

现代数学基础丛书



实用微分几何引论

● 苏步青 华宣积 忻元龙 著



科学出版社

现代数学基础丛书

实用微分几何引论

苏步青 华罗庚 忻元龙 著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书以三维空间的向量运算和微分几何为理论基础,以几何学在生产实际中的一些应用为主要内容,论述了微分几何在机械设计和加工、船体的设计和制造等方面的一些应用。

全书共分八章.第一、二、四章是基础知识,系统地介绍了曲线论和曲面论.第三章等距曲线是为解决凸轮型线设计问题而设的.第五章论述齿轮啮合问题.其余三章论述曲线的拟合与设计、曲面的相交与展开、曲面的拟合与设计.本书的着重点在于数学模型的建立。

本书可供机械制造等方面的工程技术人员以及应用数学工作者参考,也可作为高等院校有关专业的教材。

现代数学基础丛书

实用微分几何引论

苏步青 华宣积 忻元龙 著

责任编辑 杜小杨

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

科地亚印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年11月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1998年9月第二次印刷 印张:8 7/8

印数:5 001—7 000 字数:231 000

ISBN 7-03-006949-8/O · 1046

定 价: 18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

随着电子计算机的发展和应用, 数学的各个分支为国民经济和社会发展服务的途径越来越宽广. 数学工作者在应用研究和开发研究方面都取得了越来越多的成绩. 为了反映这方面的部分成果, 一九七七年科学出版社出版了主要是由我们编写的《曲线与曲面》一书. 该书出版后, 我们收到许多读者的来信. 在信中, 他们提出了不少宝贵意见, 并且要求适当增加基础理论方面的内容和配备一些习题. 另外, 近几年来我们又接触到一些新的应用领域, 看到了一些应用成果和开发研究成果. 因此, 我们以《曲线与曲面》一书为基础, 重新编写了这本书. 它以几何学在生产实际中的一些应用为主要内容, 以三维空间的向量运算和微分几何学为理论基础. 我们希望本书对工程技术人员能有所帮助; 希望它能为数学工作者从事应用研究提供参考; 也希望它可作为应用数学专业或有关工科大学的微分几何的教材或参考书.

几何学已广泛应用于计算机辅助设计 (CAD) 和计算机辅助制造 (CAM) 的许多方面, 并且这种应用将会有更大的发展. 由于我们的实践不多, 书中仅联系了机构设计和加工, 船体的设计与制造中的一些应用. 即使在这两方面也是挂一漏万的, 和雨后春笋般的研究成果相比, 仅仅是沧海之一粟. 为了适应更多的读者, 书中的基础内容没有涉及三维空间解析几何和微分几何以外的各种几何学, 这无疑地也限制了我们的论述范围.

本书不要求读者有很多的预备知识. 学过空间解析几何、数学分析、高等代数或高等数学的读者, 都可能顺利地阅读. 有些章节的后面还附上习题, 帮助读者消化正文的有关内容. 第一章、第二章和第四章是基础知识, 系统地介绍了向量、曲线论和曲面论. 其余各章除第六章与第八章有密切联系外, 彼此是独立的, 不一定

按次序阅读。

书中没有包含上机计算的程序。这主要是因为我们的着重点在于如何归结数学模型，在于“几何学”与“机构运动学”以及造船工艺等的一些联系，而不是程序的编制。另一个原因是目前的计算机的型号和所用的语言多种多样，我们的程序对读者未必有多少用处。

我们对科学出版社长期的热情的支持和帮助表示感谢，对曾向我们提出过宝贵意见的同事和读者表示感谢。

由于我们水平有限，书中错误之处在所难免。请读者以及各方面的专家批评指正。

作者

1984.5.

