

数学教育学系列理论丛书

数学思维方法

邓鹤年 王玉启
张维升 王秋海
官子吉

王宪昌 编著
审校

吉林大学出版社

数学思维方法

邓鹤年 王玉启 王宪昌 编著

张维升 王秋海

宫子吉

审校

吉林 大 学 出 版 社

一 九 八 九 年 一 月

责任编辑 彭林宜

封面设计 张维升

数 学 思 维 方 法

邓鹤年 王玉启 王宪昌 编著
张维升 王秋海
宫子吉 审校

吉林大学出版社发行

吉林省四平师范学院印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32 1989年1月第1版

纸张：5.75 1989年1月第1次印刷

字数：122千字

印数：1—1000册

ISBN 7-5601-0198-4 / O · 37 工本费 2.50元

前 言

数学思想方法是数学教育学系列理论中一门主要课程。它主要是从思维科学的层次研究中学数学的一般方法，隶属于科学方法论。

一名合格的中学数学教师，不仅要掌握必备的数学专业知识，而且还应知晓存在于这些知识之中的数学思维方法，了解其一般特征和规律，掌握具体思维方法的形式和使用步骤；不仅要从理论上通晓数学思维方法，而且还要会应用于数学教学的实践。作为中学数学教师，仅满足于将专业知识准确无误地传授给学生，这在当今“知识爆炸”的时代是远远不够的，还必须对中学生进行各种能力和技巧的培养，尤其是进行数学思维方法的训练。为达到这一目的，适应形势的要求，探讨和研究中学数学思维方法，我们编著了这本小册子，作为高师院校学生开设本课的教材。可以预见，在不远的将来，数学思维方法与数学方法论，将在高师数学系的课程表上占有重要地位。

在写作过程中，我们曾参阅大量文章，书末列出的只是主要参考书目，因篇幅关系未能全部列出，不敢掠人之美，在此一并向有关作者致意。

作为数学思维方法，本书未能全部包罗，未能形成体系；而且所论八章也分属几个层次，并有相互交叉、渗透之处。鉴于作者水平，本书一定还存在不足之处，恳请读者指正。

目 录

第一章	数学思维	1
第二章	化归法	16
第三章	归纳法	60
第四章	演绎法	86
第五章	分析法和综合法	100
第六章	数学模型方法	122
第七章	公理化方法	140
第八章	培养数学家的摇篮	
	——数学发明创造的基本方法	161

第一章 数学思维

一、思维与数学思维

当前，在数学教学中十分重视发展学生思维、培养思维能力的工作。从我国教育培养目标出发，发展思维、培养思维能力被视为是提高民族素质，出好人才的基础工作；它已成为数学教学研究活动中的核心问题；对思维问题的研究也为数学教学改革提供了科学的依据。

数学思维从属于一般的人类思维。思维是什么？思维的本质及规律可以被揭示吗？这样一些问题在目前还属于研究不够充分，论证得不够明确，甚至存在着不少争论的问题。但是，大量事实说明思维是可以研究的，思维已成为多种学科的研究对象。我们将从简述人类的一般思维开始，就数学思维，数学思维方法等问题概述如下：

1 思维是什么？

思维是一种心理现象，所谓心理现象就是人脑对客观现实的能动的反映，所以思想是一种反映，是人脑对客观现实这种能动反映的高级形式。

具体地对思维是什么可以给出一种描述性的定义：思维是人脑对客观事物的本质和规律性关系的概括与间接的反映。

为了更深刻地理解思维，我们再作一些具体的分析。

(1) 思维属于认识过程。认识过程是十分丰富的，它

包括感觉、知觉、表象、记忆、思维和想象等。在认识论中一般把人的认识过程分为感性认识阶段，诸如感觉、知觉、表象等，通过这些人们仅能获得事物的表面认识；思维则是在感性认识的基础上，通过分析和综合以及派生的抽象、概括、比较、分类、具体化和系统化过程等等，正是这些思想活动完全的反映了整个事物，反映了事物的本质；反映了事物的内部规律性。所以思维是在感性认识的基础上进行的理性认识，属于认识过程的高级阶段。

