高等成人教育自学辅导教材

王佩荔
杨万禄 编

概率论与数理统计的内容与方法

GAI LÜ LUN YU
LI TONG JI DE
RONG
ANG FA

- 随机事件与概率
- 随机变量的概率分布与数字特征
- 随机向量
- 参数估计与假设检验

天津大学出版社

高等成人教育自学辅导教材

概率论与数理统计的内容与方法

王佩荔　杨万禄　编

天 津 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是高等成人教育自学辅导教材。全书分为四章，各章均由内容提要、基本要求、自学中应注意的问题、例题分析等四部分组成，简要列出各章的主要内容、基本要求和学习的重点与难点，针对学员在学习中容易出现的问题对有关内容作进一步阐述与解释，并选择典型例题进行分析，帮助学员加深对基本概念及定理的理解，减少作练习的困难。它也可以作为函授、电大、职大、业大的学员学习《概率论与数理统计》的参考书。

高等成人教育自学辅导教材
概率论与数理统计的内容与方法
王佩荔　杨万禄　编
*
天津大学出版社出版
（天津大学内）
邮编：300072
河北省昌黎县印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本：850×1168 毫米 1/32　印张：4 7/8　字数：127 千
1997 年 6 月第一版　1997 年 6 月第一次印刷
印数：1—5000
ISBN 7-5618-0930-1
0.90　定价：6.00 元

前　言

《概率论与数理统计的内容与方法》是根据“全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组”通过的《概率论课程教学基本要求》编写的.

成人在学习概率论与数理统计时,往往感到抽象难懂,对基本概念及有关理论在理解上感到困难,特别是利用概率论的概念及理论解决具体问题时,不知如何下手,缺少思路.在这些方面迫切需要得到具体的指导与帮助,对于函授学员尤其如此.本书就是为了解决这些问题而编写的,因此它可作为函授、电大、职工大学、业余大学的学员学习《概率论与数理统计》的自学辅导书.

本书各章均由四部分组成:

一、内容提要

简要列出本章主要内容,帮助学生总结归纳本章的要点.

二、基本要求

明确学习本章的基本要求,具体指出每一部分内容应掌握的程度,指出学习的重点与难点.

三、自学中应注意的几个问题

针对学生在学习中容易出现的问题,对本章有关内容作进一步的阐述与解释,帮助学生加深理解,减少学习中的困难.

四、例题分析

选择能体现本章基本内容、重点要求的具体例题,通过例题分析,帮助学生加深对基本概念及定理的理解,提高学生运用基本概念、基本理论及基本方法分析、解决问题的能力,减少作练习的困难.

我们希望此书,在帮助学生掌握概率论与数理统计的基本内

容，提高思维及计算能力方面，能起到一定的作用.

本书第一章由杨万禄编写，第二、三、四章由王佩荔编写.

本书在编写过程中，得到天津大学成人教育学院和天津大学出版社的大力支持，在此表示深切的感谢.

书中错误及不妥之处，恳望读者批评指正.

编　者

1996 年 3 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

本章主要介绍了随机事件及其概率、事件的关系和运算、条件概率和事件的独立性等一些基本概念，并介绍了概率计算的一些方法. 通过本章的学习，应该学会判别所计算事件的概率是否符合某些概型（古典概型、独立试验序列概型），学会将所求概率的事件，用另外一些较易确定概率的事件通过事件运算表示出来，这样就能够利用概率的性质以及有关公式把所求的概率计算出来.

一、内容提要

（一）随机事件及其概率

1. 随机事件

粗略的说，在一定的条件下，可能发生也可能不发生的事件叫随机事件. 用大写的英文字母 A,B,C 等表示随机事件.

2. 频率

当条件组 S 大量重复实现时，事件 A 发生的次数（频数）与试验次数的比值称为 A 发生的“频率”，即

$$A\text{ 发生的频率}=\frac{\text{频数}}{\text{试验次数}}$$

3. 概率

在一组不变的条件 S 下，重复作 n 次试验，事件 A 发生的次数为 μ，当试验次数 n 很大时，如果频率 $\frac{\mu}{n}$ 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，并且一般说来，摆动的幅度随着试验次数的增多而愈变

愈小，则称 A 为随机事件，称数值 p 为随机事件 A 在条件组 S 下发生的概率，记作

$$P(A)=p$$

对任何随机事件 A，都有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

对必然事件 U 及不可能事件 V，显然有

$$P(U)=1,\qquad P(V)=0.$$

（二）古典概型

1. 等可能完备事件组

如果一个事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，它满足下列三条性质：

（1）$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 发生的机会相同（等可能性）；

（2）在任一次试验中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生（完全性）；

（3）在任一次试验中，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至多有一个发生（互不相容性）.