《现代数学基础丛书》编委会

主 编：程民德

副主编：夏道行 龚 昇 王梓坤 齐民友

编 委：（以姓氏笔划为序）

万哲先 王世强 王柔怀 叶彦谦

孙永生 庄圻泰 汪泽坚 江泽培

陈希孺 张禾端 张恭庆 严志达

胡和生 姜伯驹 聂灵沼 莫绍揆

曹锡华 蒲保明

目 录

第一章 向量	1
§ 1. 向量的概念	1
§ 2. 向量的代数运算	2
§ 3. 向量函数与曲线的参数表示	8
§ 4. 向量函数的微分、曲线的切线	11
§ 5. 向量函数的积分	15
第二章 曲线论	19
§ 1. 空间曲线的表示与弧长	19
§ 2. 主法向量、从法向量与活动标架	23
§ 3. 曲率与挠率	25
§ 4. Frenet 公式	29
§ 5. 平面曲线	34
§ 6. 曲线论的基本定理	38
§ 7. Cesaro 不动条件	44
第三章 等距曲线	49
§ 1. 等距曲线	49
§ 2. 渐开线	52
§ 3. 三角活塞旋转式发动机缸体的型线	55
§ 4. 凸轮型线计算(实例一)	59
§ 5. 凸轮型线计算(实例二)	64
第四章 曲面论	72
§ 1. 正则曲面	72
§ 2. 第一基本形式	82
§ 3. 第二基本形式	94
§ 4. 曲面上曲线的法曲率	98
§ 5. 主曲率、Gauss 曲率、平均曲率	100
§ 6. 曲面上的活动标架、曲面的基本公式	105
§ 7. Gauss 方程与 Codazzi 方程	108

§ 8.	曲面论基本定理	110
§ 9.	测地线	112
第五章	齿轮啮合	117
§ 1.	平面曲线族的包络	117
§ 2.	单参数曲面族的包络	127
§ 3.	平面啮合	136
§ 4.	齿廓法线法	141
§ 5.	轮转曲线、Camus 定理和 Euler-Savary 公式	149
§ 6.	空间啮合的接触线法	152
§ 7.	一个实际例子	160
第六章	曲线的拟合与设计	165
§ 1.	线性拟合	166
§ 2.	圆弧拟合	169
§ 3.	样条拟合	175
§ 4.	最小二乘法	190
§ 5.	基样条法	197
§ 6.	样条拟合中光顺边界条件的确定	199
§ 7.	Bézier 曲线	206
§ 8.	等距 B 样条曲线	213
§ 9.	不等距的 B 样条曲线	219
第七章	曲面的相交与展开	224
§ 1.	两个例子	224
§ 2.	两个二次曲面的交线	229
§ 3.	求交线的数值方法	232
§ 4.	可展曲面的展开	235
§ 5.	非可展曲面的近似展开	239
第八章	曲面的拟合与设计	243
§ 1.	双三次样条函数	243
§ 2.	双三次曲面	248
§ 3.	Coons 曲面	250
§ 4.	三角域上的光滑插值	257
§ 5.	Bézier 曲面	262
§ 6.	B 样条曲面	271

第一章 向 量

§ 1. 向量的概念

我们经常碰到的量有两种。一种叫数量(或标量),例如时间、距离、体积、温度等等。这种量在取定量度单位以后,就可以用数值的大小完全表示出来。另一种量,例如力、速度、位移等等,除了用一定的量度单位的数值表示它们的大小以外,还必须指明它们的方向,才能完全表示出来。这种既有大小又有方向的量叫做向量(或矢量)。

向量可以用有向线段(规定了起点和终点的直线段)来表示。如图 1-1 所示,从 O 点到 A 点的有向线段 OA 的长度表示向量的

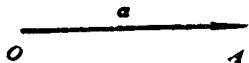


图 1-1

大小,而它的指向表示向量的方向。本书中用附有箭头的 $\overrightarrow{OA}$ 或用斜黑体字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 表示向量。用 $\overrightarrow{OA}$ 表示向量时, O 就是它的起点, A 是它的终点。

如果所讨论的向量只依赖于它的大小和方向而与向量的起点无关,那么它称为自由向量。本书中如无特别声明,向量都指自由向量。

在三维欧氏空间中,建立右手直角坐标系 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, 其中 O 表示坐标原点, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示沿着三个坐标轴正向的单位向量。这样,任何向量 $\mathbf{r}$ 可以写成

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z),$$

其中 x, y, z 分别称为向量沿 X 轴, Y 轴, Z 轴的分量. 向量 $\mathbf{r}$ 的长度定义为

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

零向量为

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (0, 0, 0).$$

当两个向量的分量分别相等时, 我们说, 它们相等.

§ 2. 向量的代数运算

设 λ 为实数, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 则 λ 与 $\mathbf{r}$ 之积定义为

$$\lambda\mathbf{r} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \quad (2.1)$$

若 $|\mathbf{r}| \neq 0$, 则 $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ 是和 $\mathbf{r}$ 方向相同的单位向量, 它的分量称为向量 $\mathbf{r}$ 的方向余弦.

若 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2$) 为两个向量, 则它们的和定义为

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \quad (2.2)$$

而它们的内积(数量积)则为

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (2.3)$$

向量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 平行的一个充要条件是它们线性相关, 即存在着不同时为零的实数 λ_1, λ_2 , 使 $\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$.

若记非零向量 $\mathbf{r}_1$ 与 $\mathbf{r}_2$ 之间的角为 θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, 则

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| \cdot |\mathbf{r}_2|}. \quad (2.4)$$

因此, $\mathbf{r}_1$ 垂直于 $\mathbf{r}_2$ 的充要条件是它们的数量积 $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$. 若 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, (2.3) 式化为

$$\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |\mathbf{r}|^2,$$

故

$$\sqrt{\mathbf{r}^2} = |\mathbf{r}|.$$

设 r_1, r_2 为不平行的两个向量, 其间的角为 θ , 而且 e 为与 r_1, r_2 同时垂直的单位向量, 而且 r_1, r_2, e 按这个次序构成右手系, 那么向量 r_1, r_2 的向量积(或称外积)定义为

$$\begin{aligned} r_1 \times r_2 &= (|r_1||r_2|\sin\theta)e \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

因此, r_1 与 r_2 平行的另一个充要条件为 $r_1 \times r_2 = 0$.

上面的这些运算之间还满足下面的规律. 若 λ, μ 表示实数, r_1, r_2, r_3 表示向量, 则下列式子成立

1) 结合律:

$$\begin{aligned} \lambda(\mu r_1) &= (\lambda\mu)r_1, \\ (r_1 + r_2) \times r_3 &= r_1 \times r_3 + (r_2 \times r_3), \\ (\lambda r_1) \times r_2 &= \lambda(r_1 \times r_2), \\ (\lambda r_1) \times r_2 &= \lambda(r_1 \times r_2); \end{aligned}$$

2) 交换律:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= r_2 + r_1, \\ r_1 \times r_2 &= -r_2 \times r_1; \end{aligned}$$

3) 分配律:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)r_1 &= \lambda r_1 + \mu r_1, \\ \lambda(r_1 + r_2) &= \lambda r_1 + \lambda r_2, \\ r_1 \times (r_2 + r_3) &= r_1 \times r_2 + r_1 \times r_3, \\ r_1 \times (r_2 + r_3) &= r_1 \times r_2 + r_1 \times r_3; \end{aligned}$$

此外, 向量积还满足

$$r_1 \times r_2 = -r_2 \times r_1.$$

三个向量 r_1, r_2, r_3 的混合积是

$$(r_1, r_2, r_3) = (r_1 \times r_2) \cdot r_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

它的绝对值表示以 r_1, r_2, r_3 为棱的平行六面体的体积. 因此, r_1, r_2, r_3 共面(即平行于同一平面)的充要条件是

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 0.$$

它们成右手系的充要条件是

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) > 0.$$

关于向量的内积和向量积, 下面的 Lagrange 恒等式成立

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_4) - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_4)(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3). \quad (2.7)$$

关于三个向量的双重向量积, 下面的公式成立:

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3)\mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3)\mathbf{r}_1. \quad (2.8)$$

在这二个公式中, 如果已经证明其一, 则可导出另一个. 此外, 两个公式都是可直接从它们的分量表示形式加以验证的.

在本节结束之前, 举出两个应用的例子.

例 1 组合机床是一种通用部件和专用部件组成的、工序集中的高效率机床. 它一般采用多轴、多刀、多工序、多面、多工位等操作同时进行加工. 在组合机床中, 动力部件是通过主轴箱和被加工的零件发生关系的. 主轴箱通过齿轮结构把驱动轴的转动传递到各主轴(工作轴)去. 精确地计算出各传动轴位置的坐标是非常重要的. 在主轴箱的坐标计算中反复遇到的问题是这样的:

已知两点 $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$ 和它们到另一点 Q 的距离 $p_1 = |QQ_1|$, $p_2 = |QQ_2|$, 求 Q 点的坐标.

解 如图 1-2 所示, 向量

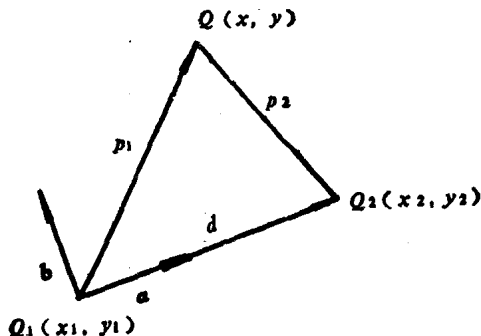


图 1-2

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

它的单位向量是

$$\mathbf{a} = \left(\frac{x_2 - x_1}{d}, \frac{y_2 - y_1}{d} \right),$$

其中

$$d = |\overrightarrow{Q_1Q_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

设 $\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{a}$ 逆时针转动 90° 后所得到的向量, 那么

$$\mathbf{b} = \left(-\frac{y_2 - y_1}{d}, \frac{x_2 - x_1}{d} \right).$$

我们可把向量 $\overrightarrow{Q_1Q}$ 关于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 进行分解:

$$\overrightarrow{Q_1Q} = p_1(\mathbf{a} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha),$$

其中 α 表示从 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 到 $\overrightarrow{Q_1Q}$ 的转角.

可是 $\overrightarrow{Q_1Q} = (x - x_1, y - y_1)$, 而且

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha &= \cos \alpha \left(\frac{x_2 - x_1}{d}, \frac{y_2 - y_1}{d} \right) \\ &+ \sin \alpha \left(-\frac{y_2 - y_1}{d}, \frac{x_2 - x_1}{d} \right), \end{aligned}$$

所以, 从上面的分解式得出

$$x - x_1 + \frac{p_1}{d} [(x_2 - x_1) \cos \alpha - (y_2 - y_1) \sin \alpha],$$

$$y - y_1 + \frac{p_1}{d} [(y_2 - y_1) \cos \alpha + (x_2 - x_1) \sin \alpha].$$

我们只要求出 $\cos \alpha$ 和 $\sin \alpha$ 就可获得 Q 点的坐标. 根据余弦定理得知

$$\cos \alpha = \frac{p_1^2 + d^2 - p_2^2}{2p_1d},$$

于是

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p_1^2 + d^2 - p_2^2}{2p_1d} \right)^2}.$$

由于 $\sin \alpha$ 一般有两个数值, 分别对应于 $\overrightarrow{Q_1 Q_2}$ 旋转到 $\overrightarrow{Q_1 Q}$ 时的方向是逆时针或顺时针, 所以有两个 Q 点符合题目的要求。

这个例题在数学上是很简单的向量运算, 但是在复杂的实际问题中归结出这样的数学问题可决不是轻而易举的事情。

例 2 利用向量的运算可以推导球面三角学里的公式。取单位球, 过球中心 O 的平面与球面的交线称为大圆。以大圆为边的三角形叫做球面三角形。以 A, B, C 代表它的三个顶点, 其对应的对边用 α, β, γ 表示。而 A, B, C 点位置向量用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表

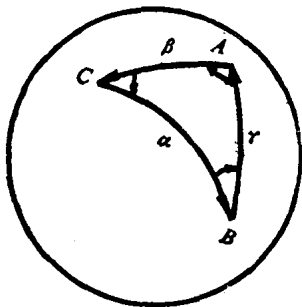


图 1-3

示。 A 角, B 角, C 角, α, β, γ 间的关系就是球面三角学中的重要公式。假定 $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ 都小于 π 。我们可以证明下列球面三角的余弦定理

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A,$$

$$\cos \beta = \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos B,$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C.$$

这里, 我们只证明其中第一式, 其余式子的证明是完全类似的。由 Lagrange 恒等式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

得

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

由于

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \cos \beta, \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \cos \gamma, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \cos \alpha,$$

又因为向量 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ 的长度各为 $\sin \gamma, \sin \beta$, 它们的夹角就是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所构成的平面与 $\mathbf{c}, \mathbf{a}$ 所构成平面的夹角, 即 A 角, 所以 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \sin \beta \sin \gamma \cos A$, 因此有

$$\sin \beta \sin \gamma \cos A = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma,$$

这就是第一式。

习 题

1. 说明定义两个向量夹角的公式(2.4)是有意义的.
2. 直接证明 Lagrange 恒等式(2.7).
3. 利用公式(2.7)证明公式(2.8).
4. 利用公式(2.8)证明公式(2.7).
5. 证明

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot [(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1)] \\ &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

6. 证明

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4) \\ &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)\mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)\mathbf{r}_1 \\ &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)\mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)\mathbf{r}_4. \end{aligned}$$

7. 证明球面三角中的正弦定理

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C},$$

其中记号参看图 1-3.

8. 证明

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5 \times \mathbf{r}_6) \\ &= (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6). \end{aligned}$$

9. 化简

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1).$$

10. 证明

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_4) \\ & + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_4) = 0. \end{aligned}$$

§ 3. 向量函数与曲线的参数表示

若对应于 $a \leq t \leq b$ 中的每一个 t 值, 有一个确定的向量 $\mathbf{r}$, 则 $\mathbf{r}$ 称为 t 的一个向量函数, 记为 $\mathbf{r}(t)$. 显然向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 的三个分量都是 t 的函数, 即

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

关于函数的极限以及连续的概念都可容易推广到向量函数. 设 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 如果下式成立

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0,$$

我们说, 当 t 趋向于 t_0 时, $\mathbf{r}(t)$ 趋向于极限 $\mathbf{r}_0$, 记为

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0.$$

不难证明上式等价于

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0| = 0.$$

容易证明极限运算具有如下的性质:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) \mathbf{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_1(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}_2(t),$$

其中 $\lambda(t)$ 为一个在 $[a, b]$ 中定义的数量函数.

类似地, 向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 的连续性被定义为它的分量函数的连续性. 具体地说, 如果 $x(t), y(t), z(t)$ 关于 t 具有直到 k 阶的连续导函数, 我们就称向量函数 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 为 c^k 阶向量函数. 特别当 $x(t), y(t), z(t)$ 是 t 的连续函数时, 称

$\mathbf{r}(t)$ 是连续向量函数。

类似地,可以定义多个自变量的向量函数。

如果把向量函数 $\mathbf{r}(t)$ 看成空间一点 P 的位置向量, $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP}$, 则 t 在闭区间 $[a, b]$ 里变动时, P 的轨迹一般是一条曲线 Γ (图 1-4)。这时, 方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, 称为曲线 Γ 的参数方程。

在解析几何课程里, 我们知道一条过 P_0 点而以 $\mathbf{v}$ 为方向的直线有下列方程:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v},$$

其中 $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, t 是实数。又例如在 xy 平面上, 圆的参数方程可以写成

$$\mathbf{r} = a(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

它是以坐标原点为圆心, a 为半径的圆。

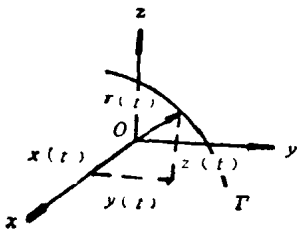


图 1-4

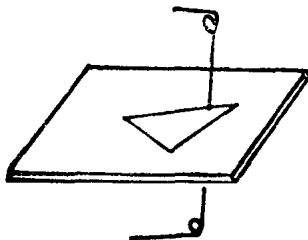


图 1-5

直线和圆弧是最简单的曲线,但也是最有用的曲线,很多复杂的曲线都可以用许多直线段或圆弧段来近似地表示它们的形状(称为曲线的拟合,本书后面专门有一章讨论这个问题),所以有一种专门加工直线和圆弧的数字程序控制线切割机床。我们取一个实例来作概要的描述。

例 数字程序控制线切割机床是一种新技术,切割曲线的精度很高,它是用电子计算机控制切割(曲线)的。在切割时,把工件固定在机床的十字型拖板上,利用钼丝和工件间加接高频电源