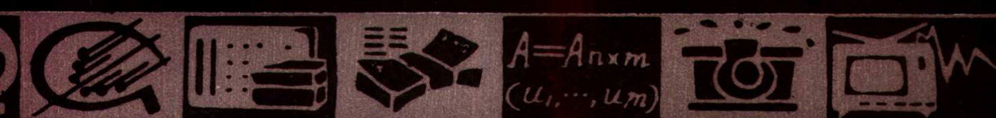
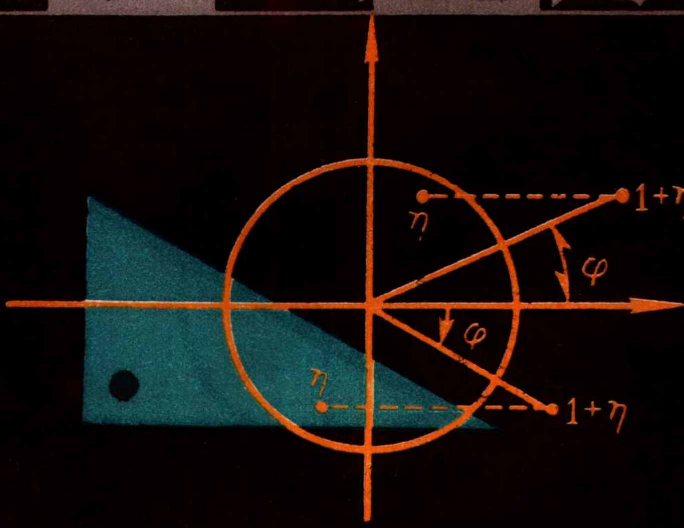
XIANXINGGUIHUA
YUJINGJIGUANLI

线性规划与经济管理

经济管理知识读物





江苏人民出版社

经济管理知识读物

线性规划与经济管理

钱志坚 编著

江苏人民出版社

线性规划与经济管理

钱志坚 编著

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　南通县印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32　印张 8.5　字数 177,000

1981年8月第1版　　1981年8月第1次印刷

印数　1—10,500册

书号：4100·015　　定价：0.53元

前　言

管理，对任何一个企业来说，都是不可缺少的一个重要手段。任何企业只要改进管理，加强管理工作，即使在不增加任何设备的情况下，也可以大幅度地提高产品的数量和质量，使企业的生产获得发展。如何改进管理工作，提高管理水平，是一个复杂而需要不断进行认真研究的问题。本书仅就如何运用线性规划方法，提高经济管理水平这一个方面，向企业管理工作者，作一些初步的介绍。

作为一门新的技术，线性规划要在我国的经济管理中充分发挥效力，除了必须了解和掌握这个方法之外，还需要结合我国的具体情况来运用这个方法。因为，线性规划虽然具有一定的数学结构，但在实际应用中并非一成不变。究竟应当如何按照具体情况，应用线性规划原理解决管理问题，并不存在一个通用的公式。只有在实践的过程中学习，从应用线性规划已经取得成功的那些经验中去学习。有鉴于此，本书从国外的有关最新著作中，搜集了不少关于线性规划如何具体应用的资料。虽不尽完善，但仍可说是本书的一个特色。

另外，线性规划作为一项有效的资源配置方法，除了用于企业管理，还可以作为整个国民经济的资源配置方法。欧洲（如匈牙利），近东（如土耳其）有些国家在这方面已经作了很好的尝试。本书的第十章和第四、五章的有关部分，对这个问题的某些方面作了初步的探索。由于本书偏重于微观

经济的资源配置问题，关于宏观经济范围的，故未多赘。

线性规划已成为一门国际性的重要科学，正在日益发展中。本书的各种解法或算法，为了适应这个形势，力求以目前国际通用的为准。其中有些如对偶单纯形解法，沃尔格运输问题初始基底解法，“0—1”规划解法等，在国内尚属初次与读者会面。

线性规划不仅是一个管理方法，它还具有严密的数学基础和深刻的经济含义。本书对这两方面均作了较为系统的探讨。它将证明对从事应用数学、经济理论、计量经济学的学习或工作的同志来说，无疑是一个重要的工具。