则称该事件组为等可能完备事件组，或称为等概基本事件组. 称其中任一事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为基本事件.

2. 古典概型

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个等概基本事件组，事件 B 是由其中的某 m 个基本事件所构成，事件 B 的概率应由公式（1）计算：

$$P(B)=\frac{m}{n} \tag{1}$$

利用公式（1）来计算事件的概率的模型称为古典概型.

（三）事件的运算及概率的加法公式

1. 事件的包含与相等

设有两个事件 A 与 B. 如果 A 发生，那么 B 必发生，则称事件 B 包含事件 A，记作

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A$$

如果事件 A 包含 B，同时事件 B 也包含事件 A，那么就称事件 A 与 B 相等，记作

$$A = B$$

2. 事件的和与积

"两事件 A 与 B 中至少有一个发生"也是一个事件，称为 A 与 B 的和，记作 $A \cup B$，或 $A+B$.

"两事件 A 与 B 同时发生"也是一个事件，称为 A 与 B 的积，记作 AB 或 $A \cap B$.

3. 对立事件与事件的差

如果在每次试验中，事件 A 与事件 B 必有一个发生，但不能同时发生，即

$$A \cup B = U, \quad AB = \Phi$$

则称 B 是 A 的对立事件（或 A 是 B 的对立事件），记为 $B=\overline{A}$（或 $A=\overline{B}$）.

"A 发生而 B 不发生"也是一个事件，称为 A 与 B 之差，记作

$$A-B$$

4. 事件的互不相容性

在一次试验中，如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即

$$AB = V\text{（不可能事件）}$$

则称 A 与 B 是互不相容的事件.

5. 概率的加法公式

(1)概率的加法公式 I：如果事件 A,B 互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{2}$$

公式(2)可推广到 n 个事件的情形. 设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(2)概率的加法公式Ⅱ:对任意两事件 A,B,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{3}$$

(四)条件概率·乘法公式·独立性

1. 条件概率

如果 A,B 是条件组 S 下的两个随机事件,$P(A)\neq 0$,则称在 A 发生的前提下,B 发生的概率为条件概率,记作 $P(B|A)$.

2. 乘法公式

(1)条件概率 $P(B|A)$ 与事件的原概率的关系为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{4}$$

(2)概率的乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{5}$$

或
$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{5'}$$

3. 事件的独立性

(1)设有两个事件 A,B,如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A,B 是相互独立的.

(2)设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果对于其中任意 $k(2\leqslant k$

$\leqslant n$)个事件 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik}$($i_1,i_2,\cdots,i_k$ 互不相同),都有

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik}),$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(五)独立试验序列概型

独立试验序列概型计算公式:设单次试验中,事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次重复试验中

$$P(A\text{ 发生 }k\text{ 次})=C_n^k p^k q^{n-k} \tag{6}$$

$(q=1-p,k=0,1,2,\cdots,n)$.

(六)全概公式与逆概公式

1. 全概公式

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,而且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,

(2)$A_1+A_2+\cdots+A_n=U$(完全性),

则对任一事件 B 皆有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i) \tag{7}$$

满足上述(1),(2)条件的事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 叫做完备事件组.

2. 逆概公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一完备事件组,则对任一事件 $B(P(B)\neq 0)$有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

逆概公式(8)也称为贝叶斯公式.

二、基本要求

1. 了解随机事件和事件频率的概念,了解随机现象的统计规律性,概率的统计定义和古典概型及其概率的计算.

2. 掌握事件之间的关系及基本运算和概率的加法公式.

3. 理解条件概率的概念.掌握乘法定理、全概公式和逆概公式,会应用这些公式进行概率计算.

4. 理解事件独立性的概念,会应用事件的独立性进行乘积事件的概率计算.

5. 了解独立试验序列概型及其计算公式.

重点:随机事件及其概率,条件概率,全概公式,事件的独立性.