(2) 人类的实践活动是思维的基础，人的感性认识特别是表象是对客观世界的直接感知过渡到抽象思维的一个中间环节，词和语言是思维活动的工具。所以思维是在人的实践活动中，在感性认识的基础上，借助于词、语言为工具，以知识经验为中介而实现的。

2 思维的特征

思维作为一种心理现象具有区别其他心理现象的一些特性和表现。我们要研究思维则必须掌握其特征。

(1) 思维的概括性

概括性是思维活动最显著的特征。人们之所以能揭示事物的本质，发现事物内在的规律性，主要是通过抽象和概括。

概括性是研究思维活动的重要指标；概括水平是衡量青少年思维发展的等级标志；因此也成为培养思维能力的一个重要方面。

(2) 思维的间接性

间接性是思维活动的另一重要特征。人们之所以能对没有直接作用于感觉器官的事物及其属性加以反映；思维可以

对根本不能直接感知的事物作出反映，思维之所以对在现实的基础上已认识到的事物进行蔓延式的无止境的扩展，主要是思维凭借已有的知识经验对客观事物进行间接的反映。

思维对事物所具有的间接性反映，关键在人们已获得的知识与经验的作用。正因为如此培养思维能力，必然要重视思维主体的知识经验丰富程度及知识结构等。

(3) 思维的目的性和问题性

有目的地认识、理解和解决问题是人类思维独有的本领。目的性是人类思维的根本特征。思维产生于主体面前所出现的新目的，新任务，新的活动要求和条件，思维也总指向解决某个任务，思维的形式概念、判断、推理等即是解决问题的材料，又是解决问题的结果。正因为如此，我们在教学目的中突出强调解决问题、都接近于“发展思维”的意义。

思维的问题性表现在如下两个方面。一是表现在解决问题过程的思维活动上：发现问题→明确问题→提出假设，找出并确定解决问题方案→检验假设。二是表现在对问题或任务的理解上。

所谓理解就是能认识或揭露事物的本质和其他事物的关系；或者可以这样解释对问题或任务的理解：理解就是把新的知识经验纳入已有知识结构。在日常实践中，对问题的理解包含是多方面的，诸如理解事物的因果性，理解事物的内容，形式、结构等，但最主要的有二点：

第一是理解事物的因果关系；

第二是透过现象理解本质。

(4) 思维的逻辑性

研究思维问题，我们通常说到的人类的一般思维是指逻辑思维，即理性思维。这是人类与动物有本质区别的一种表现。我们所说的思维具有逻辑性，是指理性思维过程具有一定的形式、方法，按一定规则进行。

感知、表象这些是感性材料，其中特别是表象是由感性认识向理性过渡的中介，仅仅是思维的基础，而概念、判断、推理这些是理性材料，凭借这些进行思维活动，这个由概念构成判断进行推理的阶段即理性认识阶段，所以概念、判断、推理就是思维的形式，但是如何形成概念、判断、推理呢？这里有一个方法问题；同时，思维活动要遵循一定的规律或法则，思维发展本身可以分成两个阶段：一个阶段是普通逻辑阶段；另一个是辩证逻辑思维阶段，它们都有必须遵守的思维规则。

3、思维的分类

思维活动是一种复杂的心理现象，所以思维具有多样性，多种形态。

(1) 根据思维的抽象程度分类

思维作为一种理性认识过程，根据认识过程的抽象程度，可分为直观动作思维，具体形象思维、抽象逻辑思维。这三种思维的基本形态即有质的区别，又有内在联系。无论从人的种系和个体上看思维的发生、发展过程，一般都要经历直观动作思维→具体形象思维→抽象逻辑思维，但在其整体上这种发展顺序又不是绝对化，对于一个思维成熟者，每一种思维都有可能得到高度发展，各类思维之间又能相互渗透，所以不能绝对的，简单地把它们分成优劣高低。每种思维都有自己的特征表现：

