

高等数学中的反例

朱 勇 张小柔 林 益 胡仪君 连凤桐 编



华中工学院出版社

高等数学中的反例

朱 勇 张小柔 林 益 编
胡仪君 连凤桐

华中工学院出版社

300081

内 容 提 要

本书通过高等数学中的反例及其构造方法，加深读者对高等数学中基本概念和基本定理的理解，防止由于缺乏对数学学科本身规律的了解而产生的各种常见错误。

本书内容包括函数、极限、连续、微分、积分、级数等部分，并照顾到研究生入学考试中高等数学理论部分的要求。

这本书既是学习高等数学的辅导、补充材料，又是一本解题范例。它广泛地适用于工科大学、师范院校、电视大学、业余大学、函授大学的学生以及自学者，而且也可供从事高等数学课教学的教师参考。

高等数学中的反例

朱勇 张小柔 林益 编

胡仪君 连凤桐

责任编辑 龙纯曼

华中工学院出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7.5 字数：155,000

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

印数：1-3,600

统一书号：13255-057 定价：1.30 元

前 言

如何学好高等数学，这是许多学生关心的问题。有的人认为多做题即可，但却不一定取得理想的效果。这往往是由于对高等数学中的基本概念、基本理论没有深刻的理解与牢固的掌握。数学既不同于社会科学，也不同于一般自然科学。数学是由一个一个概念经过逻辑推理而形成的一种严密的科学系统。舍弃深刻地理解数学概念，势必舍本求末，不能把握高等数学的科学规律，不能提纲挈领统帅整个教材。本书利用大量的反例，并通过构造反例的方法来帮助读者深刻地理解高等数学中的基本概念与基本定理。

数学概念来自直观的几何模型与物理模型，但是数学概念经过抽象而形成的严格的定义却又更高于实际，更深刻地反映事物的本质。许多学生不了解这点，往往凭直观想象代替严格定义，用想当然代替严密的逻辑推理，这样就违背了数学学科的科学规律，背离数学学科的思维特点和科学方法。高等数学中对主要定理条件与结论之间的“充分”、“必要”性的理解是学习数学的一个基本功。本书通过生动的“反例”揭示了数学上这种“失之毫厘，差之千里”的特点，让读者熟练地掌握和应用基本定理，这无疑将提高读者的数学修养和培养学生对科学理论研究的能力。

鉴于近年来研究生入学考试不断提高对高等数学基础知识的要求，本书适当地补充了当前各种高等数学教材中的不足。首先我们补充了关于概念否定定义的叙述，其次提供了严格的

逻辑推理的解题范例。另外增添了一些经典分析中的内容，以补充现行教材中理论性的不足。而这些教材中一带而过或笼统介绍的内容往往又是衡量学生能力的重要尺度之一。因此读者在阅读本书时将会有新鲜感、趣味感，在许多出乎意料的结论中使你打开眼界扩宽思路，使你的数学基础得到充实、数学能力得到提高。

在多年的教学中，我们对学生常见的困难与错误进行了概括与归纳。本书将主要为正在学习或已经学完高等数学而有志提高的人提供指导，同时也可供教授高等数学的同行参考。

书中定义、定理等的叙述基本是以同济大学《高等数学》（第二版）为准的。

在本书编写过程中，我们得到罗汝梅教授的精心指导，特致以谢意。

限于水平，错漏之处敬请读者赐教。

编 者

1985年10月

目 录

第一章 函数与极限

1. 不存在最小正周期的周期函数	(1)
2. 不保持周期性的周期函数之和	(1)
3. 由有界函数、无界函数经过四则运算生成的有界函数	(1)
4. 在 (a, b) 内的每一点有定义、局部有界, 但在 (a, b) 内却无 界的函数	(3)
5. 在 (a, b) 内有定义, 但在区间内任何一点的任何一个邻域 内都无界的函数	(3)
6. 有单值反函数的非单调函数	(5)
7. 由单调函数、非单调函数生成的单调和函数	(5)
8. 由于使用极限 “ ε - δ ” 定义不准确产生的反例	(6)
9. 收敛, 但是不单调的数列	(8)
10. 单调, 但是不收敛的数列	(8)
11. 发散的有界数列	(8)
12. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有界, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在	(8)
13. 在全数轴上连续、有界的函数 $f(x)$, 而 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 却不存在 ...	(9)
14. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点没有极限, 但对任意实数 a , 存在收敛于 x_0 的数列 x_n , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$	(9)
15. 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$ 的无界数列	(10)
16. 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \infty$, 但是在 x_0 点的任何邻域内都无界的函数	(11)

