公式未知,数列极限的计算有一定困难.一种思路是利用递推关系,设法求出 x_n 的表达式,再求极限.

解 由 $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$,可得

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})=(-\frac{1}{2})^2(x_{n-2}-x_{n-3})$$
$$=\cdots=(-\frac{1}{2})^{n-2}(b-a)$$

因此,

$$x_n-x_1=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)$$