面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学

应试能力训练

COLLEGE MATHMATICS

张学元 编

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学应试能力训练

张学元 编

湖南大学出版社
2001年·长沙

内容简介

本书以应试能力培训为主线，精选了一些重点工科院校和历届硕士研究生入学考试的高等数学试题，为方便读者使用，采用专题与教材相匹配的编写方式，全书共分九章，对综合性较强的题目，先给出解题思路分析，然后正式解答．为了帮助读者加深对基本概念的理解，除第九章外，均配有选择题，并附有答案．

本书可供高等工科院校学生（包括本科、专科、高职学生及高等教育自学考试考生）在学习高等数学时同步使用，也可作为报考工学、理学及经济等类硕士研究生考前强化复习资料．作为高等学校的数学教师，本书也是一本有收藏价值的教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应试能力训练/张学元编．—长沙：湖南大学出版社，2001.8

ISBN 7-81053-408-4

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第(059056)号

高等数学应试能力训练

Gaodeng Shuxue Yingshi Nengli Xunlian

张学元 编

□责任编辑 李刚 历亚

□总 策 划 龙挺

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 32开 □印张 18.5 □字数 477千

□版次 2001年8月第1版 □2001年8月第1次印刷

□印数 1-7 000册

□书号 ISBN 7-81053-408-4/O·29

□定价 22.50元

前　言

在高等工科院校的教学计划中,《高等数学》都被列为校级统考课程,在全国硕士学位研究生入学考试中,也被指定为全国统考科目.为了帮助正在学习高等数学及报考硕士研究生的广大读者提高学习效率和应试能力,我们根据教育部制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》及近年来《全国工学、经济学硕士生入学考试数学考试大纲》编写了本书.

本书的主要特点是以应试能力培训为主线,贯穿"能力——技能——知识"的思维链条,编者参阅和研究了一些重点高等工科院校的期末考试和历届硕士研究生入学考试试题,精选出具有启发性、典型性和针对性的试题,通过对这些题目的分析解答,为引导读者运用必备的知识去独立解题提供了思维的钥匙,培养读者的综合、分析和实际应试能力.

本书考虑了不同层次的需要,选题具有一定的梯度,因此本书适用于各层次大学(理工、师范、财经、农林、医学等)的本、专科学生学习《高等数学》时同步使用,同时也可作为报考工学、理学及经济、农林等类硕士研究生考前强化训练的复习资料.

王达运、王一蒙、王自阳、毛年、刘改平、刘治禹、李浩、李孟然、张峰、周建明、周丽群等或为本书提出了宝贵的意见,或提供了资料,在此表示感谢!

由于编者水平有限,错误在所难免,敬请读者批评指正.

张 学 元

2001 年 6 月

目　　次

第一章　极限与连续

§1.1　函数的典型题例

1.1.1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$；

(2) $y=\begin{cases}(x+\pi)^2-1, & -5<x<-\pi;\\ \cos x, & -\pi\leqslant x\leqslant\pi;\\ (x-\pi)\sin\dfrac{1}{x-\pi}, & \pi<x<9.\end{cases}$

分析　如果函数是由解析式给出的，求其定义域就是求函数表达式有意义的自变量可取的一切实数值的集合，一般是列出不等式(组)，再求解.

如果函数是分段函数，它的定义域就是求各个子区间的并集.

解　(1) 要使函数 $y=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$ 有意义，必须要求自变量 x 满足

$$\begin{cases}2+x-x^2\geqslant 0;\\ \left|\lg\dfrac{x}{10}\right|\leqslant 1,\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}(2-x)(1+x)\geqslant 0;\\ -1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1.\end{cases}$$

由 $(2-x)(1+x)\geqslant 0$　解得 $-1\leqslant x\leqslant 2$，由 $-1\leqslant\lg\frac{x}{10}\leqslant 1$ 解得 $1\leqslant x\leqslant 100$，故所求函数的定义域为

$$D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}\cap\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 100\}$$
$$=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}=[1,2].$$

(2) 这是一个分段函数，直接求各个子区间的并集，即得定义域

$$D=(-5,-\pi)\cup[-\pi,\pi]\cup(\pi,9)=(-5,9).$$

1.1.2　设 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$；　(2) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$.