17. 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 存在关系: $y_n \leq x_n \leq z_n$, $n=1, 2, \dots$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - y_n) = 0$, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 却不存在 (11)

18. 由收敛数列、发散数列经过四则运算生成的收敛数列 (12)

19. $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$, 但是 $\lim_{x \rightarrow a} \psi[\varphi(x)] \neq B$ 的

复合函数 (13)

20. 数列 x_n 收敛于零, y_n 是另一数列, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = k \neq 0$

..... (14)

21. 两数列 x_n , y_n , 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 但是数列 x_n , y_n 都不

收敛于零 (14)

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$ 的数列 (14)

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} \neq 1$ 的两个数列

..... (15)

24. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} \neq 1$ 的两个数列

..... (15)

25. 两数列 x_n , y_n , 有 $x_n < y_n$, $n=1, 2, \dots$, 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

..... (15)

26. 数列 x_n 收敛与数列 y_n 满足 $y_n < x_n$, $n=1, 2, \dots$, 但是数列 y_n

发散 (15)

27. 关于无穷小量、非无穷小量四则运算的反例 (16)

28. 两个非无穷大量之积生成的无穷大量 (20)

29. 不是无穷大量的两个无穷大量之和 (20)

30. 由无穷大量与有界函数之积生成的非无穷大量 (20)

31. 不存在与任何无穷小相比都是低阶的无穷小, 也不存在与任何无穷小相比都是高阶的无穷小 (20)

32. 由无穷小量分别加一对等价无穷小所得到的一对非等价无穷小 (21)

33. 收敛数列 x_n 的算术平均值 $y_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$, $n = 1, 2, \dots$
也收敛, 但反之不真 (22)
34. 正函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上某一点 x_0 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
..... (22)
35. 函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时有 $|f(x) - A|$ 严格递减, 然而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
 $= B \neq A$ (22)
36. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n) = +\infty$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$ 的函数 (23)
37. 数列 x_n 发散, 但是它满足 $n > N$ 时, $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, (N, p
为确定正整数) (24)
38. 有收敛子序列的发散数列 (24)
39. 数列 x_n 有无穷多个两两不相交的子序列收敛于同一个数,
但数列本身却是发散的 (24)
40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ 存在, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在的数列 x_n (25)
41. 具有有界变差的数列一定收敛, 但反之不真 (26)
42. 函数 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 时, $f(x) \neq 0$, 但满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ (n 为
任何正整数) (27)
43. 函数 $f(x)$ 在某点的极限存在, 但在该点任何邻域内都有无
限多个极限不存在的点 (27)

第二章 一元函数的连续性

1. 由于使用连续函数 “ $\varepsilon - \delta$ ” 定义不准确产生的反例 (30)
2. 在任一点的任一邻域都有无数多个连续点, 但在任一区间
都不连续的函数 (32)
3. 由处处不连续函数之和生成的处处连续函数 (34)
4. 连续函数与不连续函数之积生成的连续函数 (35)
5. 由处处不连续函数之积生成的处处连续函数 (35)

6. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 而其平方在该点却连续 (36)
7. 函数 $u = g(x)$ 在 x_0 点不连续, $g(x_0) = u_0$, $f(u)$ 在 u_0 点连续, 但复合函数 $f[g(x)]$ 在 x_0 点却是连续的 (36)
8. 函数 $u = g(x)$ 在 x_0 点不连续, $g(x_0) = u_0$, $f(u)$ 在 u_0 点也不连续, 而复合函数 $f[g(x)]$ 在 x_0 点却是连续的 (37)
9. 一个不常见的间断点类型 (37)
10. 在任何一个邻域内都有无穷多个可去间断点的函数 (38)
11. 函数 $f(x)$ 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 但是 $f(x)$ 在 x_0 点不连续 (40)
12. 只在一点连续的函数 (41)
13. 函数 $|f(x)|$ 在 x_0 点连续, 但 $f(x)$ 在 x_0 点却不连续 (41)
14. 由连续函数四则运算生成的不连续函数 (42)
15. 一个定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的周期函数, a 是它的最小正周期, 函数在 $[0, a)$ 内是连续函数, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 内却并非连续函数 (43)
16. 有界, 但是不连续的函数 (44)
17. $f(x)$ 在区间 $[0, b]$ (或 $[b, 0]$) 上取介于 $f(0)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值, 但 $f(x)$ 在区间 $[0, b]$ (或 $[b, 0]$) 上并不连续 (44)
18. 其反函数连续的不连续函数 (45)
19. 在闭区间 $[a, b]$ 上有最大值而无最小值的函数 (46)
20. 在有限区间上有最小值而无最大值的连续函数 (46)
21. 在开区间 (a, b) 内既有最大值又有最小值的函数 (46)
22. 在开区间上连续的无界函数 (46)
23. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 同号, 但仍存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$ (46)
24. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 同号, 不存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$ (47)
25. $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 但在 (a, b) 内方程