难点:古典概型,全概公式.

三、自学中应注意的几个问题

(一)随机现象的一些基本概念

1. 随机试验,简称试验

(1)试验可以在相同条件下重复地进行.

(2)每次试验的可能结果不只一个,进行一次试验之前不能准确预言那一种结果会出现,但试验的一切可能的结果是已知的,称为随机试验或简称试验.

2. 随机事件

"在一定条件下可能发生,也可能不发生的事件"称为随机事件.在试验中,一定会发生的事件称为必然事件,一定不发生的事件称为不可能事件.必然事件和不可能事件本来没有随机性,但为了方便我们把它们看成随机事件的特殊情形.

3. 基本事件

设试验有多个可能结果，如果这些结果满足：

(1)在任何一次试验中，这些结果至少有一个发生(完全性).

(2)在任何一次试验中，这些结果至多有一个发生(互不相容性).

则称其中每一个事件为试验的基本事件，即不能再分的事件.

由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件.

(二)古典概型的求解

首先要判别求解的问题是不是属于古典概型，如果所涉及的试验具有两个基本特征：

(1)只有有限多种不同的可能结果，即只有有限多个基本事件 n(基本事件是两两互不相容的)；

(2)所有基本事件出现的可能性相同. 则称此试验是古典概型.

在古典概型中，如果事件 A 是由 m 个基本事件所组成，或者说有 m 个基本事件是使 A 出现的，则事件 A 的概率应为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

如何确定 m、n 的值，这是解题的关键. 古典概型计算方法灵活多变，没有一个固定的模式，一般地说，当基本事件总数较少时，可以直接把基本事件总数 n 与事件 A 所包含的基本事件数 m，一一列举出来. 当基本事件总数较多时，难于列举，可以利用排列、组合的知识求出 n、m 的值，这种方法称为直接法. 有时直接法计算不方便，可根据题意间接地先求与事件 A 有关事件的概率，再利用概率的性质推求 $P(A)$，称此法为间接法. 如通过求 A 的对立事件 $\overline{A}$ 的概率，再利用 $P(A)=1-P(\overline{A})$求得 $P(A)$.

古典概型的问题表现的形式是多样的，但大部分都可用“摸

球"模型来形象地表达.摸球模型的基本形式是:设盒中有 n 个可辨的球,分别标上1号,2号,…,n 号,并且这些球手感是一样的.现一个一个地从中摸出 m 个球,一般有两种抽样方法:

(1)放回的,即每摸出一球,记下球号,然后再放回盒内.

(2)不放回的.即每一次摸出一个球,摸出后不放回盒内.

摸出的球有两种处理方法:

(1)排序,即按摸出的先后次序把球号排成一排,排成一个有序数组.

(2)不排序,即把摸出的球号组成一个数组,而不管它们出现的先后次序.

现在就上述各种情况,计算一个全部可能的结果数,即基本事件总数.

(1)放回,且排序.这时全部可能的结果数,就是可重复的排列数 n^m.

(2)不放回,且排序,这时全部可能结果数是选排列数 A_n^m,特别当 $m=n$ 时,就是全排列数 $P_n=n!$.

(3)不放回,且不排序,这时全部可能结果数就是组合数 C_n^m.

(4)放回,且不排序.这时全部可能结果数就是组合数 C_{n+m-1}^m.

至于事件 A 所含的基本事件数的求法,就要具体问题具体分析了.

(三)对立事件与互不相容事件的区别

1.两事件对立,必互不相容;但两事件互不相容,不一定对立.

2.互不相容概念适用于多个事件,但对立的概念,只适用于两个事件.

3.两事件互不相容只表明两事件不能同时发生,即至多只能有一个事件发生,但可以两个事件都不发生.两个事件对立,则表示两个事件之中有且仅有一个发生.

如概率加法公式：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

如果 A,B 互不相容，即 $AB=V$，则上式就变成

$$P(A+B)=P(A)+P(B),$$

因此，在应用加法公式前一定要判明 A,B 是否互不相容.

（四）条件概率

条件概率是一个十分重要的概念. 乘法公式、全概公式和逆概公式都是建立在条件概率基础上的.