分析　要保证复合函数 $f[\varphi(x)]$ 有意义，自变量 x 既要在 $\varphi(x)$ 的定义域之中，又要 $\varphi(x)$ 的值落在 $f(x)$ 的定义域之中.

解　(1) 依题意有 $0\leqslant\sin\dfrac{\pi}{x}\leqslant 1$，即

$$2n\pi\leqslant\frac{\pi}{x}\leqslant(2n+1)\pi\quad(n=0.\pm 1,\cdots).$$

当 $n\neq 0$ 时，$2n\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant(2n+1)$，即 $x\in\left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right]$，

当 $n=0$ 时，$0<\dfrac{1}{x}<1$，即 $x>1$.

$f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$的定义域 $D=\left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right]\cup(1,+\infty)$.

(2) 由题设，有

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1;\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a;\\a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$$

注意到 $a>0$，只可能有两种情形，当 $1-a\geqslant a$ 时，即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，解得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，即 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域

$$D=[a,1-a].$$

当 $1-a<a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，上述不等式组无解，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域不存在.

1.1.3　设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},\ |x|<1;\\x^2+1,\ |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 试求：

(1) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(-2)$； (2) $f[f(x)]$.

分析 求分段函数的函数值，必须根据自变量取值的所在区间代入到相应区间的表达式中进行计算.

解 (1) 因为 $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$；$|-2|=2>1$，所以

$$f(-\frac{1}{2})=\sqrt{1-(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f(-2)=(-2)^2+1=5.$$

$$(2) f[f(x)]=\begin{cases}\sqrt{1-f^2(x)}, |f(x)|<1;\\ f^2(x)+1, |f(x)|\geqslant 1.\end{cases}$$

因为当 $0<|x|<1$ 时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$，所以

$$f[f(x)]=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}=\sqrt{x^2}=|x|.$$

当 $x=0$ 时，$|f(0)|=\sqrt{1-0^2}=1$，故

$$f[f(0)]=f^2(0)+1=1^2+1=2.$$

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=|x^2+1|>1$，故

$$f[f(x)]=f^2(x)+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2.$$

综上所述，得

$$f[f(x)]=\begin{cases}-x, & -1<x<0;\\ 2, & x=0;\\ x, & 0<x<1;\\ x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

1.1.4 设

$$f(x)=\begin{cases}1, |x|<1,\\ 0, |x|=1,\\ -1, |x|>1;\end{cases} \quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1; \\ 0, & |e^x| = 1; \\ -1, & |e^x| > 1. \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1, x < 0; \\ 0, x = 0; \\ -1\ x > 0 \end{cases} \quad \text{（见图 1-1）.}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, & |x| < 1, \\ e^0 = 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{（见图 1-2）.}$$

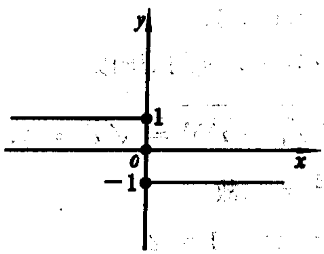

图 1-1

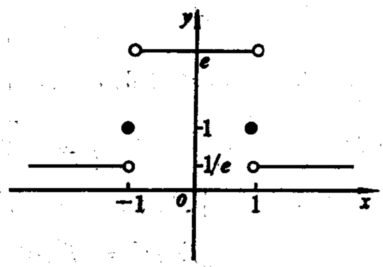

图 1-2

1.1.5　已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 的表达式.

