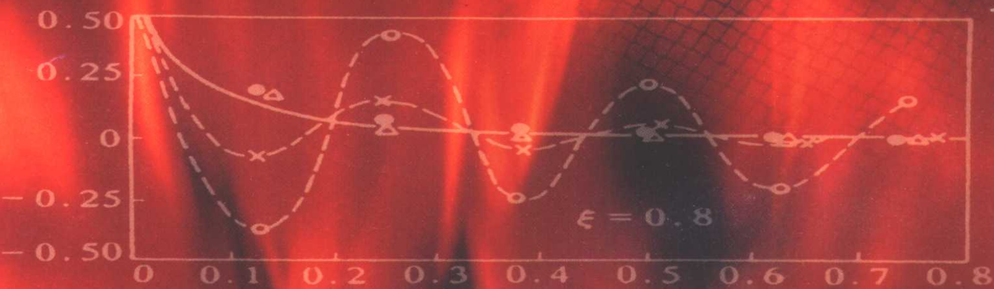
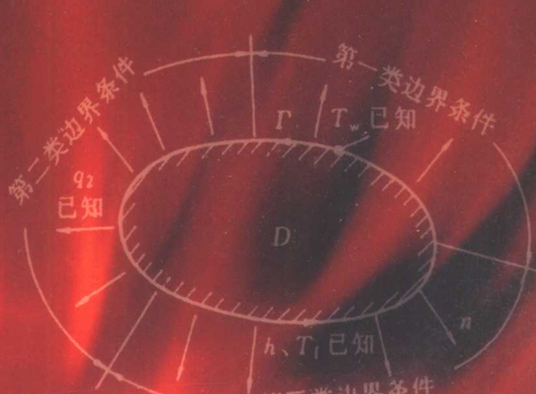
REYINGLI YOUXIANDANYUANFA FENXI

热应力有限单元法分析

孔祥谦　编著





上海交通大学出版社

上海交通大学“九五”重点教材

热应力有限单元法分析

孔祥谦 编著

上海交通大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

热应力有限单元法分析/孔祥谦编著. -上海:上海交通大学出版社,1999

ISBN 7-313-02255-7

Ⅰ.热… Ⅱ.孔…Ⅲ.热应力-有限元分析 Ⅳ.0343.6

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第29193号

热应力有限单元法分析

孔祥谦 编著

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路877号 邮政编码200030

电话 64281208 传真 64683798

全国新华书店经销

常熟市印刷厂印刷

开本:850×1168(mm) 1/32 印张:7.5 字数:190千字

版次:1999年10月 第1版

印次:1999年10月 第1次

ISBN 7-313-02255-7/O·152

定价:11.50元

前　　言

本书的读者应具有以下基础知识：已经学过传热学和弹性力学(或材料力学)的基本知识；熟悉工程数学和计算机算法语言；对多重积分的变换、线积分和面积分的平面格林定理等应有所了解.

有限元法源于弹性力学的计算.在20世纪30年代，已经出现了应用最小能量法、变分原理和加权余量法(简称权余法)等来寻求弹性力学问题的近似解析解.这三条途径都能推导出有限元法的基本计算关系式.最小能量法历来是直接为弹性力学服务的，所以目前介绍弹性应力有限元计算的书中大多通过这条途径.它的特点是物理概念明确，对数学的要求较少，但缺乏普遍适用性和严格的数学逻辑关系，所以用来求解其他学科领域的问题就不一定方便.泛函变分和权余法在数学上都能严格地求解固体温度场和应力场问题，但对某些数理方程来说现在尚未找到相应的泛函.利用共轭变分原理虽在一定程度上可以解决这个困难，然而泛函变分原理要用到较多的数学知识，所以泛函变分的应用也有局限性.看来权余法具有最大的通用性，它直接从微分方程出发，所以最适合于将有限元法推广到其他学科中去，再者，它对数学的特殊要求也较少.

上述古典的最小能量法、泛函变分法和权余法(三者都可统称为变分)虽然都是有限元法的理论基础，但都不是有限元法.它们的特点都是首先构成整体求解域的积分方程，然后求积分方程的近似解析解.这个工作比直接求微分方程的近似解要方便些，但当区域和边界条件复杂时，这个全区域积分方程的求解仍然遇到困

难，从而限制了它的发展.