直观动作思维：是指直接与物质活动相联系的思维。在种系上人类最初的思维就是这种思维，在个体上，最初的思维也是这种思维。一般的说婴儿是以直观动作思维为主的。

具体形象思维：是指以具体表象为材料的思维，虽然在主体上也保持着思维与实际动作的联系，但已经不那么直接了，它可以脱离面前的直接刺激物和动作，借助于表象进行思维了。它的进一步发展，一是通过对表象进行抽象概括逐渐形成逻辑思维；一是通过逻辑成分的渗透发展为一般的形象思维（一般又称形象逻辑思维）。一般地，幼儿期和学龄期是以具体的形象思维为主的。

抽象逻辑思维：是指在感性认识的基础上，以概念、推理和判断等形式表现出的思维形态。这是人类思维的核心形态，又称理性思维。抽象思维的形式有形式逻辑与辩证逻辑之分，两者即有区别又有联系，它们是相辅相成的。形式逻辑的概念具有抽象性和确定性，辩证逻辑的概念具有具体性和灵活性，形式逻辑反对自相矛盾，辩证逻辑强调事物内在矛盾，这些正是事物具有相对稳定性与事物具有辩证关系的反映，辩证逻辑是思维发展的高级阶段，它是在形式逻辑基础上形成的。一般的说青年初期抽象逻辑思维已占相对优势，所谓相对优势包含两层含义：一是思维结构中，具体形象思维和抽象逻辑思维并存；二是说明这个时期逻辑思维尚不成熟。

（2）根据思维的智力品质分类

按着思维的智力品质可将思维分为：再现性思维和创造性思维。

再现性思维：即一般地思维活动，表现在认识活动中属

于整理性思维。

创造性思维：它具有一般性思维的特点，但又不同于一般思维活动。创造性思维紧紧地联系着创造性活动；创造性思维要在现有材料的基础上进行想象，是思想与想象的有机统一，创造性思维是逻辑思维与直觉思维的统一。

(3) 从思维角度，逻辑规则、评价标准、结果等维度上分类。

思维过程是一个很复杂的心理现象，有感性过程，也有非感性过程；有正向过程，也有逆向过程；但我们大体上可以从思维的角度，逻辑规则、评价标准、思维结果等维度上分为单维型思维、多维型思维。

单维型思维：是指只追求一个思维角度，一种逻辑规则、一个标准、一个结果的思维形态。直线思维即属单维型思维。这种思维由于只追求从一个起点、一个思维指向、一个思维角度认识丰富的，呈立体结构的事物，时常表现出片面性；单维型思维易造成思路固定，思域狭窄的封闭性；在复杂事物面前，往往囿于原有逻辑线索、评价标准，排斥多角度看问题，易形成保守性。

多维型思维：是指在思维过程中，由多个思维起点、多个逻辑规则、多个评价标准、多个思维结果而组成的两个或两个以上的逻辑线索的思维形态。它的主要思维特征：具有多个思维指向，具有多个逻辑规则，具有多个评价标准，具有多个思维结果，多维型思维本质上是网络思维。多维型思维是培养创造性思维的重要方面。多维型的思维形态很多，发散思维，逆向思维，辐射思维等均属此类。

4、数学思维

②

以上我们对什么是思维作了概述，现在要说明什么是数学思维？数学思维从属于一般的人类思维，它服从思维的一般规律，即把思维科学中的范畴应用于数学认识活动之中。但是，由于数学本身的特点，又决定着它应有自己不同于一般思维的特点。数学思维应是人脑认识数学对象（形、数量）的认识过程。

（1）数学思维是什么？

我们可以这样定义数学思维：数学思维是人脑和数学对象（形、数等）交互作用，以抽象概括等方法，并借助于数学符号和语言，对客观事物的数学结构和数学模型的间接概括的反映。