分析　函数符号 f 是表示函数关系中的对应法则，$f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 表示该法则作用在变量 $x+\frac{1}{x}$ 上，$f(x)$ 表示此法则作用在变量 x 上，本题是要求这个函数的特定法则.解答这类问题，往往采用代换和拼凑两种方法.

解　因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2$，所以

$$f(x) = x^2 - 2.$$

1.1.6　已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，求 $f(x)$.

解法 1　令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，代入所给函数，有

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}.$$

由于函数关系与自变量用什么字母表示无关，故

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

解法 2　$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$，故

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

1.1.7　设 $f(x)$ 满足条件 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$（$a$ 为常数），且 $f(0)=0$，求 $f(x)$ 的表达式.

解　将 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$ 中的 x 换成 $\frac{1}{x}$，得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax.$$

由上两式消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，得

$$f(x)=\frac{a(2-x^2)}{3x}\quad(x\neq 0),f(0)=0.$$

1.1.8　设单值函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0\quad(0<x<\mathrm{e}),$$

且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

解　将 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$ 看成 $f(\ln x)$ 的一元二次方程，解得

$$f(\ln x)=x\left(1\pm\sqrt{1-\ln x}\right)=\mathrm{e}^{\ln x}\left(1\pm\sqrt{1-\ln x}\right),$$

故 $f(x)=e^x\left(1\pm\sqrt{1-x}\right)$，由 $f(0)=0$，得

$$f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x}).$$

1.1.9 设 $f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ x, x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x+1)=x^2+x+1$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 因 $g(x+1)=x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1$，故

$$g(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$ 于是

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & g(x)<0;\\ g(x), & g(x)\geqslant 0,\end{cases}=x^2-x+1,$$
$$x\in(-\infty,+\infty);$$

$$g[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1, & x<0;\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

1.1.10 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(2) $f(x)=\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{(1-2x)^2}$.

分析 判断函数的奇偶性常用定义：若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 无论是偶函数还是奇函数，它们的定义域都是关于原点的对称区间.

解 (1) $$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^x}{1+e^x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$=-\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}$$
$$=f(x),$$

故所给函数为偶函数.

(2) $$f(-x)=\sqrt[3]{(1-2x)^2}-\sqrt[3]{(1+2x)^2}$$
$$=-\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}-\sqrt[3]{(1-2x)^2}\right)=-f(x),$$

故所给函数为奇函数.

1.1.11 试证:定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和,且表示法是唯一的.

证 令$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,

$$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

因为 $F(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]$

$$=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=F(x),$$

故$F(x)$为偶函数.同理可证$G(-x)=-G(x)$,即$G(x)$为奇函数,而$F(x)+G(x)=f(x)$,

故$f(x)$可表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

设有偶函数$\varphi(x)$和奇函数$\Psi(x)$,使得

$$f(x)=\varphi(x)+\Psi(x),$$

从而有 $$f(-x)=\varphi(-x)+\Psi(-x)=\varphi(x)-\Psi(x).$$

由以上两式,得$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=F(x)$;

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=G(x).$$

这就证明了表示法是唯一的.

1.1.12 下列两函数中哪个是周期函数,对于周期函数,指出其周期.

(1) $y=x\cos x$; (2) $y=\sin^2 x$.

分析 判断一个函数的周期性一般有两个方法:一是用反证法,利用定义证明周期的不存在性;另一个是将其恒等变形为周期函数的和、差、积、商.

解 (1)用反证法.设$y=x\cos x$的周期为$T>0$,则有

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x.$$

令 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$,有

$$\begin{cases}T\cos T=0;\\ \left(T+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{T+\pi}{2}\right)=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}\cos T=0;\\ \sin T=0.\end{cases}$$

显然这样的 T 是不存在的,故 $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(2) 用恒等变形法,因为

$$y=\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,$$

又 $\frac{1}{2}\cos 2x$ 是周期为 π 的周期函数,而常数 $\frac{1}{2}$ 也可以看作是周期为 π 的周期函数.因此它们的差即 $y=\sin^2x$ 是周期为 π 的周期函数.