从这一点来说，古典的有限差分法有其独到之处.它把求解区域划分成网格，出现了节点和单元，于是复杂的区域和边界条件对每个单元来说都显得很简单.可惜有限差分法要求的是一种规则网格，且得到的是数值解，它要求解一个高阶线性代数方程组.在电子计算机问世以前，这项工作是非常困难的，也就限制了有限差分法的应用.

60 年代电子计算机开始普及应用，有限差分法得到了长足的发展.于此同时，规则差分网格不能适应复杂区域形状的矛盾也就日益突出.古典变分法在差分网格的启发下，开发了一种不规则三角形和四边形的网格节点和单元，把求解全区域积分方程的积分过程分散到每一个单元中去进行，然后再拼装起来，最后也是求解一个线性代数方程组.所以说，古典变分与不规则网格剖分的结合产生了现代的有限元法.由于不规则网格可以容易地拟合任意的区域边界，所以有限元法求解场问题的能力在目前各种离散方法中是最强的，尤其在固体力学领域内几乎是一统天下.

本书完全用权余法来推导传热学和弹性力学的问题.这种处理方法在弹性力学有限元法传统教材中是不多见的，成为本书的一大特色.这样做的目的在于给从事热工专业的科技人员，在自学基础上达到用有限元法求解热应力问题提供最方便的学习途径.

热应力问题的求解在当代工程技术领域中已起到越来越重要的作用.如内燃机、蒸汽轮机、燃气轮机以及核动力工程等主要设备部件的设计中，热应力是必须考虑的问题.

本书以三角形单元作为理论叙述的主干线，贯穿始终.三角形单元的优点是简单灵活，适应性强，它的计算基本上可取得解析解，便于掌握理解及编程；它的缺点是应力在单元中呈常数分布，这与实际偏差较大，故在应力变化较大之处应配置更细的单元，且不宜用于计算应力集中的部位.在这方面四边形单元具有较好的性能，所以四边形单元在固体力学计算中具有重要的地位.它的特

点是计算公式得不到解析解，往往使初学者感到抽象难懂.故本书把它编排在第9章中，让读者对有限元法的计算特点已有较多理解的基础上，再来领略四边形单元的不同计算风格.教学实践证明这样可以收到事半功倍的学习效果.三角形单元和四边形单元的混合使用是一种非常灵活的剖分方法.

在求解轴对称问题时需要计算一些特殊的积分，这里采用了具有普遍意义的高斯数值积分法.为了便于读者掌握，本书只介绍二维空间的有限元法计算.

本书重视读者通过自学方式来掌握书本知识内容，所以务求深入浅出，多举具体算例.并在附录中介绍了对有限元法计算有重要意义的一些有关数学问题，希读者广为利用.

以上有关内容作为教材自1983年在哈尔滨船舶工程学院油印试用以来，受到一些院校师生的认可和欢迎.1992年在上海交通大学重新油印，多次教学实践使教材渐趋成熟.这次又作了增删修订后正式出版.

本书可作为高等工科院校热工专业选修课的教材，教学时数为32学时，当学时数较少时，可考虑删去部分内容；此外，也可供动力、能源、航空航天、化工和机械等专业的大学生和研究生使用.

作者对朱凯舟同学向本书提供热应力有限元分析FORTRAN语言源程序表示感谢.限于作者的水平，书中难免有不足与错误之处，恳请读者不吝指正.

孔祥谦

1999年2月于上海交通大学

符　号　表

a/$m^2 \cdot s^{-1}$	导温系数
c/$J(kg \cdot ℃)^{-1}$	比热容
D	所研究物体的二维积分区域
E/$N \cdot m^{-2}$	拉压弹性模量
E_3	区域划分的单元总数
e	单元的二维积分区域
$[F]^e$	作用在单元上的体积力列向量
Fo	傅里叶数
G/$N \cdot m^{-2}$	剪切弹性模量
g	单元边界线上的积分动点位置
H	二维四边形单元的型函数
h/$W(m^2 \cdot ℃)^{-1}$	对流换热系数
J	泛函
$\|J\|$和$[J]$	分别为雅可比行列式和雅可比矩阵
$[K]$	稳态温度场的系数矩阵;弹性力学的刚度系数矩阵
k	$[K]$中的矩阵元素
$[L]^e$	作用在单元上的热负荷列向量
L_i, L_j, L_m	面积坐标
M	高斯数值积分求积基点数
m/kg	物体质量
$[N]$	瞬态温度场系数矩阵

