代数学辞典

问题解法

下

问题解法 代数学辞典 下

[日] 笹部貞市郎编 张明梁 周如钰 斯章梅译

问 题 解 法

代 数 学 辞 典

下 册

〔日〕笹部貞市郎 编

张明梁 周如钰 斯章梅 译

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 31 插页 4 字数 1,730,000

1982 年 12 月第 1 版 1985 年 5 月第 2 次印刷

印数 76,001—136,000 本

统一书号：17150·6 定价：（精）6.35 元

出版说明

自明治维新以后，日本为了学习西方科学技术，在中小学数学教育上也刻意输入，大量地翻译了欧美有影响的课本. 以后又自编教材和各种初等数学读物，逐渐地在初等数学教育的取材、编排、题选上形成了自己的特点. 根据国内外的情况，日本数学教育也迭经改革，但仍然有着不同于欧美、苏联的地方. 为了从一个方面了解这种特点，我们组织翻译了这一套题解辞典.

这几本辞典的题目及解答远不是数学教育的全部，但是由于它的写作年代较近，作者在编选题目时又比较注意立足于日本的教育情况，兼顾传统与未来，所以确实从比较宽广的角度反映了日本中学数学教育所注重的东西. 这些都可以供我国的数学教师了解借鉴. 这几本辞典选择的题目有相当部分是初等数学所必需的基础训练题，当然更可以作为教学中的参考材料.

需要说明的是，这几本辞典卷帙浩大，各册各章的编写质量并不一致. 错误、重复之处多有发现，我们在组织翻译时只纠正了发现的错误，删去各册中的数学小史和一些数表，如对数表，三角函数表等，在《三角学辞典》中删去了一些明显重复的题目以及球面三角的题目，其他未作改动. 希望读者能在使用中注意.

序　言

作者编写的《代数学辞典》自问世以来，获得广大读者的好评．但在此十多年期间，随着科学技术的显著进展，社会形势的变迁，中学数学教学内容已有了大幅度变更，本书初版的内容已逐渐不适应今天形势的需要了．

近年来人们强烈要求数学教育的现代化．为了适应这种情况，通览了正在改订和实行的新教学大纲的概要．感到，要使本辞典适应现实情况，仅仅进行部分修订和增补已赶不上实际需要了．于是下决心全面改订旧稿，重新撰写成合乎时代要求的崭新的工具书．

然而，一旦动笔起草就感到一年来的疾病缠身，老残之躯，欲独自完成这项宏愿已经力不从心．正值自我焦虑之际，幸而得到了诸位先生的莫大援助，使面目焕然一新，今春出版上册，继而又完成了下册．这是编者无上欣喜之事，特借此栏敬向给予援助的诸位先生致以深切谢意．

经过全面修改后，修改稿几乎没有留下旧版本的痕迹．特别是下册的绝大部分，旧稿中未曾出现的新内容充实了．因而，就内容来说，与其说是修订不如说是新编似乎更适合些．

值此变革时期的数学教育中，本书作为读者的参考资料，那怕能起到点滴作用，也是编者感到无限荣幸的．

关于本书的编辑方针和特别注意事项等，已在“编辑方针”中作了说明，这里不作赘述．本书从来不是完整无缺的，不足之处在所难免，恳切希望读者诸贤指正赐教，以资他日弥补，促使本书日臻完善．

编　者

1972 年 10 月

执　笔　者（以五十音为序）

石　原　正　也：岐　阜　大　学　教　授
井　上　正　雄：東京理科大学教授
岩　田　至　康：岐阜教育大学教授
内　山　守　常：横浜市立大学教授
北　村　泰　一：茨　城　大　学　教　授
北　山　　　毅：岡　山　大　学　教　授
久　保　应　助：埼玉大学名誉教授
武　限　良　一：専　修　大　学　教　授
時　田　幸　男
外　岡　慶之助：北海道大学名誉教授

编辑方针

本书是以中学数学教学内容为中心，从中学教科书、教学参考书、最近的大学入学试题和大学教育课程的教材以及国内外其它有关的书刊中精选了总共7000余题，对此给予通俗而确切的解法，从而汇编成问题解法辞典.