1. 条件概率的概念

我们讨论事件的概率总是就某组确定的条件 S 而言的. 对这些确定条件，我们常常略而不提. 但在许多情况下，我们还有必要计算一个事件 B 在"某事件 A 已经发生的附加条件下的概率". 也就是说在原有的"确定条件"中又附加一个条件"A 已经发生"，在这附加条件下 B 的概率叫作 B 对于 A 的条件概率，记作 $P(B|A)$.

2. 条件概率与无条件概率的比较

初学概率论的读者往往会这样想，条件概率 $P(B|A)$ 一定会比无条件概率 $P(B)$ 大，其实这并不一定. 下面以古典概型为例加以说明：

设基本事件总数为 n，其中事件 A 包含 m 个基本事件，事件 B 包含 l 个基本事件，AB 包含 k 个基本事件，按条件概率的概念得，

$$P(B|A)=\frac{\text{在 } A \text{ 发生的前提下 } B \text{ 中含的基本事件数}}{\text{在 } A \text{ 发生的前提下基本事件总数}}$$

$$=\frac{k}{m}=\frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

已知 $P(A)=\frac{m}{n}, P(AB)=\frac{k}{n}, P(B)=\frac{l}{n}$.

从上式看出 $P(B|A)=\frac{k}{m}$ 的分母比 $P(B)=\frac{l}{n}$ 的分母缩小了，但一般说来 $P(B|A)$ 的分子 k 也比 $P(B)$ 的分子 l 小了. 因而很难说条件概率比无条件概率大些还是小些.

只有当事件 A,B 有包含关系时，才肯定有

$$P(B|A)\geqslant P(B).$$

事实上，当 $A\subset B$ 时，则 $P(B|A)=P(U)=1$，但 $P(B)\leqslant 1$，所以

$$P(B|A)\geqslant P(B).$$

当 $B\subset A$ 时，则 $AB=B$.

所以 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\geqslant\frac{P(B)}{1}=P(B).$$

(五)事件的独立性

1. **定义**

如果 $P(B|A)=P(B)$，则称 A,B 为相互独立事件.

这表示事件 A 的发生与否并不影响事件 B 的概率.

A,B 互相独立的充分必要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

在实际问题中，我们常常不是根据定义来判别事件是否独立，而是根据问题的实际意义来作出判断的. 如“射击目标”“投掷硬币”“投掷骰子”“盒内有放回地摸球”等都是明显的独立性的例子.

2. 事件的相互独立性与事件的互不相容性的区别

两个事件 A,B 相互独立是指一事件的概率不受另一事件是否发生的影响；两事件 A、B 互不相容是指 A、B 不能同时出现.

(1) 事件 A、B 互不相容，不能保证 A、B 互相独立，因为一个

事件 A 的发生，必然导致另一事件 B 的不发生（互不相容），能说 A 的发生对 B 的概率就没有影响吗？当然不能.

(2)事件 A、B 互相独立，不能保证 A、B 互不相容. 因为 A、B 互相独立，只是说一个发生与否不影响另一个发生的概率，是允许 A、B 同时发生的，即未必 $AB=V$，也即未必互不相容.

(3)"多个（多于两个）事件独立"与"多个事件的两两独立"不是一回事. 一组事件相互独立，当然也两两独立，但反之不成立. 所以多个事件两两独立，不一定该组事件就独立.

一组事件互不相容$\Leftrightarrow$这组事件每两两互不相容.

(六)独立试验序列概型

试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$，记 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=q$，其中 $q=1-p$，将试验独立地重复进行 n 次；这里"独立地重复"是指在每次试验中 $P(A)=p$ 保持不变. 在 n 次独立试验中 A 发生 k 次的概率为

$$P\{A\text{ 发生 }k\text{ 次}\}=C_n^k p^k q^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n).$$

(七)全概公式与逆概公式

1. 全概公式与逆概公式是借助于较简单的事件的概率，利用概率加法、乘法公式计算出较为复杂事件的概率公式. 这两个公式有着密切的联系，学习中要特别注意公式的使用条件与公式的结构，以及两公式中问题的提法，掌握了这几点就可以将一类复杂事件的概率，通过一种公式模型求出来.

2. 利用全概公式求复杂事件 B 的概率时，关键是找一个完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 把事件 B 分解成几个简单事件的和. 即

$$\begin{aligned}B=BU&=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)\\&=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n\end{aligned}$$