更具体地说，数学思维是以数学概念为思维细胞、通过数学判断，数学推理等思维形式认识数学对象，揭示数学结构和关系的。

（2）数学思维素质

数学思维的素质是指衡量思维质量的因素。数学思维与其素质有关，一般思维素质指：灵活性、深刻性，概括性、独立性，目的性、批判性等，数学思维的素质则更强调思维的灵活性、深刻性、概括性、论证性、条理性、简明性等。

（1°）灵活性

数学思维的灵活性又可称思维多向性，就是能从不同的角度去思考问题，即思前因，又思后果，扩大思路，有所突破。它是思维在具有一定广度和一定主动性基础上产生的一种思维素质。具体的表现在能自如的从一种心理运算转换到另一种性质不同的心理运算上；表现在解法的多样化上；表现在能轻易的重建一定的思维模式上。总之，善于运用类

比，善于用运动变化的观点看待数学问题。

例如，以“一题多写”、“一题多说”、“一题多解”、“一图多变”等进行的“发散机智”，以改变事物量和质的某一方面，从而产生新思路的“换元机智”，以改变解题方向的“转化机智”等思维，均具有思维的灵活性、

(2°) 深刻性

数学思维的深刻性含义即指思维的深度。思维能深入思考内容的本质。具体的表现在善于抓住问题的矛盾的特殊性，能找出最有价值的因素，迅速确定解决问题的策略。

(3°) 概括性

数学思维的概括性含义是指思考问题的广度。具体的表现在善于把知识概括、归类，善于联系新旧知识、不同科目知识，迅速重建知识结构。

(4°) 条理性

数学思维的条理性含义是指能按数学知识内容本身的逻辑关系及程序思考问题。

(5°) 组合性

数学思维组合性的含义是指能将几个可独立的部分结合为一个的思考问题素质。

(3) 数学思维的分类。

1° 具体思维

在数学思维认识过程中，由直观动作思维的进一步发展，一是认识主体对实际动作不直接依赖，而借助于表象进行思考，形成了具体形象思维；二是具体形象思维中逻辑成份的渗透形成的形象思维（又称形象逻辑思维），这二种思维形式统称为数学思维中的具体思维。

这种思维的特征是与事物的具体模型密切联系和相互作用。它的形式可有非操作形式（如感知、观察……）；操作形式（对事物的模型具体操作）；

2° 抽象思维

抽象思维主要指与数学抽象化活动相联系的思维形式。它的主要特征是具有否定性：丢掉研究对象的非本质属性；肯定性：揭示事物某一方面的内容和性质；一般性：经过分析—综合，概括为事物的一般性。其具体数学思维形式有逻辑思维，进行由已知到未知，由特殊到一般地论证；有空间思维，构造研究对象的形状或内部结构。

3° 直觉思维

属于非逻辑思维，是数学发现、发明的重要思维形式，如直觉，想象，灵感等。

二、关于思维方法

人们的思维总是表现为借助于一定的思维方法的展开过程。思维方法作为主体把握客体的方法它具有思维工具的作用和思维活动进行规则的意义。不把握思维方法，是无法进行思维的。

1 关于思维方法

思维方法是“客观事物相互关系的反映，它的原型在关系中。”

关系本来是客观事物之间相互联系的线路、结合方式，这些客观的“线路”，“关系”内化于人的头脑中就转化成思维方法，就获得了相对独立的意义。可见，作为思维方法它不同于知识和概念，在客观世界中，我们可以找到与概念

相对应的实体，方法则没有，我们找不到诸如“分析”、“抽象”、“比较”这类方法所对应的实体，它的“原型”是客观事物之间的相互关系，如：

比较方法是客观事物统一性和多样性辩证统一关系的反映，有统一性才有客观事物的“同”，有多样性才有“异”，因而产生了能“同中求异”，“异中求同”的比较法；

分析与综合法是事物的整体与部分的相互关系的反映，从整体到部分要用分析法，而从部分到整体，必须经过思维的综合；

事物的一般与个别的相互关系，则是归纳法与演绎法的“原型”。

思维方法“是思维活动的进行规则，是思维活动发散和收敛的具体路线，是思维进行精神生产，建构观念产品的工具。”

第一，思维方法使人获得的信息成为知识，并使感性材料有序化。人们获得的那怕是简单的两件感性材料，如不经过思维的第思次加工，它总是杂乱的，不系统的。思维方法则起着在思维加工中将信息列入一定体系，编进程序，使之成为有规范的信息。

第二，思维方法是人们建构现实的工具。对于看得见、摸得着的事物，人们可以通过直观的经验把它再现，而对于人类所面对的现实不都是通过经验可以最终解决的。思维方法则是人们建构现实的中介。

第三，思维方法开拓着人类认识的新领域新角度。大量事实说明，现代科学的每一步新进展，往往是和新方法相互渗透联系着的。

思维方法具有多样性、层次性，它的多样性和层次性源于客观世界的多样性和层次性。

一般可将思维方法分为三个层次：

——哲学思维方法。它是客观世界中事物最一般关系的反映，是其他一切方法的基础。例如：分析和综合的方法，归纳和演绎的方法等；

——一般科学思维方法。它是适用于所有科学领域的共同方法，其实质是哲学思维方法的具体化、特殊化。例如：系统方法、信息方法、公理方法，模型方法等；

——个别思维方法，它是由认识对象的特殊性决定的特殊方法，其实质是前两种思维方法在特殊领域中的特殊运用。例如：数学中的数学归纳法、待定系数法、换元法等。

思维方法的多层次、多样性虽然导源于客观世界的多样性、多层次性，但是作为主体对客体把握方法，它又随着人们对客体的深化认识，使之不断产生新的方法，所以思维方法从来不是现成的工具，它是人们的思维广度和深度的体现。

2 关于数学思维方法

我们阐述数学思维方法时，仅仅限于中学数学教学过程。数学教学应包括数学知识和数学方法两个具体部分的教学，但是长期以来，中学数学教学目的中，因为对数学思维的培养要求不具体，忽视方法的学习而导致了学习数学的基本素质方面的问题。另一方面，无论是一个人所具有能力上分析，还是就一个人掌握具体的数学知识来分析，数学思维方法的学习和掌握都具有其重要意义，能力实际是知识与方法的有机结合，而所谓掌握知识即认识事物的本质和规

律，那正是思维方法本身所高度凝聚着的。

从数学学科总体上分析，一个方面是把数学学科作为一个系统的演绎科学，人们要使用抽象、概括、演绎等思维方法，形成概念，进行判断推理，形成自己的认识结构，这种论证表述的学习认识数学知识的任务，主要是通过整理性思维来进行的，其主要思维方法是形式逻辑方法；另一方面把数学作为一门实验性的归纳科学，人们要使用实验—归纳—推广—类比—联想—猜想等思维方法，创造新的数学思想，开辟新数学领域，数学学习虽然没有具体的创新法，但完全包括这种“创新”思想，这些主要是通过创造性思维来实现的，其主要思维方法是直觉、灵感、发散思维等。

从数学教学具体任务上分析，有如下一些方法：

(1)：建立数学概念的方法。它主要包括形成数学概念的方法；表述数学概念的方法；

(2) 论证数学命题的方法。它主要包括论证数学命题的方法；也包括某种意义上的发现命题的方法；

(3) 解答数学问题的方法。主要包括将问题化为数学问题，提炼数学模型方法；也包括将一个数学问题如何求解，化归方法；

(4) 建构数学知识结构的方法。主要包括使数学知识系统化，建立逻辑体系的方法。

三、研究、学习数学思维的意义

在当前的数学教学中，十分重视发展思维、培养思维能力的工作，它已经成为数学教研活动的核心问题；从我国的教育培养目标着眼，它被认为是为培养人才，提高中华民族