高等数学习题课教程

Gaodeng shuxue xitike jiaocheng

董梅芳　周后型　张华富 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学习题课教程

董梅芳　周后型　张华富　编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据工科本科高等数学教学基本要求，在原“高等数学习题课教程”的基础上修订而成的．全书共24讲，每讲由本讲要求、例题分析与疑难解答、课内练习题、课外练习题四部分组成，并配有八个阶段的自我测验题．书末附有习题答案或提示．

本书可作为高等数学习题课教材，也可作为从事高等数学教学的教师、报考非数学专业研究生的考生及广大自学者的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/董梅芳，周后型，张华富编．—北京：高等教育出版社,2001

ISBN 7-04-009184-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①董…②周…③张…　Ⅲ．高等数学-解题　Ⅳ．013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第77533号

高等数学习题课教程

董梅芳　周后型　张华富　编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	中国青年出版社印刷厂		
开　本	850×1168　1/32	版　次	2001年5月第1版
印　张	12.25	印　次	2001年5月第1次印刷
字　数	300 000	定　价	12.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换．

前　　言

高等数学习题课是高等数学教学的重要组成部分，是课堂教学的进一步深化，也是一个重要的实践性环节．而一本好的习题课教材是上好习题课的一个必要条件．

本书是根据工科本科高等数学教学基本要求，在原“高等数学习题课教程”(1997 年获国家教委优秀教材一等奖)的基础上，结合东南大学近年来高等数学课程教学改革的实践，经全面修订而成．全书共 24 讲，每讲包括本讲要求、例题分析与疑难解答、课内练习题、课外练习题四个部分，并配有八个阶段的自我测验题．

本书的主要特点是内容上不面面俱到，而是针对学生学习中容易产生错误的问题和疑难问题，通过提出问题、例题分析、回答问题、内容小结等方式，帮助读者正确理解基本概念、掌握解题思路、总结解题方法．本书结构独特，例题典型，分析透彻，注重引导，一题多解，启迪思维．

本书由东南大学应用数学系张华富老师(一至七讲)、周后型老师(八至十一讲及十五至十八讲)、董梅芳老师(十二、十四讲及十九至二十四讲)负责编写，全书由董梅芳老师负责统稿．高等数学教研室的老师给予了大力支持和帮助，在此深表谢意！

由于编者水平所限，本书的缺点和错误在所难免，恳请广大读者批评指正．

2000 年 4 月

目　　录

第一讲　函　　数

一、本 讲 要 求

1. 理解函数的概念和函数符号的意义，能熟练地求出给定函数的定义域.

2. 理解反函数、复合函数、分段函数.

3. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性及其图形特征.

4. 熟悉基本初等函数的性质及图形.

二、例题分析与疑难解答

问题 1　为什么说函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素?

根据函数定义，只要定义域和对应规律确定了，函数的值域也就确定了，从而函数就完全确定. 因而函数的定义域与对应规律是确定函数的两个主要因素.

试分别举出定义域不同；定义域相同、对应规律不同；定义域相同、值域也相同的不同函数的例子.

由于函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素，所以只有当两个函数的定义域与对应规律完全相同时，才能说它们是相同的(或相等).

下列各题中两函数是否相同? 分别作出它们的图形.

(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$；

(2) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ \ln x$;

(3) $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 与 $y=x+3$;

(4) $y=x^2$ 与 $y=(x-1)^2+2x-1$.

下面的例子可帮助读者正确理解函数的符号.

例 1 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试以 $f(x)$ 表示 $f(3x)$.

解 [法 1]

因
$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3x}{2x+(x-1)}=\frac{3\dfrac{x}{x-1}}{2\dfrac{x}{x-1}+1}$$

故
$$f(3x)=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

这种解法的关键在于变形.

[法 2] 先由 $y=\dfrac{x}{x-1}$ 解出反函数 $x=\dfrac{y}{y-1}$，则有

$$f(3x)=f\left(\frac{3y}{y-1}\right)=\frac{\dfrac{3y}{y-1}}{\dfrac{3y}{y-1}-1}=\frac{3y}{3y-y+1}=\frac{3y}{2y+1}$$

从而
$$f(3x)=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

例 2 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x<0\\ 2^x, & 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

求 $f(x-1)$.

解 下面做法对吗?

用 $x-1$ 替换 $f(x)$ 中的 x，得

$$f(x-1)=\begin{cases}1+(x-1)=x, & -\infty<x<0\\ 2^{x-1}, & 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

这是错误的. 请找出错在何处?