最后，线性规划随着工农业和四化建设事业的发展，有关资料的逐步完善，以及电子计算机的普及，必将在经济管理方面发挥更大的效力。

由于编著者缺乏实践经验，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 著 者

一九八一年三月

目　　录

第一章　线性规划概述

线性规划是四十年代末期开始发展的一门新兴科学。它是由于受到三十年代关于线性经济模型的讨论的影响和列昂节夫的投入—产出模型的直接促进，以及吸取在第二次世界大战时期美国空军后勤工作的实际经验的总结而发展成长起来的。

一、资源的最优配置

一般地说，线性规划研究有限资源的最优配置，以实现给定的目的，取得最优经济效果。本来，资源配置问题一直就认为是经济学的一个十分重要的问题。给定一个国家对商品的各种需求，还给定该国的资源种类和数量，如何组织生产，合理使用各种资源，以便更好地满足国民的需求。这个问题从时间的角度又可分为：在短时期内满足需求的静态均衡问题，和在长时期中满足需求的动态均衡问题。沃尔德在三十年代中期，证明了静态均衡模型的存在解和唯一解。冯·诺意曼1937年在这个模型的基础上提出了著名的动态封闭模型。列昂节夫从1936年起陆续发展的投入—产出模型，从投入—产出的角度分析了资源配置问题。他在四十年代末提出了投入—产出开放模型，解决如何配置资源以满足给定的最终需求的问题。

在第二次世界大战时期，美国空军设立了一个研究小

组，专门研究空军的资源配置问题，即空军的后勤工作。他们推广了列昂节夫的投入一产出模型，把它应用于空军的资源配置。乔治·丹齐格是这个小组的成员，他根据这个经验逐步总结出线性规划方法。

空军在战时有很多任务需要完成，而完成这些任务则须要进行各种活动：如采购，招募，维修，保养，训练等。空军的这些任务与活动之间的关系类似列昂节夫投入一产出模型的最终产品和部门总产值之间的关系。但二者的显著差别在于：前者存在着任务与活动之间的多种关系，同一种任务可以用几种不同的活动，或几组不同的活动完成；后者只存在最终产品与总产值之间的唯一关系，一组最终产品存在一组相应的总产值。这样，就需要一个标准，以判别在这些关系中哪个是完成任务的最优方案。这就导致找出最优方案的方法。这个方法就是线性规划。

按照传统的经济分析方法，是找不到资源配置的最优方案的。传统方法先假定有一个生产函数，说明投料与产品产量之间的关系；再假定有一个成本函数，说明投料与成本之间的关系。根据以上两种关系，利用拉格朗日乘数法则，在约束条件下求极大或极小值，可以求出成本函数在受到生产函数约束的条件下的极小值，或者说极小值存在的条件*。满足这个条件，就可以求得给定产量的最低成本，也就是资源

---

* 用数学表示：这个问题为求以下成本函数的极小值：

$$C = A + \sum_{i=1}^{M} (w_i v_i) = \text{生产总成本}$$

受以下生产函数的制约

$$\phi(v_1, v_2, \cdots, v_n) = Q^{\circ} = \text{给定量}$$

按照拉格朗日乘数法则，可以得出一个新的方程式

的最优配置。

以上分析是对现实情况的高度概括，从逻辑上说是正确的。但是如果把它作为行动的依据，作为决定生产计划的方针，就会遇到很多困难。因为现实情况要复杂得多，可能生产几种产品而不是一种产品；可以使用多种生产方法而不是一种生产方法。更重要的是在决定资源最优配置时，没有一个给定的生产函数，因为生产函数一般是比较复杂的。这样，以给定生产函数为起点的分析方法，也就无从进行。

$$G = A + \sum_{i=1}^{n} w_i v_i + \lambda \left[Q^\circ - \phi(v_1, v_2, \cdots, v_n) \right]$$

λ为拉格朗日乘数。G函数中只有投料v_1，v_2，…，v_n是变数。w_1，w_2，…，w_n是相应的给定的投料价格。G函数的相对极小值要求满足以下条件：

$$\frac{\partial G}{\partial v_i} = 0 = w_i - \lambda \phi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

由于 $w_1 = \lambda\phi_1$，$w_2 = \lambda\phi_2$，…，$w_n = \lambda\phi_n$

所以 $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\phi_1}{w_1} = \dfrac{\phi_2}{w_2} = \cdots, \quad = \dfrac{\phi_n}{w_n}$

