

BEIJINGSHI ZHONGXUE
JIAOXUE
CANKAOSHU



北京市中学

初中数学总复习

教学参考书



北京出版社

北京市中学
初中数学总复习
教学参考书

北京教育学院教学研究部编

北京出版社

封面设计：志 龙

北京市中学
初中数学总复习教学参考书
北京教育学院教学研究部编

北京出版社出版
(北京崇文门东大街136号)
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印刷

787×1092毫米 32开本 4印张 246,000
1983年2月第1版 1984年11月第2版
1985年1月第4次印刷
印数 1,320,001—1,820,000
书号：7071·904 定价：0.88元

编写说明

为了做好本市中学应届毕业生的总复习工作，我部约请了部分有经验的中学教师，共同编写了北京市中学语文、政治、历史、地理、数学、物理、化学、生物、俄语等科的总复习教学参考书。这套书是根据中学教学大纲，对现行的全日制十年制学校课本的基本内容，进行了全面的、系统的综合整理编成的。为了在总复习中使学生更好地掌握、运用基础知识和基本技能，提高分析问题、解决问题的能力，书中精选了一定数量的例题、练习和习题，供复习时使用。

本书是《北京市中学初中数学总复习教学参考书》，全书将初中数学知识分为代数、平面几何与三角两部分。每部分分为若干章。为了便于教学，每章又分为若干单元。在系统论述平面几何图形性质的基础上，还编写了关于平面几何解题方法分析。

在编写时，考虑到各学校的具体情况不一，所编的内容偏多一些，各校在教学时，可根据本校学生的实际情况，有选择地使用。

参加本书编写工作的有于宗英、高怀英、张鸿菊、郝澎、王增民、陈宝明、李万钟等同志。由北京教育学院教学研究部数学教研室对初稿进行了修改和统编。

本书的代数、平面几何与三角部分，分别请曹才翰和李振纯二位同志作了审阅，在此表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，加上编写时间仓促，有错误和不妥之处，欢迎批评指正。

北京教育学院教学研究部

一九八二年十一月

目 录

第一部分 代 数

第一章 数与式	(1)
一、实数	(1)
二、整式	(10)
三、因式分解	(19)
四、分式	(27)
五、根式	(38)
第二章 方程和方程组	(51)
一、方程的有关概念和一元一次方程	(51)
二、二元一次方程组	(53)
三、一元二次方程	(60)
四、可化为一元二次方程的方程	(68)
五、列方程或方程组解应用题	(75)
第三章 指数和常用对数	(83)
一、指数	(83)
二、对数的概念和性质	(87)
三、常用对数	(90)
第四章 函数及其图象	(95)
一、平面直角坐标系和基本公式	(95)
二、函数的概念	(98)
三、正比例函数、反比例函数、一次函数、二次	

函数	(101)
第五章 不等式	(114)
一、一元一次不等式	(114)
二、一元一次不等式组和一元二次不等式	(117)
第六章 统计初步*	(125)
一、总体和样本	(125)
二、平均数	(125)
三、方差	(126)
四、频率分布	(126)

第二部分 平面几何与三角

第一章 直线、相交线和平行线	(133)
一、基本概念	(133)
二、平行线	(135)
第二章 三角形	(140)
一、三角形和它的主要性质	(140)
二、几种特殊三角形	(141)
三、全等三角形	(142)
四、其他	(143)
第三章 四边形	(151)
一、平行四边形	(151)
二、矩形	(151)
三、菱形	(152)
四、正方形	(152)
五、梯形	(152)
六、四边形与特殊的四边形间的从属关系	(153)
七、对称图形	(153)

八、多边形的面积公式	(154)
九、其他	(154)
第四章 相似形	(163)
一、比例的性质和几个有关的定理	(163)
二、相似三角形	(164)
三、相似多边形	(165)
第五章 圆	(173)
一、圆的基本性质	(173)
二、和圆有关的角	(174)
三、点和圆、直线和圆、圆和圆之间的位置关系 以及关于圆的比例线段	(175)
四、圆和多边形	(177)
五、圆的度量和作图	(178)
六、点的轨迹	(179)
第六章 平面几何解题方法分析	(191)
第七章 三角函数和解三角形	(207)
一、三角函数	(207)
二、 $0^\circ \sim 180^\circ$ 角的三角函数的性质	(208)
三、三角函数间的关系	(209)
四、解三角形	(220)
习题答案或提示	(236)
第一部分 代数	(236)
第二部分 平面几何与三角	(248)

第一部分 代 数

第一章 数与式

一、实数

1. 实数的有关概念

(1) 实数:

实数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有理数} \left\{ \begin{array}{l} \text{正有理数(正整数, 正分数)} \\ \text{零} \\ \text{负有理数(负整数, 负分数)} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{有限小数} \\ \text{或者无限} \\ \text{循环小数} \end{array} \right. \\ \text{无理数 (正无理数, 负无理数): 无限不循环小数} \end{array} \right.$

(2) 数轴: 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。数轴上的所有点与全体实数是一一对应的。

(3) 相反数: 实数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数; 零的相反数仍旧是零。

(4) 绝对值: 一个正实数的绝对值是它本身; 一个负实数的绝对值是它的相反数; 零的绝对值是零。

(5) 倒数: 1除以一个数的商, 叫做这个数的倒数; 零没有倒数。

(6) 实数比较大小: 在数轴上表示的两个实数, 右边的数总比左边的数大。

正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。

2. 实数的运算

(1) 有理数的运算法则(略)。

(2) 实数的运算：在进行实数的四则运算时，有理数的运算规律也同样适用；在实数范围内四则运算总可以实施，其运算结果还是实数。

(3) 运算定律：

① 加法交换律 $a+b=b+a$ ；

② 加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ ；

③ 乘法交换律 $ab=ba$ ；

④ 乘法结合律 $(ab)c=a(bc)$ ；

⑤ 分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 。

(4) 运算顺序：

① 按照第三级运算(乘方、开方)，第二级运算(乘、除)，第一级运算(加、减)的顺序进行运算。

② 有括号时，按照小括号，中括号，大括号的顺序进行运算。

例 1 把下列各数分别填入下面各集合中：

-1.43 , $-2^{\frac{1}{2}}$, 8.7 , 19 , $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt[3]{8}+1$, $\cos 60^\circ$,
 $1.41141114\cdots$, $\operatorname{tg} 30^\circ$, $\lg 1$, $\log_2 4$, $\log_5 3$ 。

有理数集合：{ \cdots }；

无理数集合：{ \cdots }。

解 有理数集合：

$\{-1.43, 8.7, 19, \sqrt[3]{8}+1, \cos 60^\circ, \lg 1, \log_2 4, \cdots\}$ ；

无理数集合:

$$\{-2^{\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1.41141114\cdots, \operatorname{tg}30^\circ, \log_5 3, \cdots\}.$$

例 2 比较下列各组数的大小:

(1) $-\frac{30}{31}$ 和 $-\frac{29}{30}$; (2) $-\sqrt{3}$ 和 -1.7 ;

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ 和 $2 + \sqrt{3}$.

解 (1) $\left|-\frac{30}{31}\right| = \frac{30}{31} = \frac{900}{930}$; $\left|-\frac{29}{30}\right| = \frac{29}{30} = \frac{899}{930}$.

$$\therefore \frac{900}{930} > \frac{899}{930},$$

$$\therefore -\frac{30}{31} < -\frac{29}{30}.$$

(2) $|\sqrt{-3}| = \sqrt{3}$, $|-1.7| = 1.7$.

$$\therefore \sqrt{3} = 1.732\cdots,$$

$$\therefore \sqrt{3} > 1.7.$$

则 $-\sqrt{3} < -1.7$,

(3) $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5 = 7 + 2\sqrt{10}$.

$$(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 2\sqrt{12},$$

$$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{3} \text{ 都是正数,}$$

$$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{3} \text{ 分别是 } 7 + 2\sqrt{10} \text{ 和 } 7 + 2\sqrt{12}$$

的算术平方根.

$$\text{而 } 7 + 2\sqrt{10} < 7 + 2\sqrt{12},$$

$$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{3}.$$

例 3 计算下列各题:

(1) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$; (2) $|x-1| - x + 1$;

(3) $\left|+\frac{40}{59}\right| - \left|\frac{5}{37} - \frac{39}{59}\right| - \left|-\frac{5}{37}\right|$;

$$(4) \sqrt{(x+1)^2} - |x+1|.$$

解 (1) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$

(2) $|x-1| - x + 1.$

当 $x-1 \geq 0$, 即 $x \geq 1$ 时,

$$\text{原式} = x - 1 - x + 1 = 0;$$

当 $x-1 < 0$, 即 $x < 1$ 时,

$$\text{原式} = 1 - x - x + 1 = 2 - 2x.$$

$$(3) \because \frac{39}{59} > \frac{5}{37}, \therefore \left| \frac{5}{37} - \frac{39}{59} \right| = \frac{39}{59} - \frac{5}{37},$$

$$\left| +\frac{40}{59} \right| - \left| \frac{5}{37} - \frac{39}{59} \right| - \left| -\frac{5}{37} \right|$$

$$= \frac{40}{59} - \left(\frac{39}{59} - \frac{5}{37} \right) - \frac{5}{37}$$

$$= \frac{40}{59} - \frac{39}{59} + \frac{5}{37} - \frac{5}{37}$$

$$= \frac{1}{59}.$$

$$(4) \sqrt{(x+1)^2} - |x+1|$$

$$= |x+1| - |x+1|$$

$$= 0.$$

例 4 解下列各题:

(1) 写出比 $3\sqrt{3} - 2$ 的相反数大的所有负整数;

(2) 写出与 2 的差的绝对值等于 3 的数;

(3) 具有什么条件的两个数, 它们的和的绝对值, 等于它们的绝对值的和.

解 (1) $3\sqrt{3} - 2$ 的相反数是

$$-(3\sqrt{3} - 2) = 2 - 3\sqrt{3} \approx 2 - 3 \times 1.732 = -3.196.$$

\therefore 大于 $3\sqrt{3} - 2$ 的相反数的所有负整数是 $-3, -2$,

- 1.

(2) 绝对值等于3的数是3和-3,

与2的差等于3的数是5, 而与2的差等于-3的数是

-1.

∴ 与2的差的绝对值等于3的数是5和-1.

(3) 设 a, b 为所求的两个数,

则 $|a+b| = |a| + |b|$.

① 当 a, b 都是正数时, 上式成立;

② 当 a, b 都是负数时, 上式成立;

③ 当 a, b 至少有一个是零时, 上式也成立.

∴ 当两数同号, 或至少有一个数为零时, 它们的和的绝对值等于它们的绝对值的和.

例 5 计算:

$$1\frac{2}{3} - \left\{ 5\frac{3}{4} - 2^2 \div \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{4} \right) \right] \times \frac{1}{8} \right\}$$

$$\text{解 原式} = 1\frac{2}{3} - \left[5\frac{3}{4} - 4 \div \left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4} \right) \times \frac{1}{8} \right]$$

$$= 1\frac{2}{3} - \left(5\frac{3}{4} + 4 \div 2 \times \frac{1}{8} \right)$$

$$= 1\frac{2}{3} - \left(5\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= -4\frac{1}{3}.$$

说明: (1) 注意括号的作用, $-2^2 \neq (-2)^2$;

(2) 在计算 $4 \div 2 \times \frac{1}{8}$ 时, 要注意运算顺序.

习 题 一

1. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”：

- (1) 不论 a 是什么实数， a^2 永远大于零； ()
- (2) 一个整数的倒数都小于这个整数； ()
- (3) 一个负数的相反数都大于这个负数； ()
- (4) 两个互为相反的数，它们的绝对值相等； ()
- (5) 两个数中，较大数的绝对值也较大； ()
- (6) π 等于3.14； ()
- (7) 对任意实数 a 和 b ， $|a-b|=|b-a|$ 恒成立； ()
- (8) 在实数范围内，如果一个数不是正数，则一定是负数； ()
- (9) 任意实数 a 的倒数都可以用 $\frac{1}{a}$ 表示； ()
- (10) 两个正实数的和比这两个实数都大； ()
- (11) 两个负实数的和比这两个实数都小； ()
- (12) 两个正实数的积比这两个实数都大； ()
- (13) 两个负实数的积比这两个实数都小； ()
- (14) 如果分数 $\frac{b}{a}$ 小于1，那么 $b < a$ ； ()
- (15) 无理数都是无限小数； ()
- (16) 无限小数都是无理数。 ()

2. 填空：

- (1) 比 $-1\frac{1}{2}$ 大而比 $3\frac{1}{2}$ 小的所有非负整数是_____，
- (2) 一个数的倒数的相反数是 $2\frac{1}{4}$ ，这个数是_____。

(3) 若两个数相乘，积为零，则这两个数_____

—；

(4) 如果两个数绝对值的和为零，则这两个数_____；

(5) 若 a ， b 互为相反数，那么 $a + b =$ _____；

(6) 若 a ， b 互为负倒数，那么 $a \cdot b =$ _____；

(7) 一个数的相反数是它本身，则这个数是_____；

(8) 一个数的倒数是它本身，则这个数是_____；

(9) 一个数的绝对值是它本身，则这个数是_____；

(10) 一个数的算术平方根是它本身，则这个数是_____；

(11) 若实数 a 满足 $\frac{a}{|a|} = -1$ ，则 a 是_____；

(12) 一个数的平方比这个数大，则这个数是_____

_____；

(13) 一个数的倒数比这个数大，则这个数是_____

_____；

(14) 最大的负整数是_____，最小的正整数是_____，绝对值最小的实数是_____；

(15) 用科学记数法表示， $2400^2 =$ _____；

(16) 由四舍五入得到的近似数 0.0102 精确到_____分

位，有_____有效数字，它们是_____。

3. 把下列各数：

$\frac{2}{3}$ ， $\lg 0.1$ ， $-\sin 60^\circ$ ， 1.5 ， -2.5% ， 2π ， $1.\dot{3}$ ，

$\sqrt{2} + 1$ ， $-\sqrt{(-3)^2}$ ， $(\sqrt{\lg 100})^2$ ， $-|-\sqrt{3}|$ 。

(1) 填在相应的大括号里：

负实数集合：{ _____ \dots }，

无理数集合: { ... },

正有理数集合: { ... },

(2) 把表示各数的点画在同一数轴上, 并按照由小到大的顺序用“<”连结起来.

4. 下列各数中, 哪两个互为相反数? 哪两个互为倒数? 哪两个互为负倒数?

$$4, \sqrt{2}-1, 0.25, \lg 3, \left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}, \sqrt{5}-2,$$

$$1-\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \lg \frac{1}{3}, \sqrt{5}+2.$$

5. 比较下列各组数的大小:

(1) $-\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{5}$;

(2) $-\frac{5}{6}$ 和 $-\frac{6}{7}$;

(3) $-\frac{1}{\pi}$ 和 $-\frac{\sqrt{3}}{6}$;

(4) $\left|-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|$ 和 $\left|-\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right|$;

(5) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{10}-2$; (6) $\sqrt{a^2}$ 和 a .

6. 去掉绝对值符号, 并使代数式的值不变:

(1) $|3-2\sqrt{2}|$; (2) $|x^2+y^2|$;

(3) $|x-1|-|x+1|$; (4) $\frac{|x-1|}{x-1}$;

(5) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{5}|$;

(6) $|\sqrt{3}-|\sqrt{5}-\sqrt{2}-\sqrt{3}||$.

7. 已知: $|a|=2$, $|b|=3$.

求: $a+b$ 的值.

8. 已知: $\sqrt{2a+1}+|3b-2|=0$, 求: a 和 b 的值.

9. (1) 求: $+9\frac{5}{12}$ 与 $-6\frac{7}{15}$ 两数和的相反数, 再求这两个

数相反数的和。

(2) 求： $+\frac{5}{18}$ 与 $-\frac{7}{24}$ 两数和的绝对值，再求这两个数绝对值的和。

10. 计算下列各题：

$$(1) -\left[-(0.2)^2 + \frac{1}{25}\right] + [2^3 - 3^2(-1)^6] \div \frac{3^2}{4};$$

$$(2) 18 \div (-3^2) \times (-3)^2 - 2^3 \times (-3);$$

$$(3) -2^2 + (-2)^2 - (-1)^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{6} - |-1|;$$

$$(4) \frac{|-9| - 3 \times |4.7 - 2.7|}{|-2.83 - 0.17|};$$

$$(5) \left\{-1 \times \left[(-0.4)^2 - (-3.1 + 2.6) \times \frac{4}{5}\right]\right\} \div 0.2^3;$$

$$(6) 100 + \left(-0.25 + \frac{7}{4}\right) \div \left\{0.5 - (-0.75)\right. \\ \left. \times \left[\frac{4}{3} - (-2)^2\right]\right\};$$

$$(7) \left\{4.5 - \left[(-5) \times \left(1 + \frac{1}{25} - 0.7\right)\right]\right\} \div 5\frac{2}{5};$$

$$(8) 12 \div (-2) + 0 \div 147 - |2^4 - (-29) \times (-2)| \\ \times (3^2 - 2^3);$$

$$(9) (-3) \times (-2)^3 \div 4 \div 2 + \sqrt{(-2)^6} \div (-4) \times 2;$$

$$(10) \frac{23\frac{11}{12} + 10.125 \div \left(-\frac{3}{4}\right)^3}{(-1)^{1001} - \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}}}.$$

二、整式

1. 代数式的有关概念

(1) 代数式：用运算（加、减、乘、除、乘方、开方）符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式。

用数代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值。

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \\ \text{无理式} \end{cases} \begin{cases} \text{整式} \\ \text{分式} \end{cases}$$

(2) 有理式：只含有加、减、乘、除、乘方运算（包含数字开方运算）的代数式，叫做有理式。

(3) 无理式：含有关于字母开方运算的代数式，叫做无理式。

(4) 整式：除式中不含有字母的有理式叫做整式。

2. 整式的运算

(1) 合并同类项法则：把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母和字母的指数不变。

(2) 去括号法则：

括号前面是“+”号，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里各项都不变；

括号前面是“-”号，把括号和它前面的“-”号去掉，括号里各项都变号。

(3) 整式的加减：整式的加减运算，实际上就是合并同类项。如遇到括号，就根据去括号法则，先去括号，再合并