正确做法如下:

令 $x-1=t$, 则有

$$f(x-1)=f(t)=\begin{cases}1+t, & -\infty<t<0\\ 2^{t}, & 0\leqslant t<+\infty\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x, & -\infty<x-1<0\\ 2^{x-1}, & 0\leqslant x-1<+\infty\end{cases}$$
$$=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ 2^{x-1}, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

问题 2 两个函数应满足什么条件才能构成复合函数?

按照复合函数的定义, 数集 B 上的函数 $y=f(u)$ 与数集 A 上的函数 $u=\varphi(x)$ 能构成数集 A 上的复合函数 $y=f(\varphi(x))$, 应要求 $u=\varphi(x)$ 的值域 $B_{\varphi}\subseteq B$, 如果这个条件不满足, 它们就不能构成数集 A 上的复合函数.

例如 $y=\sqrt{1-u^2}$ 与 $u=3+\sin x$ 就不能构成复合函数, 这是因为 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域为 $-1\leqslant u\leqslant 1$, 而 $u=3+\sin x$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的值域为 $2\leqslant u\leqslant 4$, 它不在 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域中.

但应注意, 如果在数集 $A^*(A^*\subset A)$ 上, $u=\varphi(x)$ 的值都属于 $y=f(u)$ 的定义域 B, 那么 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 在 A^* 上可构成复合函数.

例 3 设 $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$. 试确定 $f(g(x))$, $g(f(x))$ 的定义域.

解 (1) $g(x)$ 的定义域为 $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 值域为 $B_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $f(x)$ 的定义域为 $B=[1,+\infty)$.

由于 B_g 中只有 $[1,+\infty)$ 这一部分在 $f(x)$ 的定义域 B 中,

而 B_g 中 $[1,+\infty)$ 这一部分是由 A 中 $(0,1]$ 产生的，所以 $f(g(x))$ 的定义域为 $(0,1]$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $A=[1,+\infty)$，值域为 $B_f=[0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $B=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由于 B_f 中只有 $(0,+\infty)$ 这一部分在 $g(x)$ 的定义域 B 中，而 B_f 中 $(0,+\infty)$ 这一部分是由 A 中的 $(1,+\infty)$ 产生的，所以 $g(f(x))$ 的定义域为 $(1,+\infty)$.

本例表明 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$ 是不同的函数，它们的定义域没有公共点.

可见复合运算是不可交换的.

问题 3 分段函数能不能看作几个函数或看作几段函数相加?

分段函数是一个函数，有其确定的定义域及对应规律，切不可看作几个函数，也不能看作几段函数相加. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0\\ x-2, & x>0\end{cases}$$

是一个分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其对应规律是：当自变量 $x\leqslant 0$ 时，因变量由 $1+x^2$ 确定；当自变量 $x>0$ 时，因变量由 $x-2$ 确定. 它是一个函数而不是两个函数，它也不能看作两段函数 $f_1(x)=1+x^2(x\leqslant 0)$ 与 $f_2(x)=x-2(x>0)$ 相加. 因为函数相加是指在共同定义域内同一自变量处的函数值相加，而 $f_1(x)=1+x^2(x\leqslant 0)$，$f_2(x)=x-2(x>0)$ 是两个定义域不同的函数，它们不能相加.

至于两个分段函数能不能相加，这要由具体情况而定.

例如 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$

就能相加，因为它们的定义域相同. 此时

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 2x+1, & 0\leqslant x<1\\ 2x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

而 $f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$

就不能相加，因为它们的定义域不同.

例 4 设$f(x)$满足$f(x+2)=2f(x)$，且在$[0,2]$上$f(x)=x(x-2)$，试求$f(x)$在$[-4,4]$上的表示式.

分析 已知的只是$f(x)$在$[0,2]$上的表示式及关系式：

$$f(x+2)=2f(x) \tag{1-1}$$

要求$f(x)$在$[-4,4]$上的表示式，就要设法通过关系式(1-1)来扩充 f 的定义域.

解 (1) 当 $x\in[2,4]$时，$x-2\in[0,2]$，将(1-1)式中的 x 用$x-2$ 代替，得

$$f(x)=2f(x-2)$$

由于 $x-2\in[0,2]$时，$f(x-2)=(x-2)(x-4)$. 所以当 $x\in[2,4]$时，

$$f(x)=2(x-2)(x-4)$$

(2) 当 $x\in[-2,0]$时，$x+2\in[0,2]$，由(1-1)式知

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$$

由于 $x+2\in[0,2]$时

$$f(x+2)=(x+2)[(x+2)-2]=(x+2)x$$

所以当 $x\in[-2,0]$时，$f(x)=\frac{1}{2}x(x+2)$.