N_i, N_j, N_m	二维三角形单元型函数,其值等于对应下标的面积坐标
n	$[N]$中的矩阵元素;剖分网格的节点总数
$\boldsymbol{n}$/m	边界面外法线向量
$\{P\}$	线性代数方程组右端列向量
$Q(x)$	近似解引起的微分方程误差残量
$\boldsymbol{Q}_0$/N·m^{-2}	作用在物体边界上的面力
Q_x、Q_y 和 $\boldsymbol{Q}_z$	分别为 $\boldsymbol{Q}_0$ 在 Ox,Oy 和 Oz 三坐标轴方向的分量
$[\boldsymbol{Q}]^e$	作用在边界单元上的面力列向量
$\boldsymbol{q}$/W·m^{-2}	热流密度向量
q_2/W·m^{-2}	物体边界面的给定热负荷
q_v/W·m^{-3}	材料的内热源强度
R	一维积分区域
R/N·m^{-3}	体力的径向分量
$\boldsymbol{R}$/N	作用在边界节点上的集中力
$[R]^e$	作用在边界节点上的集中力列向量
R_x 和 R_y/N	$\boldsymbol{R}$ 在坐标轴方向的分量
r	圆柱坐标的径向坐标
S	在方向余弦中作为边界的坐标轴
S_i/m	三角形边界单元的边界长度
S_{km}/m	四边形边界单元的边界长度
T/℃	物体的瞬态温度
$\tilde{T}$/℃	温度场 T 的近似解
T_f 和 T_w/℃	分别为给定外界介质温度和物体边界壁面温度
T_0/℃	给定的物体均匀初始温度
t/s	非稳态过程进行的时刻
u/m	位移 $\boldsymbol{\delta}$ 在 Ox 轴方向的分量

v/m	位移 $\boldsymbol{\delta}$ 在 Oy 轴方向的分量
$\boldsymbol{W}$	权余法中的权函数
$\boldsymbol{W}_0$/N·m^{-3}	作用在物体上的体力
X、Y 和 Z/N·m^{-3}	体力在坐标轴方向的分量
α	主应力与 Ox 轴的夹角
α/℃$^{-1}$	物体的线膨胀系数
β	主应变与 Ox 轴的夹角
$\boldsymbol{\Gamma}$	物体的封闭边界(取逆时针方向为正)
$\boldsymbol{\gamma}$	剪应变
γ_{xy}，γ_{yz} 和 γ_{zx}	分别为 $\boldsymbol{\gamma}$ 在三个坐标平面内的分量
$\triangle$/m^2	三角形单元的面积
$\boldsymbol{\delta}$/m	物体内任一点的位移
ε 和 ε_0	分别为物体内任一点的正应变和热正应变
Ⓗ/N·m^{-3}	体力的周向分量
θ	极坐标的周向坐标
$\theta = T - T_w$/℃	过余温度(或 $T - T_f$)
$\theta_0 = T_0 - T_w$/℃	初始过余温度(或 $T_0 - T_f$)
κ/W(m·℃)$^{-1}$	导热系数
μ	泊松比
ρ/kg·m^{-3}	材料密度
$\boldsymbol{\sigma}$/N·m^{-2}(或 MPa)	物体内部任意面上产生的正应力
σ_x，σ_y，和 σ_z/MPa	分别为作用在垂直于 Ox，Oy 和 Oz 轴平面上的正应力
σ_r 和 σ_θ/MPa	分别为作用在圆柱体径向和周向的正应力
$\boldsymbol{\tau}$/MPa	物体内部任意面上产生的剪应力
τ_{xy}/MPa	垂直于 Ox 轴面上而沿着 Oy 轴方向作用的剪应力．余类推
ϕ	泛指待求函数
ω	高斯数值积分的求积权系数