1.1.13 若函数 $f(x)$ 在定义域内满足 $f(x)=f(2a-x)$,则称 $f(x)$ 对称于直线 $x=a$.试证:当函数 $f(x)$ 对称于直线 $x=a$ 及 $x=b(a<b)$ 时,$f(x)$ 必为周期函数.

证 因为 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$,故有

$$f(x)=f(2a-x),f(x)=f(2b-x).$$

由第二式知

$$f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f(2b-2a+x).$$

再注意到第一式,有

$$f(x+(2b-2a))=f(x).$$

这就证明了 $f(x)$ 是以 $(2b-2a)>0$ 为周期的周期函数.

1.1.14 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$;

(2) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$,又问 a、b、c、d 满足什么条件时,这反函数与直接函数相同?

(3) $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<-1;\\ -x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ \ln(x+1), & 0<x\leqslant \mathrm{e}.\end{cases}$

分析 求 $y=f(x)$ 的反函数，先由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$，再按习惯自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，得反函数 $y=\varphi(x)$.

解 (1) 由 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$，解得

$$x=\sin\frac{1}{4}(y^2-\pi).$$

所以反函数为 $y=\sin\frac{1}{4}(x^2-\pi),x\in[0,\sqrt{3}\pi]$.

(2) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，所以反函数为

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}.$$

欲使反函数与直接函数相同，只需

$$\frac{-dx+b}{cx-a}\equiv\frac{ax+b}{cx+d},$$

去分母化简得 $(a+d)[cx^2+(d-a)\cdot x-b]\equiv 0$，所以这时的条件是

$$a+d=0\text{ 或 }b=c=0\text{ 而 }a=d\neq 0.$$

(3) 当 $-\infty<x<-1$ 时，由 $y=x$ 解得

$x=y(-\infty<y<-1)$；当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，由 $y=-x^2$ 解得 $x=-\sqrt{-y}(-1\leqslant y\leqslant 0)$；当 $0<x\leqslant \mathrm{e}$ 时，由 $y=\ln(x+1)$ 解得 $x=\mathrm{e}^y-1(0<y\leqslant\ln(1+\mathrm{e}))$.

因此，所求的反函数为

$$y=\begin{cases}x, & -\infty<x<-1;\\ -\sqrt{-x}, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ \mathrm{e}^x-1, & 0<x\leqslant\ln(1+\mathrm{e}).\end{cases}$$

1.1.15 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$（图 1-3），当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并说明其定义域.

解 $AB=DC=\dfrac{h}{\sin 40°}$，从 $S_0=\dfrac{1}{2}h(2BC+2h\cot 40°)$ 得

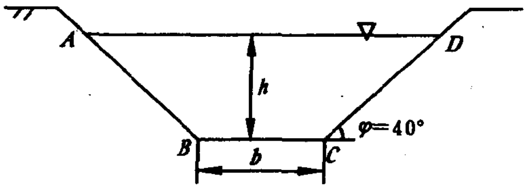

图 1-3

$BC = \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40°$,所以 $\quad L = \dfrac{S_0}{h} + \dfrac{2 - \cos 40°}{\sin 40°} h.$

自变量 h 的取值应满足

$$\begin{cases} h > 0, \\ \dfrac{S_0}{h} - h\cot 40° > 0. \end{cases}$$

解此不等式组得定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40°}$.

§1.2 求极限的方法

极限方法是高等数学中的一个最基本的重要方法．导数、定积分和级数等概念的引进都和极限紧密相关，而这些概念引进后，又充实了求极限的方法．

一、求极限的常用方法

1. 利用极限的四则运算求极限

在求极限的试题中，一般都是$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty - \infty$，$0 \cdot \infty$，1^{∞}，∞^0，0^0 等七种类型的未定式，这时不能直接进行极限的四则运算，总是先对函数施行各种恒等变形，消去不定因素后，再用极限的四则运