ϕ_1为投料1的边际产量，即当其他条件不变，由于增加一单位投料1（即v_1）而引起的产量X的增加，ϕ为投料2（即v_2）的边际产量，ϕ_3为投料3（即v_3）的边际产量，如此等等。w_1为投料1的价格，w_2为投料2的价格，……。因为边际产量可以随投料的增加而减少，或随投料的减少而增加，所以通过投料量的调整，可以使各投料的边际产量与价格均保持一定的比例$\frac{1}{\lambda}$。（见保罗·塞缪尔森：《经济分析的基础》，剑乔，哈佛大学出版社1963年版，第60页。）这时给定的产量Q°的成本最低，用以生产的资源的配置（每种投料用料多少）最优。

二、线性规划和最优资源配置

线性规划是一个更接近现实生产情况的资源最优配置方法。这个方法可以计算同时生产多种商品和使用多种投料或生产元素，以及运用多种生产方法生产的资源配置问题。它不同于传统方法，还在于并不先求出一个总的生产函数，而是同时考虑（有时是大量的）各种可能的生产函数的相互关系，以及其他条件，最后得出一个最优方案，即最优的资源配置。

线性规划把这些各种可能的生产函数和给定的各种资源系统地组织在一起，用数学方法，写成约束条件。同时，用目的函数来代替成本函数。这样，线性规划就成为在一组约束条件下，求目的函数的极大或极小值。约束条件和目的函数是构成线性规划问题的两大组成部分，任何线性规划问题均由这两部分组成。

目的函数是资源配置的目的。但这个目的是可以增加或减少的，是一个随有关变量变动的函数。目的在有些问题中可能是商品的产量，利润，或成本；在另一些问题中可能是完成某种工作所需的时间，到达某个目的地的距离，或通过某一运输网的货运流量。目的也可能是一个企业的，一个地区的，或整个经济的。后者如整个经济的就业、国民收入、国民收入增长率等等。

约束条件是实现目的的各项条件。这些条件通常包括用以实现目的的资源、厂房、设备、人工、原料、时间等等。另外，还有另一类的约束条件，使用资源实现目的的方法。这些方法是由生产工艺和技术水平决定的。所以，总的来说，

资源和生产技术构成了线性规划的约束条件。

线性规划问题是在约束条件下，求目的函数的极大或极小值。从问题的实质来看，这也就是如何合理安排 经 济 工作，实现最优经济效果。这里的工作就是决定目的函数中的各个变量值；最优经济效果，就是目的函数的极大或极小值，而工作的条件就是主要由资源和生产技术组成的约束条件。

三、线性规划举例

§1．问题和资料

设某工厂共有三种设备：车床A，钻 床B，磨 床C，共生产四种产品1，2，3，4。每种产品都须要经过这三种机器的加工。假定加工的顺序是先车床后钻床和磨床；并假定产品转换机器的时间，和机器转换产品种类的时间都是极小的，可以略去不计算。根据过去的生产经验和设备情况，该车间列出了以下的各种产品，在各类机器上的标准加工时间。在A机器——车床上的加工时间每周为：第1种产品1.5小时，第2种产品1小时，第3种产品2.4小时，第4种产品1小时。在B机器——钻床上的加工时间每周分别为：第1种产品1小时，第2种产品5小时，第3种产品1小时，第4种产品3.5小时；在C机器——磨床上的加工时间每周为：第1种产品1.5小时，第2种产品3小时，第3种产品3.5小时，第4种产品1小时。

另外，这三种机床每周可以加工的总数为：车床2千小时，钻床8千小时，磨床5千小时。还根据成本会计计算出这四种产品的单位产品利润为：第1种产品每生产1件可以获利5.24元，第2种产品每生产1件可以获利7.30元，第3

种产品每生产1件可获利8.34元，第4种产品每生产1件可获利4.18元。

根据以上资料，这家工厂应该如何安排生产，从而使利润最大？应该有怎样的生产计划？有几种可能的计划？什么是最优的生产计划？更具体地说，在现有的设备和资源的情况下，每种产品每周应当生产多少才可以使利润最大？要知道，这家工厂可以订出大量不同的每周生产计划。例如，可以只生产第1种产品，或其他2，3，4种中的任何一种产品。也可以只生产第1种和第2种，或任何两种产品的不同组合。同样，可以生产四种产品中任何三种的不同组合。当然，也可以四种都生产。以上是关于生产的品种。在每一种产品的组合中，可以有大量的数量上的不同组合。同样，还可以有其他的产品组合，以及产品组合的大量的不同的数量组合。