上 角 标

D	整体区域
e	单元区域
-1	矩阵的逆
T	矩阵或列阵的转置

顶 标

$\sim$	待求函数的近似解

下 角 标

i,j,m	二维三角形单元的局部节点号
i,j,k,m	二维四边形单元的局部节点号
l	泛指单元节点号,经常用作 $i,j,\cdots$等节点的轮换标,表示该节点系数在矩阵"行"的位置
n	泛指单元节点号,经常用作 $i,j,\cdots$等节点的轮换标,表示该节点系数在矩阵"列"的位置

数学运算符号

$\|\ \|$	行列式
$[\ ]$	矩阵
$\{\ \}$ 或 $[\ ]$	列向量
$\iint_D$ 和 $\iint_e$	分别为二维整体域和单元域的面积分
$\oint_\Gamma$	封闭边界曲线积分
$\int_{\Gamma_e}$	单元边界线积分

目　　录

第 1 章　固体导热偏微分方程式

热应力的计算首先要求出一个温度场,由此计算热应变,再把机械力负荷产生的正应变和剪应变叠加上去.所以有限元法分析总是从导热温度场开始的.由于温度是一个标量,应力和应变是一个向量,显然应力场有限元法分析要比温度场复杂得多.可见利用温度场求解作为有限元法入门的途径是符合由浅入深、循序渐进原则的.我们用权余法来导出积分方程,控制微分方程就是整个工作的出发点.

本章只列出有关导热微分方程式及其常用的边界条件和初始条件.由于热工专业的读者较为熟悉这些内容,故只指出其使用规则而不作详细的推导和说明.

1.1　导热偏微分方程式

在传热学书籍中,已经详细地推导出具有内热源和瞬态温度场的固体导热微分方程式.

对于平面问题,方程的形式为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + q_v. \tag{1.1}$$

式中:T/℃为物体的瞬态温度(具有场的性质);t/s 为过程进行的时间;κ/w(m·℃)$^{-1}$为材料的导热系数;ρ/kg·m^{-3}为材料的密度;c/J(kg·℃)$^{-1}$为材料的比热容;q_v/W·m^{-3}为材料的内热源强度.通常 κ,ρ,c 和 q_v 作常数处理.

对于轴对称问题,如以 Oz 轴为对称轴,则方程的形式为

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + q_v. \tag{1.2}$$

值得指出的是，为了使平面问题与轴对称问题的计算能通用一个计算机程序，我们往往把(1.2)式改写成

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + q_{\mathrm{v}}. \tag{1.3}$$

这样，在轴对称问题中，横坐标轴 Ox 为对称轴，纵坐标轴 Or 为半径方向；在平面问题中，Ox 轴同样为横坐标轴，Oy 轴为纵坐标轴，所以平面问题中的 Oy 轴与轴对称问题中的 Or 轴是完全对应的. 在很多公式推导时坐标 y 与 r 可以互换.

xOr 坐标系中的图形构成了轴对称物体的子午面. 这种表示法与通常圆柱坐标系 rOz 中的子午面相比转置了一个 90°. 曾有读者没有注意这个差别，按传统的 rOz 坐标系子午面来划分单元，然后套用按 xOr 坐标系推导的有限元法计算公式，只是形式上把坐标 z 改成 x. 由于子午面没有转置 90°，在三角形面积等的解析计算中会相差一个负号而引起错误. 希读者在作图和剖分网格时引起注意.

1.2 第一类边界条件

为了得到上述微分方程的唯一解，必须附加初始条件和边界条件，统称为定解条件，与微分方程耦合求解. 这里介绍三类主要的边界条件.

如图 1.1 所示，第一类边界条件是指物体边界上的函数(这里指温度)为已知. 用公式表示为

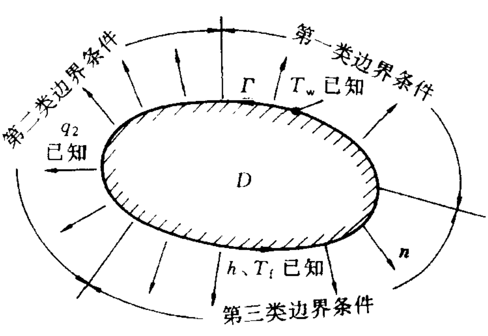


图 1.1 平面温度场