在编写时特别注意了以下几点:

(1) 收录范围

基本出发点是以中学教科书为中心. 但对围绕此中心的外围部分的必要内容也积极收录，即除了整数论，函数论，向量分析，线性代数，代数构造初阶之外，对有关各章、节的不包括教学大纲的或者将要删除的材料等，也根据需要尽量收录. 再者，无穷级数的极限、收敛、发散也按照初版编辑的宗旨收录了进来. 因为第二版与初版相比，内容数量都有明显的增加，为了使用方便，分为上、下册出版. 上册主要收录历来中学课程中遇到的代数，下册收录新近添加到中学教学中的内容.

(2) 解说，解答的基准

基本事项的解说，问题的解答，是根据中学生的学力，也就是以具有中学毕业水平的人能够充分理解与否作为通俗易懂的标准. 特别是对超过中学水平的问题，更要求彻底做到上述要求. 解题原则，考虑以最适当的解法作一题一解，对认为有特别必要提出的，则加以“别解”或者“略解”.

(3) 目录，问题的编排

要能很容易找到必要的问题，或者能找到类似问题的解答，这是作为本辞典所必需的重要条件之一. 为此本辞典以尽量收罗的“网罗主义”为前题的同时，尽可能将一个项目有机地再细分为若干个小项目，并在小项目的编排次序上照顾到从基础到应用，从单纯到复杂等，从而使目录能起到索引的作用.

(4) 综合性问题的处理

在内容上关联到两个项目以上的问题时，原则上按目录的顺序让给后面的章节讲解. 例如复数和向量的综合性问题就放在向量中；有穷数列和

无穷数列就放在无穷数列里等等. 但重要性在前者而且放在前者较适宜时，则放在前者中讲述.

(5) 关于定义，术语的解说

如果将定义和术语安排在各章的前面讲，则对掌握它们相互之间的关联是有利的，但有对各个独立的部分印象淡薄的短处，而且还会使它与问题的解法变得含糊. 不管怎么说，定义、术语是数学思考的依据，也是解答问题的基础. 为了谋求彻底的理解，本辞典对定义和术语特地用问答题的形式放在靠近关系最密切的问题上，并分散于各节中加以解释.

(6) 解题的方针

对于某一范围内的问题，往往有着共同的思考方法和解答方法. 将其寻找出来加以整理概括，在解题时给予实际的运用，这是提高能力的极有效方法. 本辞典竭力遵循这种解题方针，解说力求切中，并以"分析"或"注"来表示.

再者，单从问题的解答中不一定能直接理解问题的思考方法，而且对于内容复杂问题的解答，有时阅后还不容易掌握它的要点. 因此，根据需要在作解答之前，为说明解法上的思考过程，解题的要点等都写明在"分析"里.

(7) 解说，解答的补充

要项的解说或问题的解答等，有时虽有详细的记述也不一定能轻易理解，然而有时只点破它的要点就能得到启发迎刃而解. 如此情况的补充说明和别解的要点或有关事项、发展趋向的说明等等，根据需要随时写在注里.