当然，我们可以根据产品的利润来作出每周生产计划。例如，由于第3种产品的利润最大，可以只生产第3种。但这样一来，因为第3种产品的钻床加工量较小，每周每件只需1小时，钻床的大量工时就要白白地浪费。如果以较低一级的单位利润为标准，可以生产第2种产品，但这样，又会有大量的车床工时不能利用。总之，必须有两种或两种以上的产品组合，才能不致使钻床或车床的大量工时白白地浪费。

§2. 目的函数

象这样头绪很多，似乎是非常复杂的问题，须要借助于数学方法来求出解答。线性规划就是为了适应这样的需要而产生的。

假定以x代表每种产品的每周产量：x_1为第1种产品的

每周产量，x_2为第2种产品的每周产量，x_3为第3种产品的每周产量，x_4为第4种产品的每周产量。我们面临的问题就是决定这四种产品每周分别的产量，也就是求x_1，x_2，x_3和x_4的值。这些产品和产量可以充分利用设备，使利润最大。

显然，这个问题的目标是谋求最大利润，而利润是随产品的种类和产品的数量而决定的。以Z代表利润，可以写成以下的目的函数，或目的方程式

$$Z = 5.24x_1 + 7.30x_2 + 8.34x_3 + 4.18x_4$$

$5.24x_1$即$5.24 \times x_1$，也就是由于生产第1种产品每周可以获得的利润。例如$x_1 = 100$，则由于生产这种产品，每周可以获得利润$5.24 \times 100 = 524$元。Z就是四种产品每周利润的总和。不同的产量导致不同的利润。如$x_1 = 80$，则生产x_1的利润就要相应减少；$5.24 \times 80 = 419.20$元。利润随产量变化而变化，所以利润是产量的函数，亦称目的函数。不同的一组x值，导致不同的利润。

§3．约束条件

利润虽然随产品的产量增加而增加，但每种产品不能无限制的增加，还要看生产设备的情况而定。这就要求对各种约束条件加以适当的考虑。首先，让我们考虑第一种设备——车床。这个设备每周可以对产品进行加工的总时数为2千小时。四种产品都需要在车床上加工，虽然每件加工的时间长短不等。第1种产品每生产1件每周就须在车床上加工1.5小时；第2种产品每件每周须在车床加工1小时；第3种产品每件每周须在车床加工2.4小时，而第4种产品每件每周则需占用车床1小时。把这些产品合并考虑，可以用以下方式表示

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4$$

这个式中的$1\times x_2$按照数学上的惯例可以把1略去，写成x_2。这个方程式是四个数量之和，表示四种产品每周总共对车床的占用时间。$1.5x_1 + x_2$为第一种和第二种产品每周总共占用的车床时间。$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3$为第1，第2，和第3种产品每周总共占用车床的时间。所以$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4$为四种产品每周占用车床的总时间。这个总时间显然不能超过车床每周可以使用的总时数2千小时。这样，可以写出第一个约束条件的方程式：

$$1.5x_1 + x_2 + 2.4x_3 + x_4 \leqslant 2000$$

这个约束条件就是说：各种产品需要在车床上加工的总计在一起的加工时数只能等于或小于车床每周可以工作的总时数2千小时。

按照同样的道理，可以列出其余的约束条件：对钻床的需要，每周只能小于或等于8千小时，不能超过；对磨床的需要，每周只能小于或等于5千小时，不能超过。用数学形式表示，这两个约束条件的方程式是：

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 3.5x_4 \leqslant 8000$$

$$1.5x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + x_4 \leqslant 5000$$

每周的任何生产计划都必须满足上述三个约束条件。很明显，任何超过这些条件的计划都因为设备不够而无法实现。只有满足这三个条件，使Z（利润）最大的生产计划，以一组x值代表，才是最优生产计划，或最优每周生产方案。

在这些生产计划中，须要决定每种产品的产量。因为每种产品只能生产一定的数量，或根本不生产。这就是说产量应为正数或零，即x可以为零或大于零，而不能为负数。所以可以列出以下一组新的约束条件：