- $f(x) = 0$ 却没有根 (47)
26. 在全数轴上一致连续的无界函数 (47)
27. 一些非一致连续连续函数 (48)

第三章 一元函数的导数

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = A$, 但是函数 $f(x)$ 在任何一点都没有导数 (54)
2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ 存在, 但是函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 不可导 (54)
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 而 $f'(x_0)$ 不存在的函数 (55)
4. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数与它的导函数在这点的右极限不相等 (55)
5. 函数 $f(x)$ 在 x_0 的任何邻域上有不可导的点, 但函数在这点可导 (56)
6. 导函数是初等函数的非初等函数 (57)
7. 由可导函数、不可导函数经过四则运算、复合生成的可导函数 (57)
8. 由参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 所确定的函数 $y = f(x)$, 在 $t = t_0$ 点可导, 但是在这一点不能用参变量求导公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ (60)
9. 参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 在 $t = t_0$ 点都不可导, 但是它确定的函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内却处处可导 (60)
10. 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导, 但是函数 $\tilde{y} = |f(x)|$ 在 x_0 点不可导 (61)
11. 函数 $\tilde{y} = |f(x)|$ 在全数轴上处处可导, 但是函数 $y = f(x)$ 在全数轴上处处不可导 (62)

12. 导函数不连续的函数 (62)
13. 将无穷导数作为导数概念的推广, 那么出现处处有导数的
不连续函数 (62)
14. 有无穷多个不可导点的连续函数 (63)
15. 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 但在 (a, b) 内无界 (63)
16. 全数轴上定义的函数 $f(x)$, 只在一点连续, 也只在这一点
可导 (63)
17. 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界、连续、可导, 但函数在这区间
内不一致连续 (64)
18. 函数 $y = f(x)$ 有有限的导数, 但它的导数在闭区间上无界
..... (64)
19. 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致连续、可导, 但是它在
 $(-\infty, +\infty)$ 无界 (65)
20. 有界函数的导函数可以是一个无界函数 (65)
21. 导函数不单调的单调函数 (65)
22. 单调增加的函数, 其导函数可以单调减少 (65)
23. 单调减少的函数, 其导函数可以单调增加 (66)
24. 导数是偶函数的非奇非偶函数 (66)
25. 导数是奇函数的非奇非偶函数 (66)
26. 非周期函数的导函数却可以是周期函数 (66)
27. 在某点一阶导数为零, 而二阶导数不为零的函数 (66)
28. 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有任意阶导数, 但在任何
一点的任意阶导数均不为零 (67)
29. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的任意阶导数都为零, 但是对每一个正
整数 k , 总存在该点的某个邻域, 使在此邻域内不再存在
其它 k 阶导数为零的点 (67)
30. 单调增加的函数, 其导函数可以有无穷多个零值 (69)
31. 在有限区间内有不等式 $f(x) < g(x)$, $f'(x) > g'(x)$ 同时
成立的两函数 (69)

32. $f(x)$ 为有界函数且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在, 但是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在 (70)
33. $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$, 但是 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 有有限极限 (70)
34. $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, 但是 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ 不存在 ($\neq \infty$) (71)
35. $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 但是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在 (71)
36. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处不可导, 但是在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的函数 (72)
37. 在闭区间上几乎处处可导, 而又几乎处处不可导的连续函数 (74)
38. 设 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $f'(a) = h'(a)$, 但是 (i) $g(x)$ 在 a 点不一定可导, (ii) 即使 $g'(a)$ 存在, $g'(a)$ 也可能不等于 $f'(a)$ (77)