问题解法 代数学辞典（上册）主要目录

目　录

第一章　复　数　石原 正也

第一节　用直角坐标表示复数

第二节　用极坐标表示复数

第三节　用 z 表示的复数

第四节　复数和方程

第五节　复数数列

第六节　复数及其图象

第二章　向　量　外岡 慶之助

第一节　矢线向量

第二节　向量及其坐标

第三节　向量的内积

第四节　向量与平面图形

第五节　向量的应用

第六节　轨迹与区域

第三章 有穷数列与有穷级数 井上 正雄

第四章 数列、级数的收敛、发散与连分数 北山 毅

第五章　场合数,排列、组合　久保 应助

第一节　基本事项

第二节　证明题

第三节　各种类型的问题

第六章　二项定理　久保 应助

第一节　二项定理

第二节　多项式定理

第三节　数学归纳法

第七章　概率与统计　内山 守常

第一节　概率的基本事项

第二节　各种形式的概率

第三节 统 计

第八章 线性代数 北村 泰一

第一节 向量与向量空间

第二节 矩 阵

第三节 线性变换

第四节 行 列 式

第五节 二次型与特征值

第六节 凸集合与线性不等式

第九章 集合与代数构造 時田 幸男

第一节 集 合

第二节　代数的构造

第十章　论　证

武隈 良一

第一节　逆、否、逆否命题，命题的否定

第二节　命题的论证与必要条件，充分条件

第三节　数学归纳法

第四节　论证与运算，论证与集合

第五节　逻 辑 符 号

附　录

第一章 复 数

第一节 用直角坐标表示复数

1. 复数及其相等

1. 什么是复平面，并加以说明.

解 复数 z 是用两个实数 a, b 以

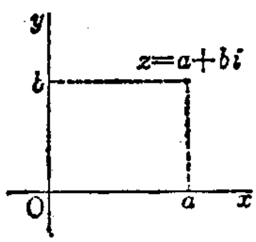
$$z=a+bi \quad (i \text{ 是虚数单位}, i^2=-1)$$

的形式表示的一个数. a 称为 z 的**实部**，b 称为**虚部**.

对复数 $z=a+bi$，在坐标平面上作点 $P(a, b)$，于是，平面上的点跟复数建立起一一对应关系.

将复数 $z=a+bi$ 用点 $P(a, b)$ 来表示的平面称为**复平面**（**高斯**(Gauss)**平面**）.

它的横轴称为实轴，纵轴称为**虚轴**.



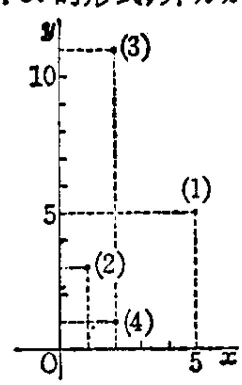
2. 将下列各数写成 $a+bi$ 的形式，并分别在复平面上表示出来：

(1) $(3+4i)+(2+i)$;

(2) $(3+4i)-(2+i)$;

(3) $(3+4i)(2+i)$;

(4) $\dfrac{3+4i}{2+i}$.



解 (1) $(3+4i)+(2+i)=5+5i$.

(2) $(3+4i)-(2+i)=1+3i$.

(3) $(3+4i)(2+i)=6+3i+8i+4i^2=2+11i$.

(4) $\dfrac{3+4i}{2+i}=\dfrac{(3+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{10+5i}{4-i^2}=2+i$.

3. (1) 若 A, B, C, D 都是实数，则两复数 $A+Bi$ 和 $C+Di$ 当且仅当 $A=C$, $B=D$ 时相等，其中 $i=\sqrt{-1}$. 利用此已知事实推导：设 a, b, x, y $(b\neq 0, y\neq 0)$ 都是实数，若 $(x+yi)^2=a+bi$，则有下列关系式成立：

$$x^2-y^2=a; \qquad ①$$
$$2xy=b. \qquad ②$$

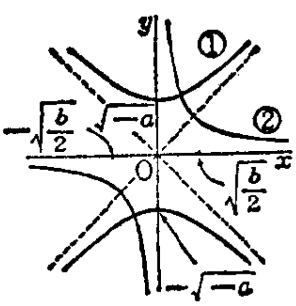
(2) 关于 x, y 的联立方程 ①, ②，必有相异的两组实根. 试用图象把它表述出来（只须就 $a<0$, $b>0$ 的情形绘略图）.

解 (1) 由 $(x+yi)^2=a+bi$,

$\therefore\ x^2-y^2+2xyi=a+bi$.

$\therefore\ x^2-y^2=a$; ①

$2xy=b$. ②



(2) ① 式是表示以 $y=\pm x$ 为渐近线的直角双曲线，② 式表示以 x 轴、y 轴为渐近线的等边双曲线，所以它们的图象必有两点相交，因此，联立方程 ①, ② 有相异的两组实根.

当 $a<0$, $b<0$; $a>0$, $b>0$; $a>0$, $b<0$ 时也可得同样的结论，不过交点的位置变移而已.