(3) 当 $x\in[-4,-2]$时，$x+2\in[-2,0]$，由(2)知 $x+2\in[-2,0]$时，

$$f(x+2)=\frac{1}{2}(x+2)[(x+2)+2]=\frac{1}{2}(x+2)(x+4)$$

又由(1-1)式知$f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$. 所以当 $x\in[-4,-2]$时，$f(x)=\frac{1}{4}(x+2)(x+4)$.

综上，在$[-4,4]$上$f(x)$的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+2)(x+4)}{4}, & -4\leqslant x<-2\\ \dfrac{x(x+2)}{2}, & -2\leqslant x<0\\ x(x-2), & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-2)(x-4), & 2<x\leqslant 4\end{cases}$$

例 5 设$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

求(1)$\varphi(\varphi(x))$,(2)$\varphi(\psi(x))$,(3)$\psi(\varphi(x))$,(4)$\psi(\psi(x))$.

解 (1) 当$|x|\leqslant 1$时，$\varphi(\varphi(x))=\varphi(1)=1$；

当$|x|>1$时，$\varphi(\varphi(x))=\varphi(0)=1$.

所以$\varphi(\varphi(x))=1(-\infty<x<+\infty)$.

(2) 当$|x|<1$时，$\varphi(\psi(x))=\varphi(2-x^2)=0$；

当$|x|>1$时，$\varphi(\psi(x))=\varphi(2)=0$；

当$|x|=1$时，$\varphi(\psi(x))=\varphi(1)=1$.

所以 $$\varphi(\psi(x))=\begin{cases}0, & |x|\neq 1\\ 1, & |x|=1\end{cases}$$

(3) 当$|x|\leqslant 1$时，$\psi(\varphi(x))=\psi(1)=2-1^2=1$；

当$|x|>1$时，$\psi(\varphi(x))=\psi(0)=2$.

所以 $$\psi(\varphi(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$$

(4) 当$|x|<1$时，$\psi(\psi(x))=\psi(2-x^2)=2$；

当$|x|=1$时，$\psi(\psi(x))=\psi(1)=2-1^2=1$；

当$|x|>1$时，$\psi(\psi(x))=\psi(2)=2$.

所以 $$\psi(\psi(x))=\begin{cases}2, & |x|\neq 1\\ 1, & |x|=1\end{cases}$$

问题 4 有界函数、奇偶函数、周期函数有何特征？

请读者回答这个问题，并判断下列函数中哪些是周期函数？

哪些不是周期函数？对周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin^2 x$；(2) $y=\sin x^2$；(3) $y=\sin \pi x$；

(4) $y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$； (5) $y=x\cos x$；

(6) $y=|\sin x|+|\cos x|$.

例 6 证明：定义于$(-a,a)$上的函数$f(x)$总能表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

证明 因为$(-a,a)$上的函数$f(x)$总可写为

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

记

$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$H(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

则

$$f(x)=G(x)+H(x)$$

由于

$$G(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=G(x)$$

$$\begin{aligned}H(-x)&=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]\\&=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-H(x)\end{aligned}$$

所以$G(x)$是偶函数，$H(x)$是奇函数. 这就证明了$f(x)$总能表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

例 7 证明：$f(x)=x-[x]\,(x\in(-\infty,+\infty))$是以 1 为周期的周期函数，并作出其图形.

证明 因$f(x+1)=(x+1)-[x+1]=(x+1)-[x]-1=x-[x]=f(x)$，故$f(x)$是以 1 为周期的周期函数. 其图形如图1－1所示.

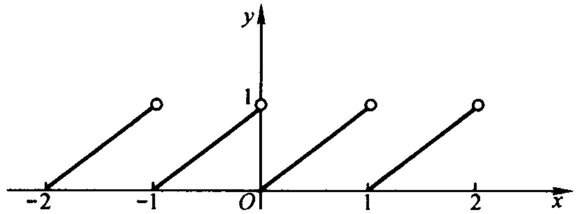

图 1－1

例 8 证明：函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内无界.

证明 对任意给定的 $M>0$，由于$\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，若令$x_1=\dfrac{1}{M+1}$，则有$|f(x_1)|=\left|\dfrac{1}{\frac{1}{M+1}}\right|=M+1>M$. 因此$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

注意，若设$0<a<1$，则$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(a,1)$内有界. 这是因为取 $M=\dfrac{1}{a}$，对任意 $x\in(a,1)$，有$|f(x)|=\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{a}=M$.