第四章 中值定理及导数的应用

1. 罗尔定理中的条件稍作改变后引出的各种反例 (79)
2. 拉格朗日中值定理中的条件稍作改变后引出的各种反例 (87)
8. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内二阶导数连续, 且 $f''(\xi) \neq 0$, $a < \xi < b$, 则在 (a, b) 中一定存在两点 x_1, x_2 , 满足
- $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \dots\dots\dots (91)$$
4. 柯西中值定理中的条件稍作改变后引出的各种反例 (93)
5. 函数 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内单调增加, 但是 $f(x) \cdot g(x)$ 在 (a, b) 内不单调增 (98)
6. $f'(x_0) > 0$, 但 $f(x)$ 在 x_0 任何邻域内都不单调 (98)

7. 除有限个点以外导数处处相等的两个函数, 它们相差的常数可能不恒定 (99)
8. 函数 $f(x)$ 有 $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, 但是 $f(x)$ 在 $x = a$ 取得极值 (100)
9. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的任意阶导数都是零, 但它在这一点 却取得极值 (100)
10. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的任意阶导数都是零, 然而 x_0 不是函数的极值点 (101)
11. 函数 $f(x)$ 有 $f'(a) = 0$, 并在 a 点取得极值, 但在 a 点的两侧并非单调 (101)
12. 函数 $f(x)$ 的导函数在 x 点附近无穷多次变号, 但是 $f(x)$ 在 x_0 点却有极小值 (102)
13. 在其左侧函数并非单调上升, 在其右侧函数也并非单调下降的极大值点 (104)
14. 函数 $f'(x)$ 存在、有界, 但是 $f'(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上没有最大值, 也没有最小值 (106)
15. 函数在开区间内的唯一极大值点, 可以不是最大值点 (108)
16. $f(x_0)$ 是函数在区间 $[a, b]$ 上的最大值, 但 $f''(x_0)$ 不小于零 (108)
17. 两个凹函数的乘积可以是凸函数 (109)
18. 两个凸函数的乘积可以是凹函数 (109)
19. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足罗必塔法则的全部条件, 但是不能用罗必塔法则求不定式 $\left(\frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{\infty}{\infty}\right)$ 的极限 (109)
20. 不定式有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, 而 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 却不存在的两个函数 $f(x), g(x)$ (110)
21. 函数 $f(x)$ 在全数轴上有任意阶导数, 但它的 n 阶麦克劳林公式仅有余项 (111)

第五章 多元函数

1. $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ 时累次极限都存在, 而二重极限却不存在的
函数 (113)
2. 二重极限存在, 而累次极限却不存在的二元函数 (113)
3. 在某点累次极限存在而不相等的函数 (114)
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0), \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y)$ 存在, 但是, $f(x, y)$ 在点
 (x_0, y_0) 没有极限 (115)
5. 函数 $f(x, y)$ 在原点没有极限, 但沿任一直线逼近原点时
极限值存在, 且都等于零 (115)
6. 因在有界闭域 D 内一点不连续, 而导致在整个 D 上无界的
函数 (116)
7. 函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上分别对 x, y 都连续, 但是 $f(x, y)$
在 D 上却不连续 (116)
8. 在某点偏导数存在, 但在该点却不连续的二元函数 (117)
9. 函数 $z = f(x, y)$ 在某点连续, 但是 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 都不存在
..... (118)
10. $f(x, y)$ 在某点 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 存在, 但是沿其它任何方向的方
向导数均不存在 (118)
11. 函数 $f(x, y)$ 在某一点可微, 但它的偏导数在该点不连续
..... (119)
12. 函数 $f(x, y)$ 在一点附近连续, 并且有有界的偏导数, 但
是它在这点却不可微 (120)
13. 在某点沿任意方向方向导数都存在的函数, 在该点全微分
可能不存在 (122)
14. $f_{x,y}(x_0, y_0) \neq f_{y,x}(x_0, y_0)$ 的函数 $f(x, y)$ (123)
15. $f_{x,y}(x_0, y_0) = f_{y,x}(x_0, y_0)$, 但是 $f_{x,y}(x, y)$ 与 $f_{y,x}(x, y)$
在 (x_0, y_0) 不连续 (124)

16. x 和 y 的连续可微函数 $f(x, y)$, 在平面区域 R 内 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$,

但是 f 在 R 内并非与 y 无关 (125)

17. 复合函数 $z=f(x, y)$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 的 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt}$,