4. 若一复数的平方是 $-1+\sqrt{3}i$，求此复数.

解 设此复数为 $z=x+yi$，从而

$$x^2-y^2+2xyi=-1+\sqrt{3}i,$$

$$\therefore\ \begin{cases} x^2-y^2=-1, \\ 2xy=\sqrt{3}. \end{cases}$$

解此联立方程得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

〔答〕 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$.

5. 设复数 $z=x+yi$ 满足下述的 (1)、(2) 试分别决定 x, y:

(1) $z^3=i$;

(2) $z^2-4iz+(-4+2i)=0$.

解 (1) $x^2-y^2+2xyi=i$,

$$\therefore \begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=1. \end{cases}$$

解得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

〔答〕 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

(2) 根据求根公式,

$$z=2i\pm\sqrt{(2i)^2-(-4+2i)}$$
$$=2i\pm\sqrt{2}\sqrt{-i}.$$

仿效(1), $-i$ 的平方根是 $\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, 故得

$$z=1+i,\ -1+3i. \qquad \cdots\cdots〔答〕$$

注 二次方程的求根公式也适用于虚系数, 但是判别式对虚根还是实根的判定仅适用于实系数的情形。

6. 试求满足 $\dfrac{2x+i}{y+i}=\dfrac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta}$ 的实数 x, y, 其中 θ 是不等于 $n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n 为整数)的常数.

解 由给定的关系式,

$$(2x+i)(1-i\operatorname{tg}\theta)=(y+i)(1+i\operatorname{tg}\theta),$$
$$(2x+\operatorname{tg}\theta)+i(1-2x\operatorname{tg}\theta)$$
$$=(y-\operatorname{tg}\theta)+i(1+y\operatorname{tg}\theta).$$

根据复数的相等,

$$\begin{cases} 2x+\operatorname{tg}\theta=y-\operatorname{tg}\theta, \\ 1-2x\operatorname{tg}\theta=1+y\operatorname{tg}\theta. \end{cases}$$

故当 $\operatorname{tg}\theta\neq 0$ 即 $\theta\neq m\pi$ (m 为整数)时,

$$x=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta,\ y=\operatorname{tg}\theta. \qquad \cdots\cdots〔答〕$$

而当 $\theta=m\pi$ 时, $x=c$, $y=2c$

(c 为任意实数). ……〔答〕

2. 模和共轭复数

7. 试说明复数 $z=a+bi$ 的模, 幅角及其共轭复数的意义。

解 在复平面上, 将非零复数 $z=a+bi$ 用点 P 表示. 将 OP 之长记为 r, OP 与 x 轴正方向的夹角记为 θ. r 称为 z 的模, θ 称为 z 的幅角, 并分别用 $|z|$, $\arg z$ 标记。

因 r 为 OP 的长度, 故有

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

又, 幅角 θ 与 a, b 之间的关系是

$$a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta,\ \operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}.$$

对于一个复数 $z=a+bi$, $a-bi$ 称为 z 的共轭复数, 并用 $\bar{z}$ 表示。

在复平面上, 点 z 与点 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的. 此外, 点 z 与点 $-z$ 是关于原点对称的.

注 **1.** 若把复数的幅角 θ 考虑作一般角, 则不是唯一确定的, 都相差 2π 的整数倍. 为此规定它取值的范围为 $0\leqq\theta<2\pi$ 或 $-\pi<\theta\leqq\pi$.

2. arg 是 argument 的省略写法。

8. 求下述各复数的模与幅角.

(1) $\sqrt{3}+i$; (2) $1+i$; (3) $-i$;
(4) $-\sqrt{3}+i$; (5) $2-2\sqrt{3}i$.

解 (1) $r=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}$
$=2$,

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$, $\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) $r=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) $r=|-i|=\sqrt{1^2}=1$,

$\cos\theta=0$, $\sin\theta=-1$, $\therefore\ \theta=-\dfrac{\pi}{2}$.