三、课内练习题

1. 选择题：

(1) 函数$f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}$的定义域是(　　).

(A) $[-2,3]$　　(B) $(-2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)$　　(D) $(-2,3]$

(2) 设$f(x)=\arccos(\lg x)$，则$f\left(\dfrac{1}{10}\right)$等于(　　).

(A) 0　　(B) -1

(C) π　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

(3) 函数 $y=\frac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$的反函数是(　　).

(A) $y=\frac{1+x}{1-x}$　　(B) $y=\frac{x+1}{x-1}$

(C) $y=\frac{1-x}{1+x}$　　(D) $y=\frac{x-1}{x+1}$

(4) 下列函数中为偶函数的是(　　).

(A) $f(x)=x^3+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(B) $f(x)=\ln\sqrt{x\ +(1+x)^2}$

(C) $f(x)=x^2+|\sin x|$

(D) $f(x)=\frac{[x(\mathrm{e}-1)]^x}{(\mathrm{e}+1)^x}$

(5) 下列函数中为 **R** 上有界函数的是(　　).

(A) $x\sin x$　　(B) $x\sin\frac{1}{x}$

(C) $\frac{\sin x}{x}$　　(D) $\sin(2x)$

(6) 下列函数中为周期函数的是(　　).

(A) $y=x\sin x$　　(B) $y=\sin x\cdot\cos x$

(C) $y=x\cos x$　　(D) $y=\sin\frac{1}{x}$

2. 设$f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$，求$f(x-1)$，$f(f(x))$.

3. 设$f(x)=2^x+3$，求$g(x)$使得$f(g(x))=\sqrt{x}+4$.

4. 设$f(x)$是以 T 为周期的函数，试证明：函数$f(ax+b)$是以$\frac{T}{a}$为周期的函数，其中 a 和 b 为常数，且 $a>0$. 并由此求函数$g(x)=\sin(3x+1)$的周期.

5. 已知$f(x)$满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，$a$、$b$、$c$ 为常数且$|a|\neq|b|$,求$f(x)$，并证明$f(x)$为奇函数.

6. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形如图 1-2 所示，试画出下列各函数的图形：

(1) $y=|f(x)|$；

(2) $y=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$；

(3) $y=\begin{cases} f(x), & x\in(0,3) \\ f(-x), & x\in(-3,0); \end{cases}$

(4) $y=\begin{cases} f(x), & x\in(0,3) \\ -f(-x), & x\in(-3,0). \end{cases}$

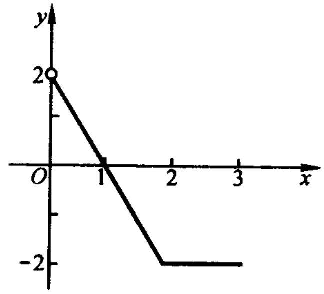

图 1-2

7. 设某两城市之间的长途电话费在最初的 3 分钟是6.60(元)，以后的每一分钟(不足一分钟以一分钟计)另加1.65(元). 试求长途电话费 c 与通话时间 t 的函数关系.

四、课外练习题

1. 下面的函数哪些是相同的？

$f_1(x)=\sqrt{1+4x+4x^2}$，$f_2(x)=|1+2x|$，

$f_3(t)=1+2t$，$f_4(y)=1+2y$，

$f_5(x)=1+2x\left(x\neq-\frac{1}{2}\right)$，$f_6(x)=\frac{(1+2x)^2}{1+2x}$.

2. 函数 $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ 是否是相同的函数？为什么？

3. 设 $f(x)=x+3$，求函数 $g(x)$ 使得 $f(g(x))=\sqrt{\frac{5x+1}{x}}$.

4. 设 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{1+x}$，求 $g(f(x))$，$f(g(x))$.

5. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ x^2, & x>0, \end{cases}$ 求

$f(g(x)),g(f(x))$.

6. 设$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1, & x<10,\\ 5, & x>10,\end{cases}$

证明 $g(x)=3+2f(x-10)$.

7. 设$f(x)=|x|$，$g(x)=f(x-2)$，作出$g(x)$的图形.

8. 设$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，试问$f(x)g(x)$，$f(g(x)),g(f(x))$，$f(f(x))$是奇函数还是偶函数?

9. 问 a、b、c、d 满足什么条件时，才能使

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

对其定义域内的所有 x 满足$f(f(x))=x$.

10. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且满足下面两个条件：

(1) $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，

(2) $f(x)\equiv 0$，$x\in[0,\pi]$，

证明：$f(x)$为周期函数，并作出$f(x)$在$[-2\pi,2\pi]$上的图形.