$\frac{dy}{dt}$ 都存在, 但 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ (125)

18. 三元函数 $f(x, y, z)$, 如果由方程 $\varphi(x, y, z)=0$ 确定 $z=z(x, y)$ 或者 $y=y(x, z)$, 则两者使 $f_z(x_0, y_0, z_0)$ 结果不相同 (127)

19. 在一点不连续的函数, 可以在该点达到极值 (128)

20. 函数 $f(x, y)$ 在某点的邻域内连续, 但是在该点偏导数不存在, 而函数在此点可以有极大值 (129)

21. 点 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的驻点, 但是它不是函数的极值点 (129)

22. 函数 $f(x, y)$ 在无穷多个点处有极大值, 但却没有极小值 (129)

23. 函数 $f(x, y_0)$ 及 $f(x_0, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值, 但是函数 $f(x, y)$ 在该点不取得极值 (131)

24. 函数 $f(x, y)$ 在某个区域内只有一个极值, 并且是极大值, 但是它却不是函数在该区域内的最大值 (131)

25. 函数 $f(x, y)$ 在沿过 M_0 点的每一条直线上有极小值, 但是函数在这一点不取得极值 (132)

26. 有无穷多个驻点, 但是其中没有一个是极值点的函数 (133)

27. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内连续, 有一阶及二阶偏导数, 又 $f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$, $f_{xx}(x_0, y_0)>0$ $B^2-AC<0$. 但是点 (x_0, y_0) 不是 $f(x, y)$ 的极值点 (134)

28. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域内有连续的一阶及二阶偏

导数, 且 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, $B^2 - AC = 0$.

而 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的情形将不定 (135)

29. 函数 $f(x, y)$ 在条件 $\phi(x, y) = 0$ 下有极值, 但是相应的拉格朗日函数却无极值 (136)

第六章 积 分

一元函数的积分学

1. 在区间 I 上没有原函数的函数 (138)
2. 不具有原函数的初等函数 (138)
8. 在区间 I 上具有不同形式原函数的函数 (138)
4. 原函数不是初等函数的初等函数 (139)
5. 偶函数的原函数中只有一个是奇函数 (140)
6. 无限多个函数, 每个都有原函数, 但是它们的和函数却可能没有原函数 (140)
7. 无限多个函数, 每个都没有原函数, 可是它们的和函数却可能有原函数 (141)
8. 函数 $f(x)$ 在闭区间上可积, 但是在此区间上却不具有原函数 (142)
9. $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间上不具有原函数, 但是 $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx$ 却存在 (143)
10. 函数 $f(x) \neq 0$, 但是 $\int_a^b f(x) dx = 0$ (143)
11. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(x) dx$ 与区间的分法, ξ_i 的取法有关的函数 $f(x)$; 其中 λ 为最大子区间 Δx_i 的长度 (144)
12. 一个在闭区间上有无穷多个间断点的可积函数 (150)
13. 在任何有穷区间内都有无穷多个间断点的可积函数 (152)
14. 有无限多个间断点的有界不可积函数 (154)

15. $|f(x)|$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积, 但是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上却不
可积 (154)
16. 由两个在闭区间上不可积函数之积生成的可积函数 (155)
17. $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上均可积, 且当 $a \leq x \leq b$ 时, $a \leq g(x) \leq b$, 但是复合函数 $f[g(x)]$ 在闭区间 $[a, b]$ 上不可积 (155)
18. 无限个函数的和函数的定积分, 可以不等于各函数定积分的和 (157)
19. 在闭区间 $[a, b]$ 上除一点 x_0 以外, 处处有 $F'(x) = f(x)$, 但是
 $\int_a^b f(x) dx \neq F(b) - F(a)$ (158)
20. $f(x)$ 在点 $x_0 \in [a, b]$ 不连续, 在两子区间 (a, x_0) 及 (x_0, b) 内
 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 而 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
却仍然成立 (159)
21. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上不连续, 在 (a, b) 内不存在 ξ ,
使 $f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$ (160)
22. 在闭区间不连续的可积函数, 却可以有积分中值定理的结论 (160)
23. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 但 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$ 在 $[a, b]$
上并非处处可导 (161)
24. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内某点间断, 但是 $\int_a^x f(t) dt$ 关于 x 连续
..... (161)
25. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界, 函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 内
某些点处不可导 (162)
26. $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$ 存在, 但是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散 (162)
27. 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 但是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ (163)