(4) $r=|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}$
$=2$,

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$, $\therefore\ \theta=\dfrac{5}{6}\pi$.

(5) $r=|2-2\sqrt{3}i|$
$=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=4$,

$\cos\theta=\dfrac{2}{4}$, $\sin\theta=\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}$,

$$\therefore\ \theta=-\frac{\pi}{3}.$$

〔答〕 $\begin{cases} (1)\ 2 \text{和} \dfrac{\pi}{6};\quad (2)\ \sqrt{2} \text{和} \dfrac{\pi}{4}; \\ (3)\ 1 \text{和} -\dfrac{\pi}{2};\ (4)\ 2 \text{和} \dfrac{5\pi}{6}; \\ (5)\ 4 \text{和} -\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

9. 求下述各复数的共轭复数:

(1) $(1-2i)(2+3i)$; (2) $(2-i)^2$;

(3) $\dfrac{1+3i}{3+4i}$.

解　(1) $(1-2i)(2+3i)=8-i$, $\therefore$ $8+i$.

(2) $(2-i)^2=3-4i$, $\therefore$ $3+4i$.

(3) $\dfrac{1+3i}{3+4i}=\dfrac{(1+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{15+5i}{25}$,

$$\therefore\quad \frac{3}{5}-\frac{1}{5}i.$$

〔答〕 (1) $8+i$; (2) $3+4i$;
(3) $\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$.

注　也可从所给复数的共轭复数来计算.

(1) $\overline{(1-2i)(2+3i)}=\overline{(1-2i)}\,\overline{(2+3i)}$
$=(1+2i)(2-3i)=8+i$.

(2) $\overline{(2-i)^2}=(2+i)^2=3+4i$.

(3) $\overline{\left(\dfrac{1+3i}{3+4i}\right)}=\dfrac{\overline{1+3i}}{\overline{3+4i}}=\dfrac{1-3i}{3-4i}$
$=\dfrac{(1-3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$
$=\dfrac{15-5i}{25}=\dfrac{3-i}{5}$.

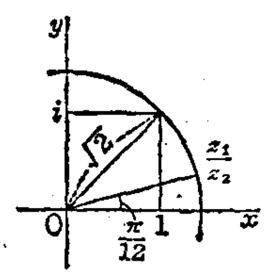
10. 设在复平面上,有分别表示复数

$$z_1=1+\sqrt{3}i,\ z_2=1+i$$

的两点，其中幅角均取其模的最小值.

(1) 试用模和幅角表示复数 z_1, z_2.

(2) 试用模和幅角表示复数 $\dfrac{z_1}{z_2}$, 并将此复数在图上用点表示出来.



解　$|z_1|=\sqrt{1+3}=2$,
$|z_2|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

(1) $z_1=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$z_2=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$
$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$
$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$\therefore$ 它的模是 $\sqrt{2}$,

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=2n\pi+\dfrac{\pi}{12}$ （n 是整数）.

11. 试求同时满足

$$\left|\frac{z-1}{z}\right|=\frac{1}{2},\ \arg\frac{z-1}{z}=\frac{\pi}{3}$$

的复数.

解　$\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
$=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}$,

$\therefore$ $4z-4=z+\sqrt{3}zi$.

$\therefore$ $z=\dfrac{4}{3-\sqrt{3}i}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

……〔答〕

12. 已知复数 $z=1+\sqrt{3}i$, 求 z^2 的模和幅角. 再求 $\dfrac{z^2}{1+i}$ 的模和幅角.

解　$z=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore$ $z^2=4\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$.

$1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$
$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\therefore$ $\dfrac{z^2}{1+i}=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$.

〔答〕 z^2 的模是 4, 幅角是 $\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$.
$\dfrac{z^2}{1+i}$ 的模是 $2\sqrt{2}$, 幅角是 $\dfrac{5}{12}\pi+2n\pi$ （n 是整数）.

注　**1.** 如用 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表示时，有 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$. 可参见复数用极坐标表示时的棣莫佛公式.

2. 尚有关系 $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$. 参见问题 45.

13. (1) 求下列各复数